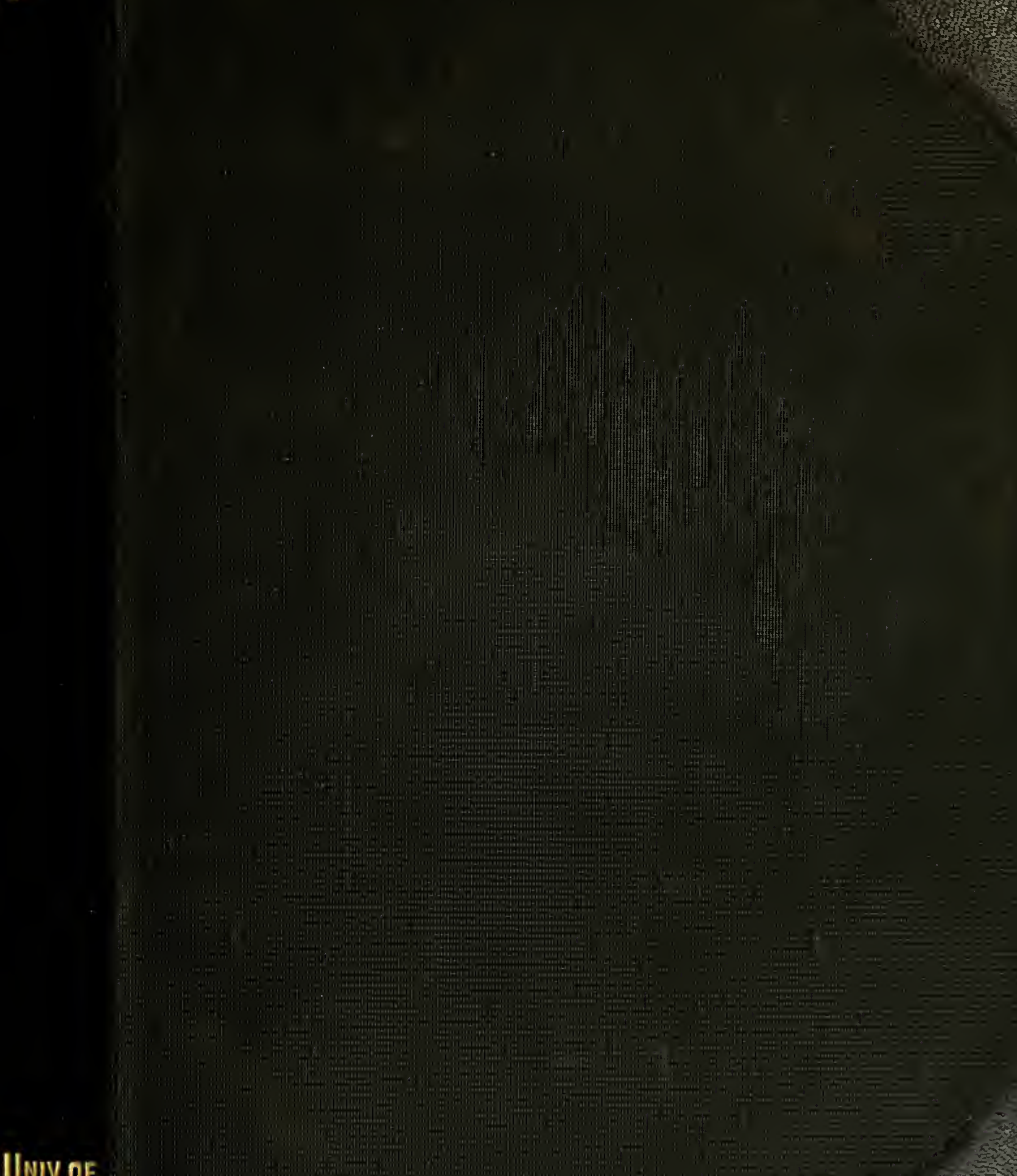


JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

SIXIÈME SÉRIE.

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, E. PICARD.

TOME NEUVIÈME. — ANNÉE 1913.

(78e Volume de la Collection.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini et à croissance régulière par rapport à l'une des variables;

PAR JULES SIRE.

Introduction.

Le présent travail, qui est un premier complément à notre Thèse parue dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXI, p. 1-91, a pour objet la résolution du problème suivant :

Étant donnée une fonction entière en x et y, $F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n$ ordonnée suivant les puissances entières de y et d'ordre apparent total fini λ, étudier la variation de la régularité de la croissance de $F(x, y)$ considérée comme une fonction entière en y, quand le point x se déplace à distance finie dans son plan, en supposant que la fonction entière en y, $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ est d'ordre apparent μ et à croissance régulière, c_n désignant le coefficient maximum de $a_n(x)$.

Nous sommes parvenu au théorème suivant :

Si $F(x, y)$ *satisfait aux conditions énoncées,* $F(x, y)$ *sera une fonction entière en* y *d'ordre apparent* μ *et à croissance régulière pour tous les points du plan des* x *situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel pouvant avoir la puissance du continu, pour lesquels* $F(x, y)$ *est ou bien une fonction entière en* y *d'ordre apparent* μ *et à croissance irrégulière, ou bien une fonction entière en* y *d'ordre apparent inférieur à* μ.

Nous rappelons qu'un ensemble ponctuel est un ensemble de points dont la portion appartenant à une aire finie quelconque peut être renfermée dans un nombre fini ou bien dans une infinité dénombrable de circonférences dont la somme totale des longueurs est aussi petite que l'on veut.

La méthode que nous avons utilisée pour résoudre la question posée plus haut repose sur les propositions suivantes :

1° Soient $f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{s_n} y^{s_n}$, $f_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{t_n} y^{t_n}$ deux fonctions entières d'ordre apparent respectif μ_1 et μ_2 ($\mu_1 \geqq \mu_2$), telles que les nombres de la suite des exposants s_n soient distincts des nombres de la suite des exposants t_n; si la fonction $f_1(y)$ est à croissance régulière il en sera de même de la fonction $f(y) = f_1(y) + f_2(y)$.

2° Si $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ est une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière, on peut mettre cette fonction sous la forme

$$f(y) = f_1(y) + f_2(y),$$

$f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} y^{q_n}$ étant une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière telle que $\lim_{n=\infty} - \frac{\log |c_{q_n}|}{q_n \log q_n} = \frac{1}{\mu}$ et en outre telle que les exposants des diverses puissances de y vérifient, quel que soit l'indice n, l'inégalité

$$q_n > e^{n^2}$$

et $f_2(y)$ étant la somme des termes de $f(y)$ qui n'entrent pas dans $f_1(y)$.

3° Si

$$P_{q_1}(x), \quad P_{q_2}(x), \quad \ldots, \quad P_{q_n}(x), \quad \ldots$$
$$[P_{q_n}(x) = (x - a_{q_n,1})(x - a_{q_n,2}) \ldots (x - a_{q_n,\varphi(q_n)})]$$

est une suite de polynomes satisfaisant aux conditions suivantes : *a*) quel que soit q_n, on a

$$q_n > e^{n^2};$$

b) les points d'affixes $a_{q_n,i}$ appartiennent à un cercle C concentrique à l'origine et de rayon R ; *c*) quelque soit q_n, le degré $\varphi(q_n)$ de $P_{q_n}(x)$ est inférieur à qq_n (q étant un nombre entier fixe), l'ensemble E des points $x = b$ pour lesquels on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k'$$

est un ensemble ponctuel, quel que soit $k' > 0$.

En utilisant d'une part des résultats obtenus au cours de nos recherches et d'autre part une transformation due à Legendre, nous avons obtenu la proposition suivante, qui est un complément au théorème Picard-Borel :

Soit $f(y)$ une fonction entière d'ordre apparent entier p et à croissance régulière, désignons par $r_n(x)$ le module du zéro de rang n de la fonction $x = f(y)$, l'ordre d'infinitude des $r_n(x)$ est déterminé pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un ensemble ponctuel E *pouvant avoir la puissance du continu, pour lesquels cet ordre d'infinitude n'est plus déterminé.*

Nous avons montré par un exemple qu'il existait des fonctions $f(y)$ pour lesquelles cet ensemble E avait effectivement la puissance du continu. Il n'y a donc pas analogie complète entre le théorème précédent et le théorème Picard-Borel.

Dans un prochain Mémoire nous étudierons les particularités que présente la fonction multiforme $y(x)$ définie par l'équation

$$F(x, y) = 0$$

aux points x pour lesquels $F(x, y)$ est une fonction entière en y à

croissance irrégulière, $F(x, y)$ étant une fonction entière en x et y satisfaisant aux conditions énoncées au début de cette Introduction.

Fonctions entières d'une variable.

1. Soit $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ une fonction entière de la variable complexe y, d'ordre apparent μ; on sait que $\frac{1}{\mu}$ est la plus petite limite de la suite des nombres $\frac{-\log|c_n|}{n \log n}$. Désignons par

$$c_{q_1,\delta}, \quad c_{q_2,\delta}, \quad \ldots, \quad c_{q_n,\delta}, \quad \ldots,$$

les coefficients de $f(y)$ tels que les nombres correspondants $\frac{-\log|c_{q_n,\delta}|}{q_{n,\delta} \log q_{n,\delta}}$ appartiennent à l'intervalle $\left(\frac{1}{\mu} - \delta, \frac{1}{\mu} + \delta\right)$. Si, quelque petit que soit le nombre positif δ, le rapport $\frac{\log q_{n+1,\delta}}{\log q_{n,\delta}}$ converge vers l'unité lorsque n augmente indéfiniment, la fonction $f(y)$ est dite *à croissance régulière*. Mais s'il existe une valeur δ_1 de δ pour laquelle on ait

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log q_{n+1,\delta_1}}{\log q_{n,\delta_1}} = k \qquad (k > 1),$$

il en sera de même pour toutes les valeurs de $\delta < \delta_1$. On dit que, dans ce cas, la fonction $f(y)$ est à croissance irrégulière.

2. Désignons par r_n le module du zéro de rang n de $f(y)$, les zéros de $f(y)$ étant supposés rangés d'après la règle de Weierstrass. En supposant que μ est nombre non entier, M. E. Borel a démontré les deux propositions suivantes (¹) :

1° Si l'ordre d'infinitude des r_n est déterminé, la fonction $f(y)$ est à croissance régulière.

2° Si la fonction $f(y)$ est à croissance régulière, l'ordre d'infinitude des r_n est déterminé.

(¹) *Leçons sur les fonctions entières*, p. 108. Paris, Gauthier-Villars; 1900.

3. *Soient* $f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{s_n} y^{s_n}$, $f_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{t_n} y^{t_n}$ *deux fonctions entières d'ordre apparent respectif* μ_1 *et* μ_2 ($\mu_1 \geqq \mu_2$) *et telles que la suite des exposants* s_n *ait tous ses éléments distincts de la suite des exposants* t_n ; posons

$$(1) \qquad f(y) = f_1(y) + f_2(y),$$

cette fonction $f(y)$ sera évidemment d'ordre apparent μ_1. Je dis que *si la fonction* $f_1(y)$ *est à croissance régulière, il en sera de même de la fonction* $f(y)$.

Désignons à cet effet par

$$(2) \qquad c_{q_{1,\delta}}, \quad c_{q_{2,\delta}}, \quad \ldots, \quad c_{q_{n,\delta}}, \quad \ldots$$

les coefficients de $f(y)$ tels que les nombres correspondants $\frac{-\log|c_{q_{n,\delta}}|}{q_{n,\delta}\log q_{n,\delta}}$ appartiennent à l'intervalle $\left(\frac{1}{\mu} - \delta, \frac{1}{\mu} + \delta\right)$, et par

$$(3) \qquad c_{p_{1,\delta}}, \quad c_{p_{2,\delta}}, \quad \ldots, \quad c_{p_{n,\delta}}, \quad \ldots$$

les coefficients de $f_1(y)$ dont les nombres correspondants $\frac{-\log|c_{p_{n,\delta}}|}{p_{n,\delta}\log p_{n,\delta}}$ appartiennent également à l'intervalle $\left(\frac{1}{\mu} - \delta, \frac{1}{\mu} + \delta\right)$. La relation (1) nous montre, en tenant compte de l'hypothèse faite sur les s_n et les t_n, que les nombres de la suite (3) font partie de la suite (2), et cela quelque petit que soit le nombre positif δ. Il en résulte que la suite des indices $q_{n,\delta}$ contient tous les nombres de la suite des indices $p_{n,\delta}$ et cela pour toute valeur positive de δ. Comme par hypothèse le rapport $\frac{\log p_{n+1,\delta}}{\log p_{n,\delta}}$ converge vers l'unité lorsque n augmente indéfiniment, quel que soit le nombre positif δ, il en sera de même du rapport $\frac{\log q_{n+1,\delta}}{\log q_{n,\delta}}$ en vertu d'un lemme établi dans notre Thèse (n° **17**). Donc la fonction $f(y)$ est à croissance régulière.

Remarque. — Supposons que μ_2 soit inférieur à μ_1 ; dans ce cas, si la fonction $f_1(y)$ est à croissance irrégulière, il en sera de même de la fonction $f(y)$, car à partir d'une certaine valeur δ_1 de δ, la suite (2)

sera identique à la suite (3). Comme par hypothèse

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log p_{n+1,\delta_1}}{\log p_{n,\delta_1}} = k > 1,$$

on aura également

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log q_{n+1,\delta}}{\log q_{n,\delta}} = k,$$

et la fonction $f(y)$ sera à croissance irrégulière.

4. Soit $f(y) = \sum\limits_{n=0} c_n y^n$ une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière; désignons par ω une racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité et posons

$$\sum_{i=0}^{q-1} f(\omega^i y) = a_1(y), \qquad \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{q-1} f(\omega^i y) f(\omega^j y) = a_2(y) \qquad (i \neq j), \qquad \ldots,$$
$$f(y) f(\omega y) \ldots f(\omega^{q-1} y) = a_q(y);$$

si ε est un nombre positif arbitrairement petit, on peut lui faire correspondre un nombre positif R *jouissant de la propriété suivante : il existe d'une part au moins un point ζ sur tout cercle concentrique à l'origine et de rayon $r >$* R *et d'autre part au moins une fonction $a_h(y)$, tels que l'on ait*

$$|a_h(\zeta)| > e^{|\zeta|^{\mu-\varepsilon}},$$

l'indice h de la fonction $a_h(y)$ pouvant d'ailleurs varier avec r.

Désignons à cet effet par C l'ensemble des points du plan des y situés à distance finie tels que si ζ est un point de cet ensemble dont la distance à l'origine est égale à r, on ait

$$|f(\zeta)| = \mathrm{M}(r),$$

M (r) étant le module maximum de $f(y)$ pour $|y| = r$. Cet ensemble C est formé d'une ou plusieurs courbes continues. Désignons en outre par R le plus grand des trois nombres R_1, R_2, R_3 qui satisfont respectivement aux conditions suivantes :

1° On a

$$|f(\zeta)| > e^{|\zeta|^{\mu-\frac{\varepsilon}{2}}}$$

pour tout point ζ de C dès que $|\zeta| > R_1$;

2° On a

$$\frac{p}{|f(\zeta)|^{\frac{1}{q}}} < \lambda < 1$$

pour tout point ζ de C dès que $|\zeta| > R_2$, p désignant un nombre entier supérieur au nombre des produits partiels figurant dans $a_i(y)$ pour $i = 1, 2, \ldots, q$;

3° On a

$$e^{|\zeta|^{\mu-\frac{\varepsilon}{2}}}(1-\lambda) > e^{|\zeta|^{\mu-\varepsilon}}$$

pour tout point ζ de C dès que $|\zeta| > R_3$.

Ceci posé, soit ζ un point quelconque de C dont la distance à l'origine soit supérieure à R, et considérons la suite des intervalles

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} [0, |f(\zeta)|^{k_1}],\quad [|f(\zeta)|^{k_1}, |f(\zeta)|^{k_2}],\quad \ldots,\quad [|f(\zeta)|^{k_i}, |f(\zeta)|^{k_{i+1}}],\quad \ldots \\ \qquad [|f(\zeta)|^{k_{q-1}}, |f(\zeta)|^{k_q}] \qquad \left[k_i = \frac{i}{q}\,(i = 1, 2, \ldots, q)\right]. \end{array}\right.$$

La relation $|f(\omega^i\zeta)| \leqq |f(\zeta)|$ étant vérifiée au point ζ considéré pour toute valeur de l'exposant i de ω différente de zéro, les nombres $|f(\omega^i\zeta)|\,(i \neq 0)$ appartiendront à certains intervalles (4). Mais comme le nombre de ces intervalles est supérieur d'une unité au nombre des quantités $f(\omega^i\zeta)\,(i \neq 0)$, il y en aura au moins un ne contenant pas de quantités $|f(\omega^i\zeta)|$. Soit $[|f(\zeta)|^{k_s}, |f(\zeta)|^{k_{s+1}}]$ un tel intervalle; nous aurons alors

$$(5)\qquad |f(\omega^i\zeta)| > |f(\zeta)|^{k_{s+1}}$$

pour $h-1$ nombres $|f(\omega^{i_1}\zeta)|, |f(\omega^{i_2}\zeta)|, \ldots, |f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)|$, tandis que pour les autres nombres $|f(\omega^j\zeta)|$ nous aurons d'une part

$$|f(\omega^j\zeta)| < |f(\zeta)|^{k_s}$$

et d'autre part

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{f(\omega^j\zeta)}{f(\omega^{i_p}\zeta)}\right| < \dfrac{1}{|f(\zeta)|^{k_{s+1}-k_s}} = \dfrac{1}{|f(\zeta)|^{\frac{1}{q}}} \\ (p = 1, 2, \ldots, h-1;\ j \neq i_1, i_2, \ldots, i_{h-1}). \end{array}\right.$$

Ceci étant, considérons le nombre $a_h(\zeta)$, nous aurons

$$|a_h(\zeta)| = |f(\zeta)\, f(\omega^{i_1}\zeta) \ldots f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)|\, [1 + \varepsilon(\zeta)]$$

avec

$$\varepsilon(\zeta) = \frac{\Sigma f(\omega^{j_1}\zeta) \ldots f(\omega^{j_h}\zeta)}{f(\zeta)\, f(\omega^{i_1}\zeta) \ldots f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)},$$

le signe Σ étant étendu à tous les produits partiels figurant dans $a_h(\zeta)$ et ne contenant pas l'un au moins des nombres $f(\zeta)$, $f(\omega^{i_1}\zeta)$, ..., $f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)$. Un terme quelconque $\frac{f(\omega^{j_1}\zeta) f(\omega^{j_2}\zeta) \ldots f(\omega^{j_h}\zeta)}{f(\zeta) f(\omega^{i_1}\zeta) \ldots f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)}$ de $\varepsilon(\zeta)$ est le produit d'un certain nombre $\left|\frac{f(\omega^{j}\zeta)}{f(\omega^{i_p}\zeta)}\right|$ $(j \neq i_1, i_2, \ldots, i_{h-1})$ par des nombres dont le module est au plus égal à l'unité ; par conséquent, d'après (6), le module de ce terme est moindre que $\frac{1}{|f(\zeta)|^{\frac{1}{q}}}$. Le nombre des termes figurant dans $\varepsilon(\zeta)$ étant inférieur à p, nous aurons donc

$$|\varepsilon(\zeta)| < \frac{p}{|f(\zeta)|^{\frac{1}{q}}}.$$

Par conséquent, puisque $|\zeta| > R$, il viendra d'après 2°

$$|\varepsilon(\zeta)| < \lambda,$$

et par suite

$$|a_h(\zeta)| > |f(\zeta) f(\omega^{i_1}\zeta) \ldots f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)|\, |(1-\lambda)|,$$

d'où, en remarquant que $|\zeta| > R_1$ et que les nombres $|f(\omega^{i_1}\zeta)|$, ..., $|f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)|$ vérifient la relation (5),

$$|a_h(\zeta)| > e^{r^{\mu-\frac{\varepsilon}{2}[1+(h-1)k_{s+1}]}}(1-\lambda) > e^{r^{\mu-\frac{\varepsilon}{2}}}(1-\lambda) \qquad (r = |\zeta|).$$

Comme $|\zeta|$ est en outre supérieur à R_3, nous aurons donc finalement

$$|a_h(\zeta)| > e^{r^{\mu-\varepsilon}} \qquad (r = |\zeta|),$$

ce qu'il fallait établir.

Il résulte immédiatement de la proposition précédente que *si $f(y)$ est une fonction entière d'ordre apparent μ et à croissance régulière, il ne peut exister une infinité de cercles concentriques à l'origine et de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on*

ait à la fois

$$|a_1(y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}}, \quad |a_2(y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}}, \quad \ldots, \quad |a_q(y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}} \quad (\eta > 0).$$

5. *Si* $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ *est une fonction entière en* y *d'ordre apparent* μ *et à croissance régulière, on peut mettre cette fonction sous la forme*

$$f(y) = f_1(y) + f_2(y),$$

$f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} y^{q_n}$ *étant une fonction entière d'ordre apparent* μ *et à croissance régulière, telle que* $\lim_{n=\infty} \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} = \frac{1}{\mu}$ *et en outre telle que les exposants des diverses puissances de* y *vérifient, quel que soit l'indice* n, *l'inégalité*

$$q_n > e^{n^2}$$

et $f_2(y)$ *étant la somme des termes de* $f(y)$ *qui n'entrent pas dans* $f_1(y)$.

Soit à cet effet

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \delta_3, \quad \ldots, \quad \delta_i, \quad \ldots,$$

une suite décroissante de quantités positives telles que $\lim_{i=\infty} \delta_i = 0$ et désignons par

$$c_{q_{1,i}}, \quad c_{q_{2,i}}, \quad \ldots, \quad c_{q_{n,i}}, \quad \ldots$$

les coefficients de $f(y)$ dont les nombres correspondants $\frac{-\log|c_{q_{n,i}}|}{q_{n,i}\log q_{n,i}}$ appartiennent à l'intervalle $\left(\frac{1}{\mu} - \delta_i, \frac{1}{\mu} + \delta_i\right)$, la suite des nombres $c_{q_{n,i}}$ fera partie quel que soit i de la suite des nombres $c_{q_{n,i-1}}$.

Ceci posé, la fonction $f(y)$ étant à croissance régulière, nous pouvons déterminer une suite de nombres entiers

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_n, \quad \ldots$$

tels que

$$\frac{\log q_{n+1,i}}{\log q_{n,i}} < 1 + \varepsilon_i \qquad \left(\lim_{i=\infty} \varepsilon_i = 0\right),$$

dès que $q_{n,i} > e^{m_i^2}$, et considérons la suite des intervalles

$$(7) \qquad \left(e^{m_1^2}, e^{(m_1+1)^2}\right), \quad \left(e^{(m_1+1)^2}, e^{(m_1+2)^2}\right), \quad \ldots, \quad \left(e^{m_2^2}, e^{(m_2+1)^2}\right), \quad \ldots$$

Soient $(e^{n_1^2}, e^{(n_1+1)^2})$ le premier des intervalles (7) renfermant des nombres $q_{n,1}$ supérieurs à $e^{n_1^2}$, $(e^{n_2^2}, e^{(n_2+1)^2})$ le premier des intervalles (7) pour lesquels l'exposant n_2 est au moins égal à m_2, renfermant des nombres $q_{n,2}$ supérieurs à $e^{n_2^2}$, etc. L'intervalle $(e^{n_1^2}, e^{(n_1+1)^2})$ renfermant des nombres $q_{n,1}$ supérieurs à $e^{n_1^2}$, nous prendrons le plus grand d'entre eux et nous le noterons q_1; si $(e^{p^2}, e^{(p+1)^2})$ est le premier des intervalles (7) pour lesquels l'exposant p vérifie la double inégalité $n_1 < p < n_2$, renfermant des nombres $q_{n,1}$ supérieurs à e^{p^2}, nous prendrons le plus grand d'entre eux et nous le noterons q_2, etc. L'intervalle $(e^{n_2^2}, e^{(n_2+1)^2})$ renfermant des nombres $q_{n,2}$ supérieurs à $e^{n_2^2}$, nous prendrons le plus grand d'entre eux et nous le noterons q_h, si le nombre des q_n précédemment choisis est égal à $h-1$, et ainsi de suite indéfiniment. D'après la façon même dont nous avons opéré, il est clair que l'on aura pour toute valeur de l'indice n

$$q_n > e^{n^2}.$$

Je dis maintenant que $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 1$. En effet, si ε est un nombre positif arbitrairement petit, nous pouvons déterminer d'une part un nombre entier N de manière que

$$\frac{(m+1)^2}{m^2} < 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que $e^{m^2} > N$, et d'autre part un nombre entier h tel que

$$\varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour toute valeur de l'indice i supérieure à h. Ceci fait, q_n étant supposé appartenir à un intervalle $(e^{m^2}, e^{(m+1)^2})(e^{m^2} > N)$, deux cas peuvent se présenter : 1° le nombre q_{n+1} fait partie de l'intervalle $(e^{(m+1)^2}, e^{(m+2)^2})$, nous aurons alors

$$\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < \frac{(m+2)^2}{m^2} < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\text{puisque } e^{m^2} > N);$$

2° le nombre q_{n+1} fait partie de l'intervalle $(e^{(m+p)^2}, e^{(m+p+1)^2})(p > 1)$. Alors si $e^{m^2} > e^{n_i^2}$ avec $i > h$, d'après la façon même dont nous avons

opéré plus haut, le nombre q_n appartiendra à la suite des nombres q_{n_i} et nous aurons $q_n = q_{t,i}$, et de plus les deux nombres q_{n+1} et $q_{t+1,i}$ seront ou bien égaux, ou bien situés dans le même intervalle $(e^{(m+p)^2}, e^{(m+p+1)^2})$. Par conséquent nous déduirons de la relation

$$\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = \frac{\log q_{t+1,i}}{\log q_{t,i}} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_{t+1,i}},$$

$$\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 + \varepsilon',$$

en remarquant que d'après nos hypothèses et d'après ce qui a été établi précédemment

$$\frac{\log q_{t+1,i}}{\log q_{t,i}} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \frac{\log q_{n+1}}{\log q_{t+1,i}} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il résulte donc de ce qui précède que si M est le plus grand des deux nombres N et e^{n_k}, on aura dans tous les cas

$$\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < 1 + \varepsilon' \qquad \left(\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right),$$

dès que $q_n > \mathrm{M}$. Comme ε' est arbitrairement petit en même temps que ε, il s'ensuit que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 1.$$

Je dis de plus que la suite des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ admet $\frac{1}{\mu}$ comme élément limite unique. En effet, si q_n est supérieur à $e^{n_i^2}$, le nombre c_{q_n} fera partie de la suite des nombres $c_{q_{n,i}}$ et nous aurons d'après l'hypothèse faite au début de la démonstration

$$\left| \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} - \frac{1}{\mu} \right| \leqq \delta_i,$$

et comme δ_i converge vers zéro avec $\frac{1}{i}$, il en résulte bien que

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} = \frac{1}{\mu}.$$

Si nous posons

$$f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} y^{q_n},$$

cette fonction $f_1(y)$ satisfera bien aux conditions requises et nous aurons

$$f(y) = f_1(y) + f_2(y),$$

$f_2(y)$ désignant la somme des termes de $f(y)$ qui n'entrent pas dans $f_1(y)$.

Ensembles ponctuels.

6. Soit E un ensemble borné de points répartis dans un plan; on dit que c'est un ensemble ponctuel, si tous ses points peuvent être renfermés dans un nombre fini ou dans une infinité dénombrable de circonférences dont la somme totale des longueurs est aussi petite que l'on veut.

De cette définition résulte immédiatement que l'ensemble, somme d'une infinité dénombrable d'ensembles ponctuels, est lui-même un ensemble ponctuel.

Un point est un ensemble ponctuel; par suite, d'après la propriété précédente, un ensemble dénombrable et borné de points est un ensemble ponctuel. En particulier, l'ensemble des points à coordonnées rationnelles et appartenant à une aire finie quelconque est un ensemble ponctuel. Cet exemple nous montre qu'un ensemble ponctuel peut être dense superficiellement.

La distribution des points d'un ensemble ponctuel par rapport à certaines familles de courbes a été étudiée par M. E. Borel [1]. De ses recherches résultent en particulier que :

1° La projection d'un ensemble ponctuel sur une droite quelconque est un ensemble de points de mesure linéaire nulle;

2° Les circonférences concentriques à un point et portant des points de l'ensemble déterminent sur une droite quelconque passant par le centre un ensemble de points de mesure linéaire nulle;

3° Les droites issues d'un point fixe O et portant des points de l'ensemble autres que O (dans le cas où O appartient à l'ensemble) déter-

---

[1] *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 72 et suiv. Paris, Gauthier-Villars; 1898.

minent, sur une circonférence concentrique au point O, un ensemble de points de mesure linéaire nulle.

On déduit aisément de ces propriétés que si E est un ensemble ponctuel, on pourra toujours trouver dans toute aire finie, si petite soit-elle, des points n'appartenant pas à E.

7. Dans le cas où l'ensemble E est non borné, on dit que c'est un ensemble ponctuel, si la portion de cet ensemble appartenant à une aire finie quelconque est un ensemble ponctuel.

Comme exemple d'ensemble ponctuel non borné, nous pouvons citer l'ensemble de tous les points du plan dont les deux coordonnées sont rationnelles.

Points de moindre croissance.

8. Soit

$$P_{q_1}(x), \quad P_{q_2}(x), \quad \ldots, \quad P_{q_n}(x), \quad \ldots$$

$$[P_{q_n}(x) = (x - a_{q_n,1})(x - a_{q_n,2}) \ldots (x - a_{q_n,\varphi(q_n)})]$$

une suite de polynomes satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les points d'affixes $a_{q_n,i}$ appartiennent à un cercle concentrique à l'origine et de rayon R.

2° Si $\varphi(q_n)$ est le degré du polynome $P_{q_n}(x)$, il existe un nombre entier q tel que l'on ait pour toute valeur de q_n

$$\varphi(q_n) \leqq q q_n.$$

Nous avons désigné dans notre Thèse (n° 59), sous le nom de *points de moindre croissance*, tout point $x = a$ pour lequel on a

$$\overline{\lim_{q_n = \infty}} \frac{-\log |P_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} = k',$$

k' étant une quantité positive finie ou infinie. Si k est un nombre positif inférieur à k', nous aurons à partir d'une certaine valeur de q_n

$$(8) \qquad -\frac{\log |P_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} > k.$$

Désignons par $C_{q_n}^k$ la lemniscate représentée par l'équation

$$\frac{-\log|P_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n} - k = 0;$$

l'inégalité (8) signifie qu'à partir d'une certaine valeur de q_n, le point $x = a$ sera intérieur au sens étroit à la courbe $C_{q_n}^k$. Cette courbe $C_{q_n}^k$ sera en général formée d'une suite de boucles fermées en nombre au plus égal à $\varphi(q_n)$, chacune de ces boucles comprenant à son intérieur au moins un zéro du polynome $P_{q_n}(x)$. Dans le cas particulier où la courbe $C_{q_n}^k$ comprend $\varphi(q_n)$ boucles fermées, chacune de ces boucles renferme à son intérieur un zéro et un seul du polynome $P_{q_n}(x)$.

Si $C_{q_n}^k$, $C_{q_n}^{k'}$ sont deux lemniscates correspondant à deux valeurs distinctes de k, ces boucles n'ont aucun point commun et de plus, si $k' < k$, la courbe $C_{q_n}^{k'}$ sera intérieure au sens étroit à la courbe $C_{q_n}^k$.

9. Soient $C_{q_n,1}^k, C_{q_n,2}^k, \ldots, C_{q_n,\varphi(q_n)}^k$ les boucles fermées qui constituent la lemniscate $C_{q_n}^k$ et désignons par $\Gamma_{q_n,i}^k$ la circonférence circonscrite au rectangle $R_{q_n,i}^k$ circonscrit à la boucle $C_{q_n,i}^k$ et dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, *le rayon* $\rho_{q_n,i}^k$ *de* $\Gamma_{q_n,i}^k$ *sera à partir d'une certaine valeur de* q_n *moindre que* $\frac{A}{\log q_n}$ *(A désignant une quantité positive fixe).*

Posons à cet effet

$$a_{q_n,i} = \alpha_{q_n,i} + \beta_{q_n,i}\sqrt{-1}$$

et

$$A_{q_n}(\xi) = (\xi - \alpha_{q_n,1})(\xi - \alpha_{q_n,2}) \ldots (\xi - \alpha_{q_n,\varphi(q_n)}).$$

En vertu de la relation

$$|\xi - \alpha_{q_n,i}| \leqq |x - a_{q_n,i}|,$$

la projection de l'axe des ξ du côté du rectangle $R_{q_n,i}^k$ parallèle à cet axe sera un certain segment $d_{q_n,i}^{\xi}$ compris à l'intérieur du segment $\gamma_{q_n,i}^k$ en tout point duquel on a

$$\frac{-\log|A_{q_n}(\xi)|}{q_n \log q_n} \geqq k.$$

La longueur du segment $\gamma_{q_n}^k$ étant inférieure à $\frac{A}{\log q_n}$ (A étant une

quantité positive), pour toutes les valeurs de q_n dépassant un certain nombre fixe (*cf.* Thèse, n° 37), on aura donc pour ces mêmes valeurs de q_n

$$\text{longueur du segment : } d^{\xi}_{q_n,i} < \frac{A}{\log q_n}.$$

On verrait de même que la longueur du segment $d^{\eta}_{q_n,i}$ projection du rectangle $R^k_{q_n,i}$ sur $O\eta$ est moindre que $\frac{A}{\log q_n}$, à partir d'une certaine valeur de q_n. Il en résulte qu'on aura pour toutes les valeurs de q_n dépassant un certain nombre fixe et quel que soit le second indice i

$$\rho^k_{q_n,i} < \frac{A}{\log q_n}.$$

10. *Lemme.* — Soit

$$A_{q_n}(\xi) = (\xi - \alpha_{q_n,1})(\xi - \alpha_{q_n,2}) \ldots (\xi - \alpha_{q_n,\rho(q_n)})$$

une suite de polynomes de la variable réelle ξ satisfaisant aux conditions suivantes : 1° tous les zéros de ces polynomes appartiennent à un intervalle fini AB de l'axe des ξ dont les extrémités A et B ont respectivement pour abscisses a et b $(a < b)$; 2° le degré $\rho(q_n)$ de $A_{q_n}(\xi)$ satisfait pour toute valeur de l'indice q_n à l'inégalité $\rho(q_n) < \frac{q_n}{p}$, p étant un nombre entier positif fixe. *Si σ_{q_n} est la somme totale des longueurs des segments $\gamma^k_{q_n,i}$ en chaque point desquels on a $\frac{-\log|A_{q_n}(\xi)|}{q_n \log q_n} \geqq k$ avec $k > \frac{4}{p}$, on aura pour toute valeur de q_n*

$$\sigma_q < \frac{2}{pq_n^3}.$$

Nous supposerons pour plus de clarté dans la démonstration que les points $\alpha_{q_n,i}$ ont été numérotés pour chaque valeur de l'indice q_n dans l'ordre où les rencontre un mobile se déplaçant sur l'axe des ξ dans le sens de A vers B.

Cette remarque faite, portons de part et d'autre de chaque point $\alpha_{q_n,i}$ une longueur égale à $\frac{1}{q_n^4}$, nous obtiendrons une suite de segments $g_{q_n,i}$ dont la somme totale des longueurs est moindre que $\frac{2}{pq_n^3}$. Ces segments $g_{q_n,i}$ peuvent avoir des portions ou des extrémités communes.

Considérons en particulier les segments $g_{q_n,i}, g_{q_n,i+1}, \ldots, g_{q_n,j}$ jouissant des propriétés suivantes : *a*) le segment $g_{q_n,i}$ n'a aucune portion ni extrémité commune avec le segment $g_{q_n,i-1}$, de même le segment $g_{q_n,j}$ n'a aucune portion ni extrémité commune avec le segment $g_{q_n,j+1}$; *b*) chaque segment $g_{q_n,h}$ pour $h = i, i+1, \ldots, j-1$ a une portion ou extrémité commune avec le segment $g_{q_n,h+1}$, nous remplacerons tous ces segments par le segment unique $\gamma'_{q_n,i}$ ayant pour extrémité gauche l'extrémité gauche du segment $g_{q_n,i}$ et pour extrémité droite l'extrémité droite du segment $g_{q_n,j}$. Les segments $\gamma'_{q_n,i}$ ainsi définis n'auront aucune portion ni extrémité commune. La somme totale des longueurs de ces segments $\gamma'_{q_n,i}$ étant au plus égale à la somme totale des longueurs des segments $g_{q_n,i}$ est donc moindre que $\dfrac{2}{p q_n^3}$.

Ceci posé, soit $\xi = b$ un point de l'axe des ξ extérieur au sens large à tous les segments $\gamma'_{q_n,i}$ ayant même premier indice q_n; comme la distance d'un tel point $\xi = b$ aux points $\alpha_{q_n,i}$ $[i = 1, 2, \ldots, \varphi(q_n)]$ est au moins égale à $\dfrac{1}{q_n^3}$, nous aurons donc pour la valeur q_n considérée, en observant que le degré $\varphi(q_n)$ de $A_{q_n}(\xi)$ vérifie l'inégalité $\varphi(q_n) < \dfrac{q_n}{p}$,

$$|A_{q_n}(b)| > \frac{1}{q_n^{\frac{4q_n}{p}}},$$

d'où nous déduisons, en tenant compte de notre hypothèse sur k,

$$\frac{-\log|A_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} < \frac{4 q_n \log q_n}{p q_n \log q_n} = \frac{4}{p} < k.$$

Il en résulte donc que tout segment $\gamma^k_{q_n,i}$ en tout point duquel on a

$$\frac{-\log|A_{q_n}(\xi)|}{q_n \log q_n} \geq k,$$

est intérieur au sens étroit à un certain segment $\gamma'_{q_n,i}$ et cela quels que soient les indices q_n et i. Par suite, la somme totale des longueurs des segments $\gamma^k_{q_n,i}$ est au plus égale à la somme totale des longueurs des segments $\gamma'_{q_n,i}$ et cela pour toute valeur de q_n. On aura donc pour toute

valeur de q_n

$$\sigma_{q_n} < \frac{2}{pq_n^3},$$

ce qu'il fallait établir.

En procédant de la même manière qu'au numéro précédent et en utilisant le lemme que nous venons d'établir, on démontre aisément que *si le degré du polynome* $P_{q_n}(x)$ *satisfait pour toute valeur de* q_n *à l'inégalité* $\varphi(q_n) < \frac{q_n}{p}$ *et si* k *est supérieur à* $\frac{4}{p}$, *le rayon* $\rho^k_{q_n,i}$ *de la circonférence* $\Gamma^k_{q_n,i}$ *vérifie, quels que soient les indices* q_n *et* i, *l'inégalité* $\rho^k_{q_n,i} < \frac{2}{pq_n^3}$.

11. Admettons maintenant que le degré $\varphi(q_n)$ du polynome $P_{q_n}(x)$ satisfasse quel que soit q_n à l'inégalité $\varphi(q_n) < qq_n$ (q étant un nombre entier) et considérons les deux lemniscates $C^h_{q_n}$ et $C^k_{q_n}$ $\left(h < \frac{k}{2}\right)$. La lemniscate $C^k_{q_n}$ sera, d'après la proposition rappelée à la fin du n° 8, intérieure au sens étroit à la courbe $C^h_{q_n}$. Nous partagerons les boucles de cette dernière courbe en deux sortes : 1° les courbes de la première sorte caractérisées par le fait que chacune d'elles renferme à son intérieur au moins $\frac{q_n}{p}$ zéros du polynome $P_{q_n}(x)$ (p étant un nombre entier que nous fixerons ultérieurement) ; 2° les boucles de la seconde sorte caractérisées par ce fait que chacune d'elles renferme à son intérieur moins de $\frac{q_n}{p}$ zéros du polynome $P_{q_n}(x)$. Le nombre des courbes de la première sorte est au plus égal à pq, en vertu de l'hypothèse faite sur le nombre des zéros du polynome $P_{q_n}(x)$. Par suite la somme totale des longueurs des circonférences $\Gamma^h_{q_n,i}$ circonscrites aux rectangles $R^h_{q_n,i}$ circonscrits aux boucles de la première sorte de la lemniscate $C^h_{q_n}$ sera, d'après la proposition du n° 9, moindre que $\frac{2\pi pqA}{\log q_n}$ à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande.

Ce point établi, considérons les boucles de la courbe $C^h_{q_n}$ situées à l'intérieur d'une boucle quelconque $C^h_{q_n,i}$ de la seconde sorte de la lemniscate $C^h_{q_n}$ et désignons par $Q_{q_n,i}(x)$ le polynome dont la plus haute puissance de x est égale à l'unité et admettant comme zéros, les zéros du polynome $P_{q_n}(x)$ compris à l'intérieur de la boucle $C^h_{q_n,i}$ et

ceux-là seulement. Le degré de ce polynome $Q_{q_n,i}(x)$ sera, quel que soit le second indice i, évidemment inférieur à $\frac{q_n}{p}$. Posons

$$P_{q_n}(x) = Q_{q_n,i}(x)\, S_{q_n,i}(x).$$

Les zéros du polynome $Q_{q_n,i}(x)$ restant, quels que soient les indices q_n et i, à l'intérieur d'un cercle C concentrique à l'origine et de rayon fini R, en vertu de la condition 1° du n° **8** à laquelle satisfont tous les polynomes $P_{q_n}(x)$ et le degré de ce polynome restant toujours inférieur à $\frac{q_n}{p}$, nous pouvons déterminer un nombre positif Q de manière que l'on ait pour tout point x du cercle C et quel que soit le second indice i

$$\frac{-\log|Q_{q_n,i}(x)|}{q_n \log q_n} > -\varepsilon,$$

dès que $q_n > Q$, le nombre positif ε étant choisi de telle façon que $h + \varepsilon < \frac{k}{2}$. Par suite, nous aurons pour tout point d'une boucle de la seconde sorte $C^h_{q_n,i}$ et quel que soit le second indice i

$$(9) \qquad \frac{-\log|S_{q_n,i}(x)|}{q_n \log q_n} < \frac{k}{2},$$

dès que $q_n > Q$, en remarquant que l'on a pour tout point d'une boucle quelconque de $C^h_{q_n}$

$$\frac{-\log|P_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n} - h = 0.$$

Par suite, comme la fonction $\frac{-\log|S_{q_n,i}(x)|}{q_n \log q_n}$ est une fonction harmonique régulière à l'intérieur de la boucle $C^h_{q_n,i}$, l'inégalité (9) sera vérifiée dans les mêmes conditions pour tout point x intérieur à $C^h_{q_n,i}$. On en déduit que l'on a pour tous les points des boucles de la lemniscate $C^k_{q_n}$ situées à l'intérieur d'une boucle de la seconde sorte $C^h_{q_n,i}$, et quel que soit le second indice i,

$$(10) \qquad \frac{-\log|Q_{q_n,i}(x)|}{q_n \log q_n} > \frac{k}{2},$$

pour toute valeur de q_n supérieure à Q.

Par conséquent, si nous déterminons le nombre entier p de manière que $\frac{4}{p} < \frac{k}{2}$, la longueur d'une circonférence $\Gamma_{q_n,i,h}$ circonscrite à un rectangle circonscrit à une boucle quelconque de la lemniscate représentée par l'équation $\frac{-\log|Q_{q_n,i}(x)|}{q_n \log q_n} = \frac{k}{2}$ sera, en vertu de la proposition du n° **10**, moindre que $\frac{4\pi}{pq_n^3}$ et cela quels que soient les indices q, i et h. Comme pour toute valeur de q_n supérieure à Q, toute boucle de $C_{q_n}^k$ ayant des points à l'intérieur d'une boucle de la courbe représentée par l'équation $\frac{-\log|Q_{q_n,i}(x)|}{q_n \log q_n} = \frac{k}{2}$, est en vertu de la relation (10) intérieure au sens étroit à cette dernière boucle, il en résulte que pour ces valeurs de q_n et quel que soit le second indice i, toute circonférence $\Gamma_{q_n,i}^k$ correspondant à une boucle de la lemniscate $C_{q_n}^k$ intérieure au sens étroit à la boucle $C_{q_n,i}^h$ de la seconde sorte de la courbe $C_{q_n}^h$, est intérieure au sens étroit à une certaine circonférence $\Gamma_{q_n,i,h}$. Par suite, nous aurons pour toutes les valeurs de q_n supérieures à Q et quel que soit le second indice i

$$\text{longueur de } \Gamma_{q_n,i}^k < \frac{4\pi}{pq_n^3}.$$

Le nombre des circonférences $\Gamma_{q_n,i}^k$ correspondant aux boucles de $C_{q_n}^k$ située à l'intérieur des boucles $C_{q_n,i}^h$ de la seconde sorte, étant au plus égal à qq_n, il s'ensuit que la somme totale des longueurs de toutes ces circonférences est moindre que $\frac{4\pi q}{pq_n^2}$.

Par suite, en tenant compte du résultat obtenu plus haut pour les boucles $C_{q_n,i}^h$ de la première sorte, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Si les polynomes $P_{q_n}(x)$ satisfont aux conditions énoncées au n° **8**, *pour toutes les valeurs de q_n supérieures à un certain nombre fixe, les boucles de la lemniscate $C_{q_n}^k$ peuvent être renfermées dans un nombre fini de circonférences dont la somme totale des longueurs est moindre que*

$$\frac{2\pi pqA}{\log q_n} + \frac{4\pi}{pq_n^2},$$

le nombre entier positif p dépendant de k.

12. Désignons ces circonférences par $D^k_{q_n, 1}, D^k_{q_n, 2}, \ldots; D^k_{q_n, \theta(q_n)}$ $[\theta(q_n) \leqq 2(q_n)]$ et soit M_k l'ensemble des points de moindre croissance $x = a$ pour lesquels on a

$$\varliminf_{q_n = \infty} \frac{-\log |P_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} \geqq k' \qquad (k' > k).$$

Un tel point $x = a$ est, comme nous l'avons remarqué au n° **8**, intérieur au sens étroit à une boucle de la lemniscate $C^k_{q_n}$ pour toutes les valeurs de q_n dépassant un certain nombre fixe. Par suite, pour ces mêmes valeurs de q_n, il est *a fortiori* intérieur au sens étroit à une circonférence $D^k_{q_n, i}$. Par conséquent, en procédant de la même façon qu'aux n^os **42** et **37** de notre Thèse, on démontre d'abord que l'ensemble $M_{k'}$ est un ensemble ponctuel, puis que *l'ensemble* M *des points de moindre croissance de la suite des polynomes* $P_{q_n}(x)$ *est également un ensemble ponctuel.*

13. Nous allons maintenant assujettir les indices q_n des polynomes $P_{q_n}(x)$ à vérifier pour toute valeur de n la relation $q_n > e^{n^2}$ et étudier dans cette hypothèse l'ensemble E des points $x = b$ du plan des x pour lesquels on a

$$\varlimsup_{n = \infty} \frac{-\log |P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k',$$

k' étant une quantité positive finie ou infinie.

Soit $E_{k''}$ l'ensemble des points de E pour lesquels le nombre k' vérifie l'inégalité $k' \geqq k''$. D'après ce qui a été dit au numéro précédent, un point quelconque $x = b$ de E est intérieur au sens étroit à une infinité de circonférences $D^k_{q_n, i}$ $(k'' > k)$. De plus, la somme totale des longueurs de toutes les circonférences $D^k_{q_n, i}$ est d'après notre hypothèse sur les q_n et en vertu du résultat du n° **11**, moindre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B}{n^2}$, B étant une quantité positive finie. Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente, il s'ensuit que l'ensemble $E_{k''}$ est un ensemble ponctuel. Cette propriété ayant lieu quelque petit que soit le nombre positif k'', on en conclut, en procédant de la même manière qu'au n° **37** de notre

Thèse, que l'ensemble E est un ensemble ponctuel. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si les polynomes $P_{q_n}(x)$ *satisfont aux conditions énoncées au* n° **8** *et si leurs indices* q_n *vérifient pour toute valeur de* n *l'inégalité* $q_n > e^{n^2}$, *l'ensemble* E *des points* $x = b$ *pour lesquels on a*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k',$$

k' *étant une quantité positive finie ou infinie, est un ensemble ponctuel.*

Remarque I. — Cet ensemble E comprendra évidemment tous les points de l'ensemble M des points de moindre croissance de la suite des polynomes $P_{q_n}(x)$.

Remarque II. — Si $x = c$ est un point n'appartenant pas à E, nous aurons en ce point

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|P_{q_n}(c)|}{q_n \log q_n} = 0,$$

d'après la définition même de E.

Fonctions $G(x, y)$.

14. Soit $G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n}(x) y^{q_n}$ une fonction entière en x et y ordonnée suivant les puissances entières de y, d'ordre apparent total fini λ et dans laquelle les exposants des diverses puissances de y vérifient pour toute valeur de n, l'inégalité

$$q_n > e^{n^2}.$$

Désignons par c_{q_n} le coefficient maximum de $a_{q_n}(x)$, nous supposerons en outre que l'ensemble des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ admette $\frac{1}{\mu}$ comme élément limite unique. Alors la fonction entière en

y, $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} y^{q_n}$ sera d'ordre apparent μ. Posons

$$a_{q_n}(x) = c_{q_n} f_{q_n}(x),$$

et appelons E l'ensemble des points $x = b$ du plan des x situés à distance finie pour lesquels on a

$$\overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{-\log|f_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k',$$

k' étant une quantité positive finie ou infinie. *Cet ensemble* E *est un ensemble ponctuel.* Pour le montrer, il suffit d'établir, d'après la définition du nº **7**, que la portion E_R de E appartenant à un certain cercle C_R concentrique à l'origine et de rayon R est un ensemble ponctuel. Désignons à cet effet par $P_{q_n}(x)$ le polynome dont le coefficient de la plus haute puissance de x est égal à l'unité et admettant pour zéros, les zéros de $f_{q_n}(x)$ dont le module est au plus égal à $R + \eta$ $(\eta > 0)$, et ceux-là seulement; puis posons

$$f_{q_n}(x) = P_{q_n}(x) h_{q_n}(x).$$

Les fonctions $h_{q_n}(x)$ sont des fonctions holomorphes n'admettant aucun zéro à l'intérieur du cercle $C_{R+\eta}$ concentrique à l'origine et de rayon $R + \eta$. Par suite, les fonctions $\frac{-\log|h_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n}$ sont des fonctions harmoniques régulières à l'intérieur et sur le contour du cercle C_R concentrique à l'origine et de rayon R. En procédant de la même manière qu'aux nos **75-76** de notre Thèse, on voit que cette suite de fonctions converge uniformément vers zéro dans C_R. Il en résulte que tout point $x = b$ de l'ensemble E_R est un point pour lequel on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k'$$

et inversement. L'ensemble des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ étant borné, puisqu'il admet un seul élément limite fini, le degré $\varphi(q_n)$ de $P_{q_n}(x)$ satisfera pour toute valeur de l'indice n à l'inégalité

$$\varphi(q_n) \leq q q_n,$$

q étant un nombre entier fixe (*cf.* Thèse, n° **80**). Par suite, d'après le résultat du n° **13**, l'ensemble E_R sera un ensemble ponctuel.

L'ensemble E étant un ensemble ponctuel, dans toute aire finie, il existe des points n'appartenant pas à E (*cf.* n° **6**). Comme en un tel point $x = a$, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|P_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} = 0,$$

et que de plus

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|h_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} = 0,$$

il en résulte que l'on aura pour un tel point

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|f_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} = 0.$$

15. Admettons, en outre, que la fonction entière $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} y^{q_n}$ soit à croissance régulière, nous allons étudier la régularité de la croissance de $G(x, y)$ considérée comme une fonction entière en y quand le point x se déplace à distance finie dans son plan.

Soit $x = a$ un point n'appartenant pas à l'ensemble E. Comme la suite des nombres $\frac{-\log|f_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n}$ admet zéro comme élément limite unique, au nombre positif δ nous pouvons faire correspondre un entier Q_1, tel que pour $q_n > Q_1$, on ait

$$-\delta \leq \frac{-\log|f_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} \leq \delta.$$

D'autre part, la suite des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ convergeant vers $\frac{1}{\mu}$, il existe un entier Q_2, tel que pour $q_n > Q_2$, on ait

$$\frac{1}{\mu} - \delta \leq \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} \leq \frac{1}{\mu} + \delta.$$

Par suite, nous aurons pour toutes les valeurs de q_n supérieures au plus grand des deux nombres Q_1 et Q_2 :

$$(11) \qquad \frac{1}{\mu} - 2\delta \leq \frac{-\log|a_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} \leq \frac{1}{\mu} + 2\delta.$$

Il en résulte que la suite des indices q_n des coefficients $a_{q_n}(a)$ de $G(a, y)$ vérifiant la relation précédente s'obtient en supprimant un nombre fini de termes de la suite des indices q_n des coefficients de $g(y)$, et cela quel que soit le nombre positif δ. Comme d'après nos hypothèses sur $g(y)$ le rapport $\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n}$ (q_n et q_{n+1} étant les indices de deux coefficients consécutifs de cette fonction entière) converge vers l'unité, il en sera de même du rapport $\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n}$, q_n et q_{n+1} étant les indices de deux coefficients consécutifs de $G(a, y)$ vérifiant la relation (11), et cela quel que soit le nombre positif δ. Par suite, la fonction $G(a, y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance régulière. Donc *en tout point x n'appartenant pas à E, la fonction $G(x, y)$ est une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière.*

Soit maintenant $x = b$ un point de l'ensemble E. Comme

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|f_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k' > 0,$$

on a ou bien

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|f_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k > 0$$

ou bien

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|f_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = 0.$$

Dans le premier cas la fonction $G(b, y)$ sera une fonction entière d'ordre apparent inférieur à μ, puisque la plus petite limite de la suite des nombres $\frac{-\log|a_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n}$ est égale à $\frac{1}{\mu} + k$ ($k > 0$).

Ceci posé, considérons le cas où la suite des nombres $\frac{-\log|f_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n}$ admet zéro comme plus petite limite et désignons par

$$(12) \qquad f_{s_1,\delta}(b), \quad f_{s_2,\delta}(b), \quad \ldots, \quad f_{s_n,\delta}(b), \quad \ldots,$$

les nombres de la suite des $f_{q_n}(b)$ tels que les nombres correspondants $\frac{-\log|f_{s_n,\delta}(b)|}{s_{n,\delta} \log s_{n,\delta}}$ appartiennent à l'intervalle $(-\delta, +\delta)$. Deux circonstances pourront se présenter : 1° quelque petit que soit le

nombre positif δ, le rapport $\frac{\log s_{n+1,\delta}}{\log s_{n,\delta}}$ converge vers l'unité lorsque n augmente indéfiniment. Comme les nombres $\frac{-\log|c_{s_n,\delta}|}{s_{n,\delta}\log s_{n,\delta}}$ appartiennent à l'intervalle $\left(\frac{1}{\mu}-\delta, \frac{1}{\mu}+\delta\right)$ pour toutes les valeurs de s_n supérieures à Q_δ, il en résulte que

(13) $$\frac{1}{\mu}-2\delta < \frac{-\log|a_{s_n,\delta}(b)|}{s_{n,\delta}\log s_{n,\delta}} < \frac{1}{\mu}+2\delta,$$

dès que $s_{n,\delta} > Q_\delta$. Il s'ensuit que pour toute valeur positive de δ, la suite des indices $s_{n,\delta}$ des nombres $a_{s_n,\delta}(b)$ vérifiant la relation (13) se déduit de la suite des indices des nombres (12) par la suppression d'un nombre fini de termes de cette dernière suite. Par suite, d'après notre hypothèse, le rapport $\frac{\log s_{n+1,\delta}}{\log s_{n,\delta}}$ [$s_{n,\delta}$ et $s_{n+1,\delta}$ étant les indices de deux coefficients consécutifs de $G(b,y)$ satisfaisant à la relation (13)] converge vers l'unité, et cela quelque petit que soit le nombre positif δ.

Par conséquent la fonction $G_1(b,y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{s_n,\delta_1}(b)\, y^{s_{n,\delta_1}}$ (δ_1 désignant une valeur positive de δ) est d'ordre apparent μ et à croissance régulière.

Or

$$G(b,y)=G_1(b,y)+G_2(b,y),$$

$G_2(b,y)$ étant une fonction entière d'ordre apparent inférieur à μ, il s'ensuit d'après la proposition du n° **5** que $G(b,y)$ est une fonction entière d'ordre apparent μ et à croissance régulière.

2° Il existe une valeur δ_1 de δ telle que $\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log s_{n+1,\delta}}{\log s_{n,\delta}} = k > 1$. Dans ce cas $G_1(b,y)$ sera une fonction entière d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, comme on le voit aisément, en procédant de la même manière que plus haut. Puisque la fonction $G_2(b,y)$ est d'ordre apparent inférieur à μ, la fonction $G(b,y)$ sera alors d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, d'après la remarque du n° **5**.

Il résulte donc de l'analyse précédente que *la fonction* $G(x,y)$ *est une fonction entière en* y *d'ordre apparent* μ *et à croissance régulière pour tous les points du plan des* x *situés à distance finie, sauf*

au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel **M** *pour lesquels elle sera ou bien une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, ou bien une fonction entière en y d'ordre apparent inférieur à μ.*

Cet ensemble **M** peut avoir la puissance du continu, comme on le constate aisément par des exemples.

Fonctions $F(x, y)$.

16. Soit $F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n$ une fonction entière en x et y d'ordre apparent total fini λ, ordonnée suivant les puissances entières de y.

Désignons par c_n le coefficient maximum de $a_n(x)$ et supposons que la fonction entière en y, $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ soit d'ordre apparent μ et à croissance régulière. Nous avons vu au n° **5** que l'on pouvait mettre cette fonction sous la forme

$$f(y) = f_1(y) + f_2(y),$$

$f_1(y)$ étant une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière telle que l'ensemble des nombres $\frac{-\log |c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ admette $\frac{1}{\mu}$ comme élément limite unique et en outre telle que la suite des exposants q_n vérifie, quel que soit n, l'inégalité $q_n > e^{n^2}$. Posons

$$G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n}(x) y^{q_n}$$

et

$$F(x, y) = G(x, y) + H(x, y).$$

La fonction $G(x, y)$ que nous venons de définir vérifie les mêmes conditions que la fonction $G(x, y)$ du numéro précédent; de plus la fonction $H(x, y)$ sera d'ordre apparent au plus égal à μ par rapport à y.

Ceci posé, soit $x = a$ un point ne faisant pas partie de l'ensemble **M**

défini au numéro précédent. La fonction $G(a, y)$ est une fonction entière d'ordre apparent μ et à croissance régulière, d'après la proposition précédente. Comme la fonction $H(a, y)$ est d'ordre apparent au plus égal à μ, il en résulte, d'après la proposition du n° 5, que $F(a, y)$ est une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière. Pour un point $x = b$ de M, la fonction $F(b, y)$ sera soit d'ordre apparent μ et à croissance régulière, soit d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, soit d'ordre apparent inférieur à μ, comme on le constate aisément, en utilisant la proposition et la remarque du n° 5. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une fonction entière en x et y, $F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n$ *d'ordre apparent total fini λ, si la fonction $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$, c_n désignant le coefficient maximum de $a_n(x)$, est d'ordre apparent μ et à croissance régulière,* $F(x, y)$ *sera une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel* E *pour lesquels elle sera ou bien une fonction entière d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, ou bien une fonction entière en y d'ordre apparent inférieur à μ.*

Définition. — Si $F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n$ est une fonction entière d'ordre apparent total fini λ telle que la fonction entière en y, $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ [c_n désignant le coefficient maximum de $a_n(x)$] soit d'ordre apparent μ et à croissance régulière, nous dirons pour simplifier le langage que cette fonction $F(x, y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance régulière par rapport à y.

17. Examinons maintenant ce qui se passe lorsque le nombre des zéros des $a_n(x)$ dont le module est au plus égal à R, ne dépasse pas, quel que soit R, le nombre fini N_R, qui peut d'ailleurs croître avec R.

Nous avons vu dans notre Thèse (n° **85**) que si la fonction $f(y)$ était d'ordre apparent μ, $F(x, y)$ était une fonction entière en y d'ordre apparent μ pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble M n'admettant aucun point limite à distance finie pour lesquels $F(x, y)$ était une fonction entière en y d'ordre apparent inférieur à μ. Il n'existe pas de théorème analogue pour la croissance régulière, comme nous allons le montrer par des exemples.

I. Soit $F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n$ une fonction entière en x et y, les $a_n(x)$ étant des polynomes du premier degré en x tels que si c_n désigne le coefficient maximum de $a_n(x)$, la suite des nombres $\frac{-\log|c_n|}{n \log n}$ admette $\frac{1}{\mu}$ comme élément limite unique. Cette fonction $F(x, y)$ sera d'ordre apparent total fini égal à μ et d'ordre apparent μ par rapport à y (*cf.* Thèse, n^{os} **22** et **78**).

Ceci étant, considérons d'une part la suite croissante de nombres entiers :

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \quad \ldots$$

vérifiant la relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log p_{n+1}}{\log p_n} = k > 1,$$

et, d'autre part, l'ensemble dénombrable de nombres :

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots.$$

Supposons que les polynomes $a_n(x)$ dont les indices appartiennent aux intervalles

$$(p_1, p_2), \quad (p_3, p_4), \quad \ldots, \quad (p_{2^n}, p_{2^n+1}), \quad \ldots$$

s'annulent pour $x = a_1$, que les polynomes $a_n(x)$ dont les indices appartiennent aux intervalles

$$(p_2, p_3), \quad (p_5, p_6), \quad \ldots, \quad (p_{2^n+1}, p_{2^n+2}), \quad \ldots$$

s'annulent pour $x = a_2$ et ainsi de suite indéfiniment. Pour tout point $x = a_i$, la fonction $F(x, y)$ sera une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière. En effet, tous les coefficients

des puissances de y dont les exposants appartiennent aux intervalles

$$\ldots \quad (p_{2^n+i-1}, p_{2^n+i}), \quad \ldots$$

sont nuls et la fonction $F(a_i, y)$ se réduit à

$$F(a_i, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{s_n}(a_i) y^{s_n} \qquad [a_{s_n}(a_i) \neq 0 \text{ quel que soit } s_n]$$

avec $\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log s_{n+1}}{\log s_n} = k > 1$. Comme la fonction $F(x, y)$ ainsi construite peut être à croissance irrégulière pour des points n'appartenant pas à l'ensemble D des points $x = a_i$, nous pouvons dire, en tenant compte de notre hypothèse sur les c_n et de la proposition du n° **16**, que cette fonction $F(x, y)$ est une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière pour tous les points du plan des x, sauf pour un ensemble ponctuel comprenant au moins tous les points de l'ensemble dénombrable D, pour lesquels elle est d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière.

II. On peut aller plus loin en montrant qu'il est possible de construire une fonction

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a_{q_n});$$

les c_n vérifiant la condition $\lim_{n=\infty} \frac{-\log |c_n|}{n \log n} = \frac{1}{\mu}$ et les a_{q_n} étant des nombres que nous déterminerons ultérieurement, pour laquelle l'ensemble E a effectivement la puissance du continu.

Considérons à cet effet l'ensemble P des nombres

$$\xi = \frac{\alpha_1}{10^{\varphi(1)}} + \frac{\alpha_2}{10^{\varphi(2)}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^{\varphi(n)}} + \ldots$$

où les α_i sont des nombres entiers inférieurs à 10 (une infinité d'entiers étant toujours supposés différents de zéros) et où $\varphi(n)$ est un nombre entier que nous déterminerons plus loin. Cet ensemble P a la puissance du continu (*cf.* E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 29). De plus, à condition de lui adjoindre le nombre zéro, il est le dérivé d'un certain ensemble dénombrable qu'on peut

obtenir de la manière suivante : rangeons dans un ordre quelconque les nombres $\frac{\alpha_1}{10^{\varphi(1)}}$ $(\alpha_1 \neq 0)$, ce qui est possible puisque ces quantités sont en nombre fini; puis les nombres de la forme $\frac{\alpha_1}{10^{\varphi(1)}} + \frac{\alpha_2}{10^{\varphi(2)}}$ $(\alpha_2 \neq 0)$ et ainsi de suite indéfiniment; nous obtenons donc la suite dénombrable de nombres

$$(a) \qquad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots.$$

Nous supposerons que tous les polynomes du premier degré $a_n(x)$ dont l'indice n vérifie les relations

$$p_n \leq n < p_{n+1} \quad [1]$$

s'annulent pour le point d'abscisse a_n. Il nous reste maintenant à déterminer le nombre $\varphi(n)$. Pour cela nous remarquons que le nombre des quantités de la forme

$$\frac{\alpha_1}{10^{\varphi(1)}} + \frac{\alpha_2}{10^{\varphi(2)}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^{\varphi(n)}}$$

(les α prenant de toutes les façons possibles les valeurs $0, 1, \ldots, 9$, la combinaison $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ étant exclue) est indépendant de $\varphi(n)$. Soit $\theta(n)$ le nombre de ces quantités; d'après nos hypothèses, le nombre $a_{\theta(n)}$ sera le dernier nombre de la suite (a) de la forme $\frac{\alpha_1}{10^{\varphi(1)}} + \frac{\alpha_2}{10^{\varphi(2)}} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^{\varphi(n)}}$ avec $\alpha_n \neq 0$, et de plus il sera le zéro de tous les polynomes $a_n(x)$ dont l'indice n vérifie les relations

$$p_{\theta(n)} \leq n < p_{\theta(n)+1}.$$

Ceci rappelé, nous poserons pour chaque valeur de n :

$$\varphi(n) = p^2_{\theta(n)+1}.$$

Les nombres entiers $\varphi(n)$ étant ainsi déterminés et a_n étant le zéro des polynomes $a_n(x)$ dont les indices n vérifient les relations

$$p_n \leq n < p_{n+1},$$

nous aurons

$$a_n = \frac{\alpha_1}{10^{\varphi(1)}} + \frac{\alpha_2}{10^{\varphi(2)}} + \ldots + \frac{\alpha_m}{10^{\varphi(m)}} \qquad (\alpha_m \neq 0)$$

---

[1] Les nombres p_n vérifient la relation $\lim_{n=\infty} \frac{\log p_{n+1}}{\log p_n} = k > 1$.

avec

$$\varphi(m) \geq p_{n+1}^2.$$

En effet, n sera au plus égal à $\theta(m)$ et par suite p_{n+1} sera au plus égal à $p_{\theta(m)+1}$; comme $\varphi(m) = p_{\theta(m)+1}^2$, on aura donc bien

$$\varphi(m) \geq p_{n+1}^2.$$

Donc la distance de a_n aux points ξ de l'ensemble P dont les m premiers chiffres du développement sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sera inférieure à $\frac{A}{10^{p_{n+1}^2}}$ (A étant une quantité positive fixe).

Il nous est actuellement possible de démontrer que tout point de l'ensemble P est un point pour lequel la fonction $F(x, y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière. Soit à cet effet ξ un point quelconque de P. Ce point ξ est limite d'une suite de points

$$a_{q_1}, \quad a_{q_2}, \quad \ldots, \quad a_{q_n}, \quad \ldots$$

extraite de la suite (a). a_{q_n} étant le zéro des polynomes $a_n(x)$ dont l'indice n vérifie les relations

(14) $$p_{q_n} \leq n < p_{q_{n+1}},$$

la distance de ce point au point ξ considéré sera, d'après ce qui précède, moindre que $\frac{A}{10^{p_{q_{n+1}}^2}}$ avec $n < p_{n+1}$. On en déduit que l'on aura pour toutes les valeurs de n vérifiant la relation (14),

(15) $$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|a_n(\xi)|}{n \log n} = +\infty,$$

en remarquant en outre que pour ces valeurs de n, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|c_n|}{n \log n} = \frac{1}{\mu}.$$

Posons

$$F(\xi, y) = F_1(\xi, y) + F_2(\xi, y),$$

la fonction $F_2(\xi, y)$ comprenant tous les termes de la fonction $F(\xi, y)$ dont les indices vérifient les relations (14) et ceux-là seulement et $F_1(\xi, y)$ étant la somme des termes de $F(\xi, y)$ qui n'entrent pas dans $F_2(\xi, y)$. La fonction $F_1(\xi, y)$ est d'ordre apparent μ et à crois-

sance irrégulière, car tous les termes de cette fonction dont les indices vérifient les relations (14) sont nuls et que de plus $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\log p_{q_{n+1}}}{\log p_{q_n}} = k > 1$. La fonction $F_2(\xi, y)$ est d'ordre apparent zéro en vertu de la relation (15); par suite, d'après la remarque du n° **5**, $F(\xi, y)$ est une fonction entière d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière.

Comme en tout point n'appartenant pas à P, la fonction $F(x, y)$ est une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière, il en résulte que les ensembles E et P sont identiques. Par conséquent, l'ensemble P ayant effectivement la puissance du continu, comme nous l'avons remarqué plus haut, il en sera de même de l'ensemble E.

18. Soit $F(x, y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n$ une fonction entière en x et y d'ordre apparent total fini λ et d'ordre apparent μ et à croissance régulière par rapport à y (μ étant un nombre non entier). Désignons par $r_n(x)$ le module du zéro de rang n de la fonction entière en y, $F(x, y)$. En appliquant la deuxième des propositions de M. E. Borel, rappelées au n° **2** et la proposition du n° **16**, on obtient aisément le résultat suivant :

L'ordre d'infinitude des $r_n(x)$ est déterminé pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel E pouvant avoir la puissance du continu pour lesquels il ne sera plus déterminé.

Remarque sur une classe de fonctions entières de deux variables.

19. Soit $\Phi(x, y) = x^q + a_1(y) x^{q-1} + a_2(y) x^{q-2} + \ldots + a_q(y)$ une fonction entière en x et y d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière par rapport à y. Je dis qu'*il existe une infinité de cercles $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ concentriques à l'origine et de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on a à la fois*

$$|a_1(y)| < e^{|y|^{\mu-\varepsilon}}, \quad |a_2(y)| < e^{|y|^{\mu-\varepsilon}}, \quad \ldots, \quad |a_q(y)| < e^{|y|^{\mu-\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0).$$

Désignons à cet effet par $N(R, r)$ la fonction majorante de $\Phi(x, y)$, c'est-à-dire la fonction définie par la relation

$$N(R, r) = R^q + A_1(r) R^{q-1} + \ldots + A_q(r);$$

$A_i(r)$ étant la fonction majorante de $a_i(y)$, nous avons quel que soit i

$$(16) \qquad A_i(r) < N(R_1, r),$$

R_1 désignant une quantité positive fixe. La fonction $\Phi(x, y)$ étant à croissance irrégulière par rapport à y, il en sera de même de la fonction $N(R, r)$, comme on le vérifie facilement en utilisant le résultat du n° **15** de notre Thèse. Par suite, il existera une infinité de valeurs de r :

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots$$

convergeant vers l'infini et telles que l'on ait

$$N(R_1, r_n) < e^{r_n^{\mu-\eta}} \qquad (\eta > 0).$$

Par conséquent, l'inégalité (16) nous montre que l'on aura pour toutes ces valeurs de r_n et quel que soit l'indice i

$$A_i(r_n) < e^{r_n^{\mu-\eta}} \qquad (\eta > 0),$$

et comme

$$|a_i(y)| \leqq A_i(r),$$

il en résulte que l'on aura pour chaque point des cercles C_n concentriques au point $y = 0$ et de rayon r_n ($n = 1, 2, \ldots$, *ad infinitum*)

$$|a_i(y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}} \qquad (\eta > 0),$$

et cela quel que soit i.

Cas des fonctions $F(x, y) = x - f(y)$.

20. Soit $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière. Désignons par $r_n(x)$ le module du zéro de rang n de la fonction $x - f(y)$, ces zéros étant supposés

rangés d'après la règle de Weierstrass, nous nous proposons d'étudier, comme application de ce qui précède, l'ensemble E des points du plan des x situés à distance finie pour lesquels l'ordre d'infinitude des $r_n(x)$ n'est plus déterminé. Si μ est un nombre non entier, d'après la deuxième des propositions de M. E. Borel rappelées au n° **2**, cet ensemble E ne contiendra aucun point. Il n'en est plus de même si μ est un nombre entier, comme nous allons le montrer dans la suite. Soit q le plus petit nombre entier tel que $\frac{\mu}{q}$ soit un nombre fractionnaire, désignons par ω une racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité et considérons la fonction

$$\begin{aligned}\Phi(x, y^q) &= [x - f(y)][x - f(\omega y)] \ldots [x - f(\omega^{q-1} y)] \\ &= x^q + a_1(y) x^{q-1} + \ldots + a_q(y) \\ &= (c_0 - x)^q + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) y^{q^n},\end{aligned}$$

les $b_n(x)$ étant des polynomes en x de degré $q - 1$ au plus. Si g_n est le coefficient maximum de $b_n(x)$, *je dis que la fonction entière en y, $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n y^{nq}$, est d'ordre apparent μ et à croissance régulière.* Admettons que cette fonction soit ou bien d'ordre apparent inférieur à μ ou bien d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, alors d'après le n° **78** de notre Thèse et le n° **19** du présent travail, il existerait une infinité de cercles concentriques au point $y = 0$ et de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on aurait

$$|a_i(y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}} \qquad (\eta > 0;\ i = 1, 2, \ldots, q).$$

Or ces relations sont impossibles, puisque la fonction $f(y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance régulière (*cf.* n° 4). Il en résulte donc que la fonction $g(y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance régulière. Par suite, si nous posons $y^q = Y$, la fonction $g(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n Y^n$ sera d'ordre apparent $\frac{\mu}{q}$ et à croissance régulière. Par conséquent, d'après la définition donnée au n° **16**, la fonction $\Phi(x, Y)$ sera une fonction entière d'ordre apparent $\frac{\mu}{q}$ et à croissance régulière par

rapport à Y. Désignons par $R_n(x)$ le module du zéro de rang n de la fonction entière en Y, $\Phi(x, Y)$. Comme $\frac{\mu}{q}$ est un nombre non entier, d'après le n° **18**, l'ordre d'infinitude des $R_n(x)$ sera déterminé et égal à $\frac{q}{\mu}$ pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel E pour lesquels cet ordre d'infinitude n'est plus déterminé. Comme pour toute valeur finie de x, $r_n(x) = [R(x)]^{\frac{1}{q}}$, l'ordre d'infinitude des $R_n(x)$ sera déterminé et égal à $\frac{1}{\mu}$ pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel E pour lesquels il ne sera plus déterminé.

21. Inversement, supposons que l'ordre d'infinitude des $r_n(x)$ soit déterminé et égal à $\frac{1}{\mu}$ pour tous les points du plan des x, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel E, je dis que la *fonction $f(y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance régulière.* Admettons que cette fonction soit ou bien d'ordre apparent inférieur à μ ou bien d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière. Il existera au moins une infinité de cercles concentriques au point $y = 0$ et de rayons indéfiniment croissants tels que l'on ait sur chacun d'eux

$$|x - f(\omega^i y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}} \qquad (\eta > 0;\ i = 1, 2, \ldots, q)$$

pour tout point x d'un cercle C concentrique au point $x = 0$ et de rayon R. Alors nous aurons dans les mêmes conditions

$$|\Phi(x, Y)| < e^{|Y|^{\frac{\mu}{q} - \eta'}} \qquad (\eta' > 0,\ Y = y^q),$$

d'où l'on déduit que pour chaque point x de C, la plus grande limite de la suite des nombres $\frac{\log R_n(x)}{\log n}$ est au moins égale à $\frac{1}{\frac{\mu}{q} - \eta'}$ (¹), ce qui est impossible puisque, par hypothèse, cette plus grande limite est égale à $\frac{1}{\frac{\mu}{q}}$ pour un point x au moins du cercle C. Cette contradiction établit la propriété énoncée.

(¹) *Cf.* BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 110

22. Il nous reste encore à montrer que l'ensemble E peut avoir effectivement la puissance du continu. A cet effet, nous considérons la fonction

$$\varphi(y) = \frac{k_0}{1} + \frac{k_1 y}{1} + \frac{k_2 y^2}{1.2} + \ldots + \frac{k_n y^n}{1.2\ldots n} + \ldots \qquad (|k_n| < K;\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

les constantes k_n étant choisies de telle façon que la fonction

$$H(x, y) = e^y x - \varphi(y)$$

soit d'ordre apparent 1 et à croissance régulière par rapport à y pour tous les points du plan des x, sauf pour les points d'un ensemble ponctuel E_1 ayant effectivement la puissance du continu, pour lesquels $H(x, y)$ est une fonction entière en y d'ordre apparent 1 et à croissance irrégulière, ce qui est possible (*cf.* n° **17**). Nous supposons en outre que la constante k_0 ait été choisie de telle manière que le produit $\varphi(y)\varphi(-y)$ soit d'ordre apparent 1 et à croissance régulière, ce qui est également possible d'après le n° **20**. Ceci étant, considérons le produit

$$\begin{aligned}\Psi(x, Y) &= [e^y x - \varphi(y)][e^{-y} x - \varphi(-y)] \\ &= x^2 - [\varphi(y) e^{-y} + \varphi(-y) e^y] + \varphi(y)\varphi(-y) \\ &= x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) y^{2n} \qquad (Y = y^2).\end{aligned}$$

Si g_n est le coefficient maximum de $h_n(x)$, la fonction $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n y^{2n}$ sera d'ordre apparent 1 et à croissance régulière, car s'il n'en était pas ainsi, on en conclurait, en appliquant la proposition du n° **19**, que la fonction $\varphi(y)\varphi(-y)$ est à croissance irrégulière, ce qui est contraire à notre hypothèse. Par suite, la fonction $g(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n Y^n$ est d'ordre apparent $\frac{1}{2}$ et à croissance régulière. Si $R_n(x)$ est le module du zéro de rang n de la fonction entière en Y, $\Psi(x, Y)$, l'ordre d'infinitude des $R_n(x)$ sera déterminé et égal à 2 pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel E pour lesquels il n'est plus déterminé. Je dis que

cet ensemble E a effectivement la puissance du continu. Il suffit pour cela de montrer que tout point $x = a$ de E_1 fait partie de E. La fonction $H(a, y)$ étant d'ordre apparent 1 et à croissance irrégulière, il existe une infinité de cercles concentriques à l'origine et de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on a

$$|H(a, y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}}, \qquad |H(a, -y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}} \qquad (\eta > 0).$$

Par suite, nous aurons pour une infinité de cercles concentriques au point $Y = 0$ et de rayons indéfiniment croissants :

$$|\Psi(a, Y)| < e^{|Y|^{\frac{1}{2}-\eta'}} \qquad (\eta' > 0).$$

Il en résulte que l'ordre d'infinitude des $R_n(a)$ n'est pas déterminé. Donc l'ensemble E_1 est une partie aliquote de E.

Les zéros de la fonction entière en y, $H(x, y)$, sont pour chaque valeur de x identiques aux zéros de la fonction $x - \frac{\varphi(y)}{e^y} = x - h(y)$. Si $r_n(x)$ est le module du zéro de rang n de $x - h(y)$, il s'ensuit, en vertu de la relation $r_n(x)^2 = R(x)$, que l'ordre d'infinitude des $r_n(x)$ est déterminé et égal à 1 pour tous les points du plan des x, sauf pour les points d'un ensemble ponctuel E ayant effectivement la puissance du continu pour lesquels cet ordre d'infinitude n'est plus déterminé. De plus, d'après la proposition du numéro précédent, la fonction $h(y)$ est d'ordre apparent 1 et à croissance régulière. Nous pouvons donc, en tenant compte de ce qui précède et du résultat du n° **20**, énoncer le théorème suivant :

Si $f(y)$ est une fonction entière d'ordre apparent entier et à croissance régulière, l'ordre d'infinitude des $r_n(x)$ est déterminé pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un ensemble ponctuel E *pouvant avoir la puissance du continu, pour lesquels cet ordre d'infinitude n'est plus déterminé.*

La question posée par M. E. Borel à la page 112 de ses *Leçons sur les fonctions entières* est donc résolue dans un cas particulier.

Sur la propagation par ondes et sur le problème de Mayer;

PAR E. VESSIOT.

1. Les pages qui suivent se rattachent aux articles [1] que j'ai publiés sur les conséquences analytiques du principe d'Huygens considéré comme définissant la propagation infinitésimale des ondes dans un milieu à un nombre quelconque de dimensions, et de nature quelconque ; et, en particulier, sur les rapports de cette propagation par ondes avec la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre et des systèmes canoniques, avec le calcul des variations et avec la dynamique analytique.

Le mode de propagation est défini quand on se donne la forme limite vers laquelle tend l'onde émise par un ébranlement produit en un point quelconque, quand la durée de propagation tend vers zéro : c'est ce que nous appelons la *multiplicité d'onde*. Nous appelons *onde élémentaire* l'homothétique de cette multiplicité d'onde, le centre d'homothétie étant le point ébranlé, et le rapport d'homothétie étant la durée infiniment petite dt de la propagation. Dans le cas général où le régime de la propagation est variable, ces multiplicités d'onde et ces ondes élémentaires dépendent de l'instant t de leur émission.

Dans les deux premiers des articles rappelés, j'ai étudié les cas où les ondes élémentaires ont ∞^{n-1} points et ∞^{n-1} plans tangents. Dans le

(1) *Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XXXIV, 1906); *Essai sur la propagation par ondes* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXVI, 1909); *Sur la théorie des multiplicités et le Calcul des variations* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XL, 1912).

troisième, l'étude du problème isopérimétrique général, dit *de Lagrange*, m'avait conduit à considérer le cas où les ondes élémentaires ont $\infty^{n-\alpha-1}$ points, tout en ayant ∞^{n-1} plans tangents ; et j'avais énoncé seulement les résultats, relatifs à ce cas, dont j'avais besoin. Ce cas est le plus général, car, comme je l'avais déjà indiqué, et comme je le montre ici incidemment, si les ondes élémentaires avaient moins de ∞^{n-1} plans tangents, on n'aurait plus affaire à un milieu dans lequel une onde *quelconque* pût se propager.

2. Dans la première Partie du présent travail, je reprends l'analyse de ce cas général : il s'agit même ici du régime variable, tandis que le problème de Lagrange se rattache au cas du régime permanent.

Le système des ondes élémentaires est défini, au point de vue ponctuel, par un système de $(\alpha+1)$ équations, qu'on peut ramener à la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} F\,(t\,|\,x_1,\,\ldots,\,x_n\,|\,dx_1,\,\ldots,\,dx_n) = dt, \\ F_h(t\,|\,x_1,\,\ldots,\,x_n\,|\,dx_1,\,\ldots,\,dx_n) = 0 \qquad (h=1,2,\ldots,\alpha), \end{cases}$$

les premiers membres étant homogènes, de degré un, par rapport aux différentielles. L'origine d'émission de l'onde élémentaire a pour coordonnées $x_1, \ldots, x_n$; l'instant ou date [1] de l'émission est t ; un point courant de l'onde élémentaire a pour coordonnées

$$x_1+dx_1,\quad \ldots,\quad x_n+dx_n.$$

Au point de vue tangentiel, la multiplicité d'onde correspondante, considérée comme enveloppe du plan variable

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n} q_i(X_i - x_i) = 1,$$

est définie par une seule équation

$$(3)\qquad G(t\,|\,x_1,\,\ldots,\,x_n\,|\,q_1,\,\ldots,\,q_n) = 1,$$

[1] Nous nous servirons souvent de ce mot *date*, dont l'emploi a été proposé par M. Fontené (*Géométrie dirigée*, Paris, Nony, 1897, p. 75 ; *Bull. des Sc. math. et phys.*, décembre 1906), et qui est commode pour distinguer les deux acceptions du mot *temps*, instant et durée.

et c'est ce qui fait que les résultats actuels sont analogues à ceux que j'avais obtenus autrefois.

Les *familles d'ondes*, c'est-à-dire les familles de multiplicités de la forme

$$(4) \qquad t = V(x_1, \ldots, x_n)$$

constituées par les états successifs par lesquels passe une onde quelconque dans sa propagation, sont fournies par les solutions de l'équation (3), où l'on interprète $q_1, \ldots, q_n$ comme les dérivées partielles de V,

$$(5) \qquad q_i = \frac{\partial t}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les ondes se propagent par éléments de contact, individuellement considérés; chaque élément de contact se propageant de la même manière, à partir d'un instant donné, quelle que soit l'onde initiale à laquelle il appartienne à cet instant. L'ensemble des positions successives que prend ainsi un élément de contact quelconque, avec les dates de ces positions successives, correspond à une *caractéristique* quelconque de l'équation aux dérivées partielles (3). Les variables $x_1, \ldots, x_n$; $q_1, \ldots, q_n$ sont alors interprétées comme les coordonnées homogènes de l'élément de contact constitué par le point $(x_1, \ldots, x_n)$ et le plan (2).

Le système différentiel des caractéristiques

$$(6) \qquad \partial x_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} dt, \qquad dq_i = -\left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial G}{\partial t}\right) dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

se présente de lui-même, comme définissant la transformation infinitésimale qui correspond à la propagation pendant le temps infiniment petit dt, à partir de l'instant t, transformation dont le symbole s'écrit, avec la notation du crochet de Poisson,

$$(7) \qquad T\mathcal{f} = \frac{\partial \mathcal{f}}{\partial t} + [G, \mathcal{f}].$$

Quant à la *propagation finie*, entre deux instants quelconques t_0 et t, elle a son expression dans une *transformation de contact*; de sorte que le principe des ondes enveloppes peut s'appliquer à la propagation au sens fini du mot, sous la forme la plus générale, et non pas

seulement au sens infinitésimal comme cela avait lieu par hypothèse. Ce résultat renferme, comme cas particulier, la théorie de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, au moyen des intégrales complètes.

Dans le cas du régime permanent, la transformation de contact en question ne dépend que de la durée $(t - t_0)$, et est la transformation générale d'un groupe à un paramètre.

Dans le cas général elle serait définie, suivant la théorie de Lie, par les relations entre $x_1, \ldots, x_n$: $X_1, \ldots, X_n$ qui représentent l'onde émise par un ébranlement produit, à l'instant t_0, au point unique $(x_1, \ldots, x_n)$, dans l'état de propagation où elle se trouve à l'instant t. Cette onde, dont l'onde élémentaire est la forme limite, pour $(t - t_0)$ infiniment petit, peut avoir plus de dimensions que l'onde élémentaire, et même a, en général, ∞^{n-1} points. Ce n'est que dans le cas où l'équation aux dérivées partielles (3) est, comme disait Lie, *semi-linéaire*, ou *pseudo linéaire*, c'est-à-dire où les courbes qui servent de supports aux caractéristiques dépendent seulement de $(2n - 1 - \gamma)$ paramètres arbitraires essentiels, que les ondes issues de points sont des multiplicités à $(n - 1 - \gamma)$ dimensions.

5. Au lieu de laisser l'ébranlement, produit en un point, se propager librement dans toutes les directions autour de ce point, on peut imaginer qu'on le guide dans sa propagation, par exemple au moyen d'un tuyau curviligne de section infiniment petite, dont on supposera que les parois amortissent toute propagation sauf dans le sens de la tangente à l'axe du tuyau. On a ainsi ce qu'on peut appeler *la propagation le long d'une courbe ;* mais si $\alpha > 0$, on ne peut choisir arbitrairement ni la courbe, ni l'instant où l'ébranlement passe en un point arbitraire de la courbe ; car la courbe et la date, à laquelle un quelconque de ses points se trouve ébranlé, doivent satisfaire au *système de Monge* (1), qui peut être quelconque.

Parmi les solutions de ce système figurent celles qui sont constituées par les *trajectoires de la propagation*, c'est-à-dire par le lieu que décrit le point d'un élément de contact quelconque et par la date qui est associée à chaque point de ce lieu. Il se trouve que ces trajectoires correspondent au *minimum de durée de la propagation le*

long d'une courbe, entre deux points de cette courbe, l'ébranlement partant du premier de ces points à un instant donné.

C'est à l'étude de ce problème de minimum, qui n'est qu'un énoncé physique du problème général du calcul des variations, relatif à une seule variable indépendante, désigné généralement sous le nom de *problème de Mayer*, qu'est consacrée la seconde Partie de notre article.

Dans la mise en équations, nous avons suivi la méthode employée dans notre article sur le problème de Lagrange : elle est fondée sur la représentation paramétrique

$$(6) \qquad dx_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

de l'onde élémentaire. On sait que cette méthode a, sur la méthode classique d'intégrations par parties, l'avantage de ne pas donner prise à l'objection de Du Bois Reymond relative à l'introduction, non justifiée, des dérivées secondes. Elle donne aussi la raison pour laquelle doivent intervenir les multiplicateurs de Lagrange : la propagation le long de la courbe, dans le cas du minimum, correspond à la propagation d'un élément de contact d'onde dont l'orientation se trouve précisément définie par ces multiplicateurs. La mise en équations se fait, du reste, indépendamment de ces multiplicateurs.

Pour établir des conditions suffisantes pour le minimum, nous avons fait usage de la méthode, équivalente à la méthode de Weierstrass-Hilbert, déjà utilisée dans nos deux précédents articles. Le champ d'extrémales de Weierstrass, et sa propriété de correspondre à un *Ünabhängigkeit Satz* analogue à ceux de Hilbert, se présentent d'eux-mêmes, quand on considère l'élément de contact d'onde qui se propage le long de la trajectoire considérée comme faisant partie d'une onde d'étendue finie : les trajectoires correspondant aux divers éléments de cette onde constituent le champ ; et la date qui correspond à un point quelconque de l'une de ces trajectoires étant une solution de l'équation aux dérivées partielles (3) s'obtient par une quadrature de différentielle totale qui peut être effectuée suivant toute autre courbe ayant la même origine (datée de même), et la même extrémité que cette trajectoire.

On est ramené ainsi à comparer les intégrales de deux équations différentielles de la forme

$$dt = \mathcal{F}(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n), \tag{7}$$

prises le long d'une même courbe située dans le champ (et voisine de la trajectoire étudiée), avec la même valeur initiale. Dans notre essai sur la propagation par ondes, nous avions introduit l'hypothèse qu'on avait affaire à des fonctions analytiques : nous donnons ici une méthode qui n'introduit que des hypothèses de continuité et de dérivabilité inhérentes au problème lui-même.

La condition s'exprime encore par la concavité de l'onde élémentaire qui a pour origine un point quelconque de la trajectoire, dans le domaine de celui de ses éléments de contact qui est parallèle à l'élément de contact se propageant le long de la trajectoire : cet élément de l'onde élémentaire a, du reste, pour point de contact le point de la trajectoire qui est infiniment voisin du point considéré, dans le sens de la propagation.

Relativement au problème de Mayer, notre exposition suppose que la fonction F, dans les équations (1), est essentiellement positive sur les courbes que l'on considère. Mais on pourrait lever cette restriction en ajoutant à F une différentielle totale convenablement choisie, comme nous l'avons fait dans l'étude du problème de Lagrange.

I. — Propriétés fondamentales de la propagation par ondes.

1. Imaginons un milieu élastique, de propriétés variables avec le temps t, remplissant l'espace à n dimensions, de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$; et admettons que dans ce milieu peuvent se propager des ébranlements de nature déterminée. L'ébranlement produit, à l'instant t, en un point $(x_1, \ldots, x_n)$, s'est transmis, à l'instant $(t + dt)$, à une infinité de points $(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n)$. Prenons les homothétiques de ces points, par rapport au point origine $(x_1, \ldots, x_n)$, et, avec le rapport d'homothétie $\left(\frac{1}{dt}\right)$, nous obtenons *à la limite*, lorsque dt tend vers zéro, la *multiplicité d'onde*, d'origine $(x_1, \ldots, x_n)$, relative à l'instant t.

Soit M l'origine $(x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{\mathrm{MA}}$ un vecteur quelconque, de composantes $a_1, \ldots, a_n$, issu de M. En séparant au besoin la multiplicité d'onde en arcs ou nappes, on peut admettre que sur la direction $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$, il y a *au plus* un point P de cette multiplicité, qui sera défini par le rapport positif $\rho = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MA}}$, et donné par une équation

$$(1) \qquad \rho = \mathrm{F}(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_n),$$

les quantités $a_1, \ldots, a_n$ étant liées, si la multiplicité d'onde contient $\infty^{n-1-\alpha}$ points, par des équations de condition

$$(2) \qquad \mathrm{F}_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Ces formules doivent subsister si l'on change le vecteur $\overline{\mathrm{MA}}$, sans changer sa direction, c'est-à-dire si l'on remplace $a_1, \ldots, a_n$ et ρ par $ma_1, \ldots, ma_n$ et $m\rho$, où m est un nombre *positif* quelconque. Donc F est une fonction positive [1], *positivement homogène* par rapport à ses arguments $a_1, \ldots, a_n$; et les fonctions F_h sont positivement homogènes. Le degré d'homogénéité de F est 1; et l'on peut supposer qu'il en est de même pour les F_h [2].

Si l'on prend, pour point A, le point P lui-même, en désignant par $p_1, \ldots, p_n$ ses coordonnées dans le système de coordonnées, parallèle au système général $x_1, \ldots, x_n$, qui a le point M pour origine, on a $\rho = 1$, et l'on obtient les équations de la multiplicité d'onde sous la forme

$$(3) \qquad \mathrm{F}(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 1,$$

$$(4) \qquad \mathrm{F}_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

2. Ces équations étant supposées données, on a, *aux infiniment petits près du second ordre* [3], le lieu des points

$$(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n)$$

---

[1] Au moins pour les directions que l'on aura à considérer.

[2] Il n'y a rien là d'essentiel. Dans notre article du *Bulletin de la Société mathématique*, t. XL, 1912, nous avions supposé les F_h de degré zéro.

[3] Pour plus de précision sur ce point, *cf.* notre article : *Essai sur la propagation par ondes* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXVI, 1909, p. 409).

auxquels s'est transmis, à l'instant $(t + dt)$, l'ébranlement produit en $(x_1, \ldots, x_n)$, à l'instant t, si l'on reprend l'homothétique de la multiplicité d'onde, dans le rapport dt, par rapport à son origine $(x_1, \ldots, x_n)$. On obtient ainsi l'*onde élémentaire*, définie par les équations

$$(5) \qquad F\,(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = dt,$$

$$(6) \qquad F_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

où $dx_1, \ldots, dx_n$ peuvent être considérés comme des coordonnées courantes, dans le système de coordonnées d'origine $(x_1, \ldots, x_n)$.

Ces équations, au point de vue différentiel, constituent un système de Monge, qui, à part la condition de signe imposée à F, et le caractère positif de l'homogénéité de F et de F_h, peut être quelconque, pourvu qu'il soit résoluble par rapport à dt. La variable t y doit jouer en effet, un rôle spécial.

Une solution quelconque de ce système est constituée par une courbe

$$(7) \qquad x_i = \psi_i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et par une correspondance entre les points de cette courbe et les valeurs correspondantes du temps t

$$(8) \qquad t = \psi(u).$$

C'est ce qu'on pourra appeler une courbe *datée* [1]. Nous désignerons par la lettre (C) l'une quelconque de ces courbes.

Une courbe (C) étant considérée comme un tube infiniment mince, dont les parois amortissent instantanément les ébranlements considérés, un ébranlement produit en un point $u = u_0$ de cette courbe pourra se propager dans ce tube, c'est-à-dire *le long de cette courbe* (C), pourvu qu'il soit produit précisément à l'instant $t_0 = \psi(u_0)$. Et la formule (8) donnera la loi numérique de cette propagation.

Si cependant les équations (6) sont indépendantes de t, la courbe (C)

---

[1] Ces courbes satisfont au système différentiel obtenu en éliminant t entre les équations (5) et (6). Ce système comprend, en général, $(\alpha - 1)$ équations de Monge, et une équation du second ordre. Il se réduit au système de Monge (6), dans le cas particulier où t ne figure pas dans ces équations (6).

sera capable de conduire un ébranlement produit en un quelconque de ses points à un instant quelconque. Dans ce cas la valeur de t, pour un point courant de la courbe, s'obtiendrait en intégrant l'équation différentielle (5), et sa valeur initiale sera arbitraire, lorsqu'on se donne la courbe elle-même. Dans tout autre cas, cette valeur t est donnée sans intégration par l'une des équations (6).

Observons encore qu'il ne sera pas loisible, en général, de changer, dans les équations (5) et (6), $dx_1, \ldots, dx_n$, en $-dx_1, -dx_2, \ldots, -dx_n$. De sorte que l'ébranlement ne pourra se propager sur la courbe (C) que dans un sens déterminé. Analytiquement, c'est le sens dans lequel doit varier u, dans la formule (8), pour que $t = \psi(u)$ aille en croissant : il résulte, du reste, de l'hypothèse faite sur F (à savoir qu'elle reste positive pour les déplacements considérés), que la fonction t varie effectivement en croissant sur (C).

5. Supposons, maintenant, qu'à l'instant t tous les points d'une multiplicité (S) soient simultanément ébranlés : on a ainsi une *onde*, qui se propagera, par une nouvelle hypothèse, conformément au *principe infinitésimal des ondes enveloppes* ([1]). Nous entendons par là que l'enveloppe (Σ') des ondes élémentaires issues des divers points de (S), (à l'instant t), représente, aux infiniment petits près d'ordre supérieur, l'état (S') de l'onde à l'instant $(t+dt)$.

Le terme d'enveloppe doit être pris ici au sens général de la théorie des multiplicités, c'est-à-dire que les éléments de contact de l'enveloppe sont empruntés aux éléments de contact des enveloppées.

Cherchons cette enveloppe (Σ'). Soit, à cet effet, $(x_1, \ldots, x_n)$ un point quelconque M de (S). A un point quelconque

$$x_1 + X_1, \quad \ldots \quad x_n + X_n$$

de l'onde élémentaire qui a ce point M pour origine correspond, par les formules

$$X_i = P_i\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

un point $(x_1 + P_1, \ldots, x_n + P_n)$ de la multiplicité d'onde (3), (4). En

([1]) Cf. *loc. cit.*, p. 409-412.

ces deux points homologues de l'onde élémentaire et de la multiplicité d'onde, les éléments de contact sont parallèles, et l'on peut définir [1] leur direction commune par les formules

$$(10) \qquad Q_i = \frac{\partial f}{\partial P_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on pose

$$(11) \quad f(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid P_1, \ldots, P_n) = F(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid P_1, \ldots, P_n) + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid P_1, \ldots, P_n).$$

On peut ainsi considérer $(P_1, \ldots, P_n; Q_1, \ldots, Q_n)$ comme les coordonnées d'un élément de contact quelconque de l'onde élémentaire : et ces coordonnées satisfont à l'équation

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i = 1.$$

L'un au moins de ces éléments de contact appartient à l'enveloppe (Σ) ; et nous réservons maintenant la notation

$$(P_1, \ldots, P_n; Q_1, \ldots, Q_n),$$

pour un tel élément. Alors, à toute variation $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ du point M sur (S), correspondent des variations $(\delta P_1, \ldots, \delta P_n)$ telles que le point de coordonnées $(x_i + P_i dt) + \delta(x_i + P_i dt)$ reste sur l'élément de contact $(P_1, \ldots, P_n; Q_1, \ldots, Q_n)$, c'est-à-dire qui satisfont à la condition

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n} Q_i(\delta x_i + \delta P_i dt) = 0.$$

Mais, d'autre part, puisque le point $(x_1 + P_1, \ldots, x_n + P_n)$ est sur la multiplicité d'onde, il satisfait aux équations (3) et (4), d'où l'on

[1] Pour ce qui concerne la Géométrie analytique des multiplicités, nous renverrons à notre article du *Bulletin de la Société mathématique*, t. XL, 1912, plus spécialement ici page 78.

tire, par différentiation, les relations

$$(14)\qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial F}{\partial P_i}\delta P_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_h}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial F_h}{\partial P_i}\delta P_i\right) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha), \end{cases}$$

et en combinant ces relations on obtient

$$(15)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f}{\partial P_i}\delta P_i\right) = 0,$$

ce qu'on peut écrire, à cause des formules (10),

$$(16)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i + Q_i\,\delta P_i\right) = 0.$$

En multipliant cette équation par dt et la retranchant de (13), il reste

$$(17)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}dt\right)\delta x_i = 0.$$

Une telle équation a donc lieu, dès que la variation $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ se fait dans un élément de contact de (S), contenant le point

$$(x_1, \ldots, x_n).$$

Désignons par $(q_1, \ldots, q_n)$ les coefficients de direction d'un tel élément. Le résultat obtenu équivaut à dire qu'il lui correspond un élément de contact de (Σ') tel que l'équation (17) soit conséquence de l'équation de condition

$$(18)\qquad \sum_{i=1}^{n} q_i\,\delta x_i = 0,$$

c'est-à-dire tel qu'on ait, m désignant un facteur convenable,

$$(19)\qquad Q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}dt + m q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

4. Ces formules montrent d'abord que, si dt tend vers zéro, cet élément de contact de (Σ') tend vers l'élément de contact considéré de (S). Car, à cause de la relation (12), on ne peut supposer que m devienne nul. Or, cet élément de contact de (Σ') est parallèle à un élément de contact de la multiplicité d'onde qui a M pour origine. Donc, il ne peut y avoir propagation de l'onde considérée que si tout élément de contact de (S) est parallèle à un élément de contact de la multiplicité d'onde correspondante. Si donc on veut que l'onde origine (S) puisse être quelconque, c'est-à-dire qu'en chaque point M l'orientation $(q_1, \ldots, q_n)$ de l'élément de contact considéré ne soit restreinte par aucune équation de condition (homogène) entre ses coefficients $(q_1, \ldots, q_n)$, il faut que la multiplicité d'onde ait des éléments de contact d'orientation arbitraire.

Or, les quantités $(Q_1, \ldots, Q_n)$ sont liées par les équations qu'on obtient en éliminant $(P_1, \ldots, P_n)$ entre les équations (10) et les équations de condition

$$(20)\qquad \begin{cases} F\,(t\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,P_1, \ldots, P_n) = 1, \\ F_h(t\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,P_1, \ldots, P_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha). \end{cases}$$

Les équations ainsi obtenues définissent le *support tangentiel* [1] de la multiplicité d'onde. Une d'elles n'est pas homogène, et peut s'écrire [2]

$$(21)\qquad G(t\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,Q_1, \ldots, Q_n) = 1,$$

G étant homogène, de degré 1, en $Q_1, \ldots, Q_n$. Mais les autres, s'il y en avait, pourraient s'écrire sous forme homogène en $Q_1, \ldots, Q_n$, et constitueraient une limitation à la liberté d'orientation des éléments de contact.

Nous concluons donc que *la propagation n'est possible pour une onde arbitraire que si le support tangentiel de la multiplicité d'onde est défini par une seule équation, c'est-à-dire si ce support tangentiel a $n-1$ dimensions.*

C'est ce que nous supposerons désormais. Et nous supposerons, en

---

(1) Cf. *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XL, 1912, p. 74.

(2) Cf. *Ibid.*, p. 78.

outre, que les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n)$ de tout élément de contact, considéré à l'instant t, soient, par définition, liées par l'équation de condition

$$G(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n) = 1. \tag{22}$$

5. Alors, quand dt tend vers zéro, Q_i tend vers q_i, et, dans les formules (19), m tend vers 1.

Il résulte, de plus, des équations (10) et (20), que $P_1, \ldots, P_n$ sont alors déterminés en fonction de $Q_1, \ldots, Q_n$; on peut même écrire les formules qui les donnent, quand on a introduit l'équation (21). Ce sont ([1])

$$P_i = \frac{\partial G(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid Q_1, \ldots, Q_n)}{\partial Q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Nous désignerons par $p_1, \ldots, p_n$ les quantités analogues

$$p_i = \frac{\partial G(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n)}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{24}$$

On voit alors que P_i tend aussi vers p_i, quand dt tend vers zéro.

En définitive, nous avons déterminé sur (Σ') un élément de contact qui tend, lorsque dt tend vers zéro, vers l'élément de contact

$$(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n)$$

de (S). La variation infinitésimale correspondante se déduit des équations (9), (19), en y remplaçant : X_i par dx_i, P_i par $p_i + dp_i$, Q_i par $q_i + dq_i$, m par $1 + dm$, et supprimant les termes infiniment petits du second ordre. On a donc le système de formules

$$dx_i = p_i\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{25}$$

$$dq_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} dt + q_i\, dm \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{26}$$

où f doit désigner maintenant la fonction

$$f = F(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n). \tag{27}$$

([1]) Cf. *loc. cit.*, p. 79.

Pour ne pas compliquer les notations, nous avons gardé les lettres λ_h pour désigner les valeurs limites des quantités représentées par les mêmes lettres dans les formules (10).

Enfin, les équations (20) et (10) donnent, à la limite,

$$F(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 1, \tag{28}$$

$$F_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha) \tag{29}$$

et

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{30}$$

Il ne reste plus qu'à calculer dm, ce qui se fait en différentiant l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i = 1, \tag{31}$$

qui provient aussi de (12) par le même passage à la limite. Cela donne

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dt + dm + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i = 0, \tag{32}$$

en tenant compte de (26) et (30). Si l'on a égard aux équations (25), on en tire

$$dm = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i. \tag{33}$$

Or on tire encore des relations (28) et (29), en les différentiant, la combinaison

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i = 0. \tag{34}$$

Il reste donc simplement, pour dm, la valeur

$$dm = \frac{\partial f}{\partial t} dt, \tag{35}$$

qui permet d'écrire les équations (26) sous leur forme définitive

$$dq_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{36}$$

6. En résumé, *si la propagation est possible*, telle qu'elle a été définie au moyen du principe de Huygens, entendu au sens infinitésimal, elle se traduit par une variation continue des éléments de contact de l'espace, qui est définie par les formules (25), (28), (29), (30), (36).

Récrivons ici ces formules, en éliminant les quantités auxiliaires $p_1, \ldots, p_n$; et en désignant par f, ce que devient la fonction (27) quand on y remplace les p_i par les dx_i. Nous avons le système différentiel

(37) $$\mathrm{F}\,(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = dt,$$

(38) $$\mathrm{F}_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

(39) $$q_i = \frac{\partial f}{\partial\, dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(40) $$dq_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

avec

(41) $$f \equiv \mathrm{F} + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h \mathrm{F}_h.$$

Ce système contient les α inconnues auxiliaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$, et les inconnues $x_1, \ldots, x_n$; $q_1, \ldots, q_n$. Il est donc surabondant, car il contient $(2n + \alpha + 1)$ équations. Mais la relation (20), qu'il entraîne, est vérifiée, d'après la manière dont nous sommes arrivé aux équations (36), dès qu'elle se trouve satisfaite par les valeurs initiales de $x_1, \ldots, x_n$; $q_1, \ldots, q_n$ et t. Elle disparaît donc en fait; et après élimination de $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$, on doit obtenir un système de $2n$ équations différentielles du premier ordre à $2n$ inconnues.

On y arrive en se servant des relations connues entre les équations qui définissent une même multiplicité, suivant qu'on part de son *support ponctuel* ou de son *support tangentiel* [1]. Le support tangentiel étant défini par l'équation (22), les formules (28), (29) et (30) se remplacent par l'équation (22) et les équations

(42) $$p_i = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

[1] Cf. *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XL, 1912, p. 78-80.

et l'on a de plus

$$(43) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial G}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial G}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On obtient donc le système différentiel cherché sous la forme résolue

$$(44) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(45) \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial x_i} - q_i \frac{\partial G}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut le considérer comme définissant une *transformation infinitésimale* en $t, x_1, \ldots, x_n, q_1, \ldots, q_n$ qui est l'expression définitive de la propagation considérée, à savoir

$$(46) \qquad T\mathcal{F} \equiv \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial G}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i} \right].$$

On vérifie immédiatement qu'elle laisse invariante l'équation (22), car on a l'identité

$$(47) \qquad T(G-1) = -\frac{\partial G}{\partial t}(G-1).$$

Il suffit d'observer que, G étant homogène de degré *un* en $q_1, \ldots, q_n$, on peut lui appliquer l'identité d'Euler.

Comme on ne doit opérer que sur des valeurs des variables vérifiant cette équation (22), on pourrait encore substituer à la transformation (46), la suivante

$$(48) \qquad T'\mathcal{F} = [G, \mathcal{F}] \equiv \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial G}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial G}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i} \right],$$

où le second membre est le crochet de Poisson.

7. On démontre que la propagation est possible, en vérifiant que *la transformation* T *est une transformation de contact*. Cela résulte

de l'identité suivante [1] :

$$\mathrm{T}\left(\sum_{i=1}^{n} q_i \delta x_i\right) = -\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} q_i \delta x_i. \tag{49}$$

Il résulte de plus de ce fait que *le principe des ondes enveloppes est vrai, non seulement au sens infinitésimal, mais au sens fini du mot*, et sous sa forme la plus générale [2]. En particulier une onde qui, à l'instant t, occupait une position (S), est, à un instant ultérieur quelconque t', l'enveloppe des ondes qui auraient été émises [3], au bout de cet intervalle de temps t à t', par les divers points de (S).

8. Nous appelons *famille d'ondes* l'ensemble des divers états successifs par lesquels passe une onde dans la propagation. Une telle famille est représentée par une équation

$$t = \mathrm{V}(x_1, \ldots, x_n). \tag{50}$$

Les éléments de contact de l'onde sont, en même temps, donnés par les formules

$$q_i = q_0 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{51}$$

où q_0 est un facteur déterminé par la condition (22). Posons

$$\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}\left(\mathrm{V} \mid x_1, \ldots, x_n \mid \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_n}\right), \tag{52}$$

et nous obtenons, à cause de l'homogénéité de G, la condition

$$q_0 \overline{\mathrm{G}} = 1. \tag{53}$$

Cela posé, nous allons exprimer que le système (50), (51) admet

---

(1) Le calcul de cette identité est indiqué dans notre Mémoire, cité plus haut, des *Annales de l'École Normale*, p. 422.

(2) C'est ce que nous avons expliqué dans le Mémoire cité dans la Note précédente, (p. 429). Nous y avons développé les conséquences de ce fait, au point de vue des théories d'intégration des équations aux dérivées partielles.

(3) Observons que ces dernières ondes, dont les ondes élémentaires donnent la forme limite, peuvent avoir plus de $\infty^{n-1-\alpha}$ points. Cf. *Bull. Soc. math.*, p. 131.

la transformation T : cela nous donnera le caractère analytique des familles d'ondes (50).

En appliquant d'abord la transformation à l'équation (50), nous obtenons la condition nécessaire

$$(54)\qquad 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}=0.$$

qui, à cause de l'homogénéité (de degré zéro) des dérivées $\frac{\partial G}{\partial q_i}$, peut s'écrire

$$(55)\qquad 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \overline{G}}{\partial\frac{\partial V}{\partial x_i}}\frac{\partial V}{\partial x_i}=0,$$

c'est-à-dire simplement

$$(56)\qquad G\left(V\,|\,x_1,\ldots,x_n\,|\,\frac{\partial V}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)=1.$$

On voit alors, par (53), que q_0 doit avoir la valeur *un*, et que les équations (51) se réduisent à

$$(57)\qquad q_i=\frac{\partial V}{\partial x_i}\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Or, si l'on applique maintenant la transformation T aux équations (57), on obtient les équations

$$(58)\qquad \frac{\partial G}{\partial x_i}+q_i\frac{\partial G}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}=0\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

qui doivent être des conséquences des équations (50) et (57). Cela s'exprime par les identités

$$(59)\qquad \frac{\partial \overline{G}}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial \overline{G}}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \overline{G}}{\partial\frac{\partial V}{\partial x_j}}\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial x_j}}{\partial x_i}=0\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

qui sont des conséquences de (56).

L'équation aux dérivées partielles (56) est donc la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (50) soit celle d'une

famille d'ondes; et les coordonnées des éléments de contact des ondes de cette famille sont données par les formules (57).

9. Nous appelons *caractéristique* toute solution du *système canonique* (44), (45), qui vérifie aussi la condition (22). Une caractéristique est constituée par une courbe (C), datée (*cf.* n° 2), à chaque point de laquelle est associé un élément de contact. Nous appelons *trajectoire* toute courbe datée qui sert de support à une caractéristique.

Les trajectoires satisfont au système différentiel qu'on déduirait du système (37), (38), (39), (40) en éliminant les q_i et les λ_h. On peut facilement éliminer les q_i, ce qui donne les équations

$$d\frac{\partial f}{\partial dx_i} - \frac{\partial f}{\partial dx_i}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{60}$$

Ce système caractérise les trajectoires, parmi toutes les solutions du système (5), (6), considéré au n° 2.

Remarquons que la détermination du mouvement de propagation qui est défini par une famille donnée de multiplicités d'ondes équivaut à la détermination des caractéristiques. Celle-ci entraîne par suite la connaissance de toutes les familles d'ondes; ce fait équivaut à la méthode d'intégration de l'équation aux dérivées partielles (56) au moyen de ses caractéristiques.

Toute caractéristique intervient dans la construction d'une infinité de familles d'ondes; car il suffit pour cela que l'un de ses éléments de contact fasse partie de l'onde, à l'instant correspondant.

Inversement toute famille d'ondes fournit, par l'intégration du système

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \overline{G}}{\partial \frac{\partial V}{\partial x_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{61}$$

[où $\overline{G}$ représente la fonction (52)], une famille de trajectoires auxquelles les ondes de la famille sont dites *transversales*. Les formules (57) achèvent de définir la famille des caractéristiques correspondantes, c'est-à-dire qui serviraient à la génération de cette famille d'ondes. Les valeurs de $x_1, \ldots, x_n, t$, pour chacune de ces trajectoires,

doivent, de plus, satisfaire à l'équation (50), qui est, à cause de l'équation (56), compatible avec le système (61).

Signalons enfin l'équation

$$dt - \sum_{i=1}^{n} q_i\, dx_i = 0, \tag{62}$$

combinaison des équations (44), quand on tient compte de l'équation (22), à laquelle, par conséquent, satisfont les caractéristiques.

II. — Le problème de Mayer.

10. On retrouve les trajectoires et les caractéristiques de la propagation quand *on cherche les courbes* (C) — [*cf.* n° **2**] — *le long desquelles un ébranlement se propage le plus rapidement*. C'est ce problème de minimum, qui n'est autre que celui qu'on désigne, dans le Calcul des variations, sous le nombre de *problème de Mayer* (¹), que nous allons étudier. Précisons-en d'abord l'énoncé.

Nous considérons une solution (7), (8) du système de Monge (5), (6), et nous la faisons varier sans qu'elle cesse d'être une solution de ce système, de manière que la courbe (C) représentée par les équations (7) passe toujours par les deux mêmes points M_0 et M_1, de coordonnées $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$; nous pouvons supposer que ces points correspondent, sur les différentes courbes ainsi obtenues, à des valeurs fixes, u_0 et u_1, du paramètre u. Nous supposons, de plus, que la fonction (8) garde, dans cette variation, une valeur constante t_0, au point M_0 ; et que, de M_0 en M_1, t aille en croissant. Au contraire la valeur t_1, qui correspond au point M_1 variera en général. La différence $(t_1 - t_0)$ représente le temps que met un ébranlement produit en M_0 au temps t_0, pour se propager, le long de la courbe (C), jusqu'en M_1. Cette durée sera minima en même temps que t_1 : et ce sont les conditions de ce minimum qu'il s'agit de chercher.

Nous chercherons d'abord les conditions qui expriment que la variation de t_1 est nulle, dans les conditions indiquées.

(¹) *Cf.* Hadamard, *Leçons sur le Calcul des variations*, t. I, p. 223.

Nous poserons, à cet effet,

(63) $$\frac{dt}{du} = \omega,$$

(64) $$\frac{dx_i}{du} = \omega p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que les variables $p_1, \ldots, p_n$; $x_1, \ldots, x_n$; t sont liées par des équations de condition

(67) $$F\,(t \,|\, x_1, \ldots, x_n \,|\, p_1, \ldots, p_n) = 1,$$

(68) $$F_h(t \,|\, x_1, \ldots, x_n \,|\, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Ces équations représentent, en $p_1, \ldots, p_n$, la multiplicité d'onde — [*cf.* n° **1**, équations (3) et (4)] —. Et, si nous introduisons l'équation qui en représente le support tangentiel — [*cf.* n° **4**, équation (21) ou (22)] —, nous pouvons les remplacer par des équations paramétriques — [équations (23) ou (24) du n° **5**]. Posons, pour plus de clarté,

(69) $$G' \equiv G(t \,|\, x_1, \ldots, x_n \,|\, \gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

et ces équations paramétriques s'écriront

(70) $$p_i = \frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Comme les seconds membres sont homogènes, de degré zéro, en $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, on peut considérer ces paramètres comme complètement indépendants [1].

Nous avons donc, en définitive, des fonctions de u : t; $x_1, \ldots, x_n$; ω; $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, liées par les équations différentielles

(71) $$\frac{dt}{du} = \omega,$$

(72) $$\frac{dx_i}{du} = \omega \frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1] Cf. *Bulletin de la Soc. math.*, t. XL, 1912, p. 79-80. Remarquons que $(p_1, \ldots, p_n ; \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ sont les coordonnées *homogènes* d'un élément de contact de la multiplicité d'onde, rapportée à son origine $(x_1, \ldots, x_n)$. L'expression générale des γ_i serait donnée par les seconds membres des formules (99); où l'on considérerait $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ comme des fonctions de u, arbitrairement choisies. Dans le calcul qui suit, on doit supposer qu'on a fait un choix particulier, *quelconque*, pour ces fonctions auxiliaires.

Leurs variations sont, par suite, définies par le système linéaire

$$(73)\qquad \frac{d\,\delta t}{du} = \delta\omega,$$

$$(74)\qquad \frac{d\,\delta x_i}{du} = \omega\frac{\partial^2 G'}{\partial\gamma_i\,\partial t}\delta t + \omega\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 G'}{\partial\gamma_i\,\partial x_j}\delta x_j + \frac{\partial G'}{\partial\gamma_i}\delta\omega + \omega\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 G'}{\partial\gamma_i\,\partial\gamma_j}\delta\gamma_j.$$

Pour intégrer ce système, nous considérons le système homogène (¹)

$$(75)\qquad \begin{cases} \dfrac{du_0}{du} = 0, \\ \dfrac{du_i}{du} = \omega\dfrac{\partial^2 G'}{\partial\gamma_i\,\partial t}u_0 + \omega\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2 G'}{\partial\gamma_i\,\partial x_j}u_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

et, introduisant $(n+1)$ solutions, indépendantes, de ce système,

$$(76)\qquad u_k = u_{l,k} \qquad (k, l = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

nous posons :

$$(77)\qquad \delta t = \sum_{l=0}^{n} y_l u_{l,0},$$

$$(78)\qquad \delta x_i = \sum_{l=0}^{n} y_l u_{l,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous obtenons ainsi le système linéaire simplifié,

$$(79)\qquad \sum_{l=0}^{n} u_{l,0}\frac{dy_l}{du} = \delta\omega,$$

$$(80)\qquad \sum_{l=0}^{n} u_{l,i}\frac{dy_l}{du} = \frac{\partial G'}{\partial\gamma_i}\delta\omega + \omega\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 G'}{\partial\gamma_i\,\partial\gamma_j}\delta\gamma_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(¹) L'existence des intégrales de ce système suppose seulement la continuité des fonctions t, $x_1, \ldots, x_n$, de u, et de leurs dérivées $\omega, p_1, \ldots, p_n$; ainsi que la continuité des dérivées de la fonction G qui interviennent. Car cela suffit pour que les conditions de Lipschitz soient vérifiées par les seconds membres.

On ne suppose donc pas que les fonctions t et x aient des dérivées secondes; et le raisonnement ne prête pas prise, par suite, à *l'objection classique de Du Bois Reymond.*

Les formules (97) montrent, au contraire, que, *pour les extrémales*, ces dérivées secondes existent nécessairement.

que l'on résout en employant les multiplicateurs — (*système adjoint* des $u_{l,k}$) — définis par les relations

$$\sum_{l=0}^{n} u_{l,k} v_{l,m} = \varepsilon_{k,m} \qquad (k, m = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{81}$$

où $\varepsilon_{k,m}$ est égal à 1 ou à 0, suivant que $k = m$ ou $k \neq m$.

On obtient donc le système auxiliaire

$$\frac{dy_l}{du} = Y_l \equiv \left(v_{l,0} + \sum_{i=1}^{n} v_{l,i} \frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} \right) \delta\omega + \omega \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} v_{l,i} \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \delta\gamma_j. \tag{82}$$
$$(l = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

De plus, d'après les formules (77) et (78), où le déterminant des $u_{l,k}$ n'est pas nul, la condition nécessaire et suffisante pour que $\delta t, \delta x_1, \ldots, \delta x_n$ s'annulent pour $u = u_0$ est qu'il en soit de même des y_l. On a donc, pour les variations $\delta t, \delta x_1, \ldots, \delta x_n$, les formules

$$(83)\quad \begin{cases} \delta t = \sum_{l=0}^{n} u_{l,0} \int_{u_0}^{u} Y_l \, du, \\ \delta x_i = \sum_{l=0}^{n} u_{l,i} \int_{u_0}^{u} Y_l \, du \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

qui deviennent, pour $u = u_1$, en désignant les valeurs que prennent alors les fonctions de u par un indice (1),

$$(84)\quad \begin{cases} (\delta t)^{(1)} = \int_{u_0}^{u_1} \sum_{l=0}^{n} u_{l,0}^{(1)} Y_l \, du, \\ (\delta x_i)^{(1)} = \int_{u_0}^{u_1} \sum_{l=0}^{n} u_{l,i}^{(1)} Y_l \, du \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

11. Nous avons donc à écrire que la première de ces intégrales est nulle, pour tout choix des fonctions de u : $\delta\omega, \delta\gamma_1, \ldots, \delta\gamma_n$, pour lequel les n dernières intégrales s'annulent. Comme les quantités placées devant du, sous les signes d'intégration, sont des formes linéaires en $\delta\omega, \delta\gamma_1, \ldots, \delta\gamma_n$ dont les coefficients sont des fonctions con-

nues de u, cela s'exprime [1] par une identité — (en $u, \delta\omega, \delta\gamma_1, \ldots, \delta\gamma_n$) —, à coefficients constants $c_0, c_1, \ldots, c_n$, où c_0 ne doit pas être nul,

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{l=0}^{n} u_{l,k}^{(1)} \mathrm{Y}_l = 0. \tag{85}$$

Si l'on pose

$$\sum_{k=0}^{n} c_k u_{l,k}^{(1)} = c'_l \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{86}$$

$$\sum_{l=0}^{n} c'_l v_{l,m} = v_l \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{87}$$

cette identité se décompose en

$$v_0 + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathrm{G}'}{\partial \gamma_i} = 0, \tag{88}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial^2 \mathrm{G}'}{\partial \gamma_i \, \partial \gamma_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{89}$$

De plus, les constantes c_k se calculent en fonction des constantes c'_l, en employant pour multiplicateurs les valeurs $v_{l,m}^{(1)}$ que prennent les fonctions $v_{l,m}$ de u, pour $u = u_1$. Cela donne, en tenant compte des formules (89),

$$c_k = \sum_{l=0}^{n} c'_l v_{l,k}^{(1)} = v_k^{(1)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{90}$$

L'hypothèse $c_0 \neq 0$ se traduit donc par $v_0^{(1)} \neq 0$.

Enfin les formules (89) expriment que $v_0, v_1, \ldots, v_n$ constituent une solution du *système linéaire adjoint* au système (75), qui est

$$\frac{dv_0}{du} + \omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathrm{G}'}{\partial \gamma_i \, \partial t} v_i = 0, \tag{91}$$

$$\frac{dv_j}{du} + \omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathrm{G}'}{\partial \gamma_i \, \partial x_j} v_i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{92}$$

---

[1] Cf. *Bull. de la Soc. math.*, t. XL, 1912, p. 120.

Nous obtenons donc pour condition que *ce système adjoint doit admettre une* (¹) *solution qui satisfasse aux équations* (88), (89), *et telle que la valeur de v_0 ne s'annule pas pour $u = u_1$.*

12. Eu égard à l'équation (71), le système (91), (92) s'écrit

$$\frac{dv_0}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \, \partial t} v_i = 0 \tag{93}$$

$$\frac{dv_j}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \, \partial x_j} v_i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{94}$$

Quant aux équations (88) et (89), elles expriment que le plan qui a pour équation, dans le système de coordonnées d'origine $(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\sum_{i=1}^{n} v_i X_i + v_0 = 0 \tag{95}$$

est tangent à la multiplicité d'onde au point $(p_1, \ldots, p_n)$. Car, à cause des équations (70), l'équation (88) exprime que ce plan passe par ce point, et les équations (89) expriment que tout déplacement de ce point sur la multiplicité d'onde est parallèle à ce plan.

Au point de vue des inconnues auxiliaires $v_0, v_1, \ldots, v_n$, ces équations peuvent donc se remplacer par les suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} v_i p_i + v_0 = 0 \qquad (v_0^{(1)} \neq 0), \tag{96}$$

$$p_i = \frac{\partial G''}{\partial v_i} \qquad [G'' \equiv G(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid v_1, \ldots, v_n)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{97}$$

On peut alors se débarrasser des inconnues auxiliaires γ_i; car, en comparant (70) et (97), on a les équations

$$\frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial G''}{\partial v_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{98}$$

(¹) Il peut arriver qu'il en admette une infinité, dès qu'il en admet une. C'est le cas où l'équation aux dérivées partielles (56) admet moins de ∞^{2n-1} caractéristiques. Cf. *Bull. de la Soc. math.*, t. XL, 1912, p. 110.

qu'on peut considérer comme définissant les v_i comme fonctions des γ_i, de $t, x_1, \ldots, x_n$, et de $(\alpha+1)$ variables auxiliaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$, toutes ces variables étant considérées comme indépendantes. Car la solution générale des équations (97) serait

$$(99) \qquad v_i = \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial p_i} + \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et il n'y aurait qu'à y remplacer les p_i par les valeurs (70) pour avoir les fonctions en question [1].

Nous pouvons donc différentier les équations (98) dans cette hypothèse, par rapport aux variables $t, x_1, \ldots, x_n$, et il viendra

$$(100) \qquad \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial t} = \frac{\partial^2 G''}{\partial v_i \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 G''}{\partial v_i \partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

$$(101) \qquad \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 G''}{\partial v_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 G''}{\partial v_i \partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on porte ces expressions dans les équations (93) et (94), et si l'on tient compte des identités d'Euler, relatives aux dérivées premières et secondes de G'', il reste simplement les équations

$$(102) \qquad \frac{dv_0}{dt} + \frac{\partial G''}{\partial t} = 0,$$

$$(103) \qquad \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial G''}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

auxquelles il faut adjoindre les équations (96), (97), et les équations

$$(104) \qquad \frac{dx_i}{dt} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui résultent de (63) et (64).

15. *Les extrémales ainsi définies ne sont autre chose que les tra-*

---

(1) Cf. *Bull. de la Soc. math.*, t. XL, 1912, p. 107.

Nous avons ici, en plus, le paramètre λ_0, parce que nous opérons sur des coordonnées homogènes, $v_0, v_1, \ldots, v_n$, pour l'élément de contact général de la multiplicité d'onde, au point $(p_1, \ldots, p_n)$, qu'il s'agit de représenter.

jectoires de la propagation ; et les inconnues auxiliaires $v_0, v_1, \ldots, v_n$ correspondent à l'introduction des éléments de contact qui font de chaque trajectoire le support d'une *caractéristique*. Il suffit, pour le constater, de poser

$$v_i = -q_i v_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{105}$$

Cela supposera que v_0 ne s'annule en aucun point de l'arc de courbe (C) considéré, hypothèse qui s'était introduite déjà pour l'extrémité de l'arc. Géométriquement, elle signifie que le plan de l'élément de contact de la multiplicité d'onde $(p_1, \ldots, p_n; v_1, \ldots, v_n)$ ne doit pas passer par l'origine, c'est-à-dire ne doit pas contenir le rayon vecteur du point $(p_1, \ldots, p_n)$. Or ce rayon vecteur, d'après les équations (104), est la tangente à la courbe (C). *La condition que nous nous imposons est donc que l'élément de contact, associé, par la mise en équations précédente, à chaque point de la courbe datée* (C), *ne doit jamais appartenir à cette courbe.*

En ayant égard aux degrés d'homogénéité, on a, par le changement des variables (105),

$$\frac{\partial G''}{\partial v_i} = \frac{\partial G}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial G''}{\partial t} = -v_0 \frac{\partial G}{\partial t}, \qquad \frac{\partial G''}{\partial x_i} = -v_0 \frac{\partial G}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{106}$$

On a, d'autre part,

$$\frac{dv_i}{dt} = -v_0 \frac{dq_i}{dt} - q_i \frac{dv_0}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{107}$$

et, par suite,

$$v_0 \frac{\partial G}{\partial x_i} = -v_0 \frac{dq_i}{dt} + v_0 q_i \frac{\partial G}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{108}$$

Et, par conséquent, sous l'hypothèse faite, on obtient les équations

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial x_i} - q_i \frac{\partial G}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{109}$$

qui remplacent les équations (102) et (103). Quant aux équations (96) et (97), elles deviennent, à cause de (104),

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{110}$$

et

$$(111) \qquad dt = \sum_{i=1}^{n} q_i \, dx_i.$$

Par comparaison de (110) et (111), on retrouverait enfin l'équation (22), à savoir

$$(112) \qquad G(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n) = 1.$$

Nous retrouvons bien ainsi toutes les équations des caractéristiques [*cf.* n° **9**].

On peut remarquer que, $q_1, \ldots, q_n$ étant supposés calculés, l'inconnue v_0 est donnée par une quadrature, au moyen de

$$(113) \qquad \frac{dv_0}{dt} = v_0 \frac{\partial G}{\partial t},$$

et que les v_i sont alors donnés par les équations (105). Cette inconnue v_0 correspond à la quantité m qui s'était introduite aussi dans la théorie de la propagation [*cf.* n° **5**].

Sa valeur initiale reste arbitraire, et la forme linéaire de l'équation (113) montre qu'elle ne s'annulera certainement pas, tant que ne se produira pas la circonstance singulière que $\frac{\partial G}{\partial t}$ devienne infini. Or cette singularité est exclue déjà, implicitement, dans les considérations des n°s 6 et 7.

Observons enfin que si G était seulement *positivement* homogène, ce qu'on peut, dans certains cas, être obligé de supposer, nos transformations resteraient légitimes, pourvu que v_0 fût négatif. Or cela peut toujours se supposer, puisque nous lui imposons la condition de ne pas s'annuler : et que, d'autre part, $v_0, v_1, \ldots, v_n$ ne sont définis, dans tout ce qui précède, que par des équations homogènes, et, par conséquent, à un facteur constant près.

14. *Il reste à examiner si les trajectoires correspondent effectivement à un minimum dans la durée de la propagation* [*cf.* n° **10**]. Soit donc (T) une de ces trajectoires : M_0 et M_1 deux de ses points, datés t_0 et θ_1 ($\theta_1 > t_0$); et nous désignerons par $\overline{T}$ l'arc de cette trajectoire, compris entre M_0 et M_1, considéré indépendamment des valeurs

de t associées à chaque point de la trajectoire, mais supposé parcouru de M_0 en M_1.

Soit, d'autre part, (C) une autre courbe datée, de l'espèce définie au n° 2, qui passe aussi en M_0 et M_1, et soit datée t_0 en M_0. Elle sera datée t_1 en M_1 ; et il s'agira d'étudier le signe de $(t_1 - \theta_1)$ pour des solutions (C) du système de Monge (5), (6) qui soient suffisamment voisines de la solution (T). Nous représenterons encore par $\overline{C}$ l'arc géométrique M_0M_1 de (C), considéré indépendamment de toute date pour ses points, mais supposé parcouru de M_0 en M_1.

La date t_1 peut être considérée comme définie de la manière suivante. On prend l'équation différentielle (5), c'est-à-dire

$$dt = F(t \mid x, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n), \tag{114}$$

et *on l'intègre le long de* $\overline{C}$, en prenant pour valeur initiale t_0. La valeur finale que prend cette intégrale en M_1 est t_1. Le mot d'intégration le long de $\overline{C}$ signifie qu'on remplace, dans l'équation (114), $x_1, \ldots, x_n$ et leurs différentielles au moyen des équations (7), c'est-à-dire

$$x_i = \psi_i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{115}$$

qui définissent cet arc $\overline{C}$, quand u varie en croissant de u_0 à u_1. Comme du est ainsi positif, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dt}{du} = F\left[t \mid \psi_i(u), \ldots, \psi_n(u) \mid \frac{d\psi_1(u)}{du}, \ldots, \frac{d\psi_n(u)}{du}\right], \tag{116}$$

qu'on aurait à intégrer, avec la condition initiale $t = t_0$ pour $u = u_0$.

De même, θ_1 s'obtiendrait en intégrant l'équation (114) le long de $\overline{T}$, avec la même valeur initiale ; car (T) n'est qu'une courbe datée (C) particulière.

On peut, de plus, substituer à l'équation (114) une infinité d'autres équations qui donneront, pour le calcul de t_1 et de θ_1, les mêmes résultats. Car les courbes datées considérées satisfont aux équations (6), à savoir :

$$F_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha). \tag{117}$$

On pourra donc utiliser, au lieu de (114), et de la même manière,

toute équation

$$(118) \qquad dt = f(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n),$$

où, comme plus haut, — [par exemple, n° 6, équation (41)] —, f désigne une combinaison linéaire de la forme

$$(119) \qquad f = F + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h,$$

les λ_h étant ici des fonctions arbitraires de $x_1, \ldots, x_n$.

15. Nous allons transformer ce résultat de manière à faire intervenir les multiplicités d'onde. Soit M le point de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$; et $\Omega_{x,t}$ la multiplicité d'onde qui a, à l'instant t, ce point pour origine. Supposons M sur $\overline{C}$; et appelons P le point où la direction positive de la tangente, menée à $\overline{C}$ en M, perce $\Omega_{x,t}$. Alors les équations (114) et (117) expriment que, si M est daté t sur (C), le point P a pour coordonnées, quand on prend M pour origine, les dérivées

$$(120) \qquad \frac{dx_i}{dt} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (Cf.\ n^{os}\ 1 \text{ et } 2.)$$

Si l'on pose alors

$$(121) \qquad q_i = \frac{\partial f}{d\, \partial x_i} = \frac{\partial f(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n)}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les quantités $(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ sont, dans ce même système de coordonnées, les coordonnées d'un élément de contact (E) de $\Omega_{x,t}$, associé à ce point P; ces coordonnées étant assujetties à vérifier la relation de condition [1] suivante, qui équivaut, en effet, à (118),

$$(122) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = 1.$$

Avec ces notations, l'équation (118) peut se mettre sous la forme

$$(123) \qquad dt = \sum_{i=1}^{n} q_i\, dx_i.$$

---

[1] Cf. *Bull. de la Soc math.*, t. XL, 1912, p. 78.

Pour plus de netteté, nous désignerons par

$$q_i = K_i(t, u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{124}$$

les fonctions qu'on obtient en remplaçant, dans les formules (121), les x_i et les dx_i au moyen des formules (115). La date t, relative à la courbe (C), s'obtiendrait donc par l'intégration de l'équation

$$\frac{dt}{du} = \sum_{i=1}^{n} K_i(t, u) \frac{d\psi_i(u)}{du} \equiv K(t, u), \tag{125}$$

avec la valeur initiale $t = t_0$, pour $u = u_0$.

16. Quand on applique ces résultats généraux à une trajectoire, il se présente deux particularités remarquables.

D'abord, cette trajectoire sert de support à au moins une caractéristique, qui s'obtient en adjoignant à chaque point M de la trajectoire un élément de contact, dont les coefficients de direction $q_1, \ldots, q_n$ satisfont aux équations (44) et (22), que nous récrivons :

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{126}$$

$$G(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n) = 1. \tag{127}$$

Elles entraînent l'équation (122). Or l'équation (127) est l'équation tangentielle de $\Omega_{x,t}$; et ces équations (126) donnent le point de contact d'un plan tangent quelconque de cette multiplicité d'onde. Nous avons donc ainsi un élément de contact (E) particulier, qui se trouve associé au point P : il est parallèle à l'un de ceux que la trajectoire est susceptible de transporter, dans le mode de propagation considéré. Inversement, nous avons l'interprétation géométrique des équations (44) des caractéristiques : elles expriment la relation que nous venons de définir entre la direction de la tangente à la trajectoire et celle de l'élément de contact transporté, et qui porte le nom de *transversalité* [*cf.* n° **9**].

Il résulte de plus de la condition auxiliaire — ($v_0 \neq 0$) —, que nous nous sommes imposée au n° **15**, le fait que l'élément de contact transversal à la trajectoire, qui lui est associé dans une solution déterminée

du système canonique des caractéristiques, ne passe jamais par la tangente à la trajectoire. On peut donc, et c'est la seconde particularité annoncée, introduire une famille d'ondes, transversales à la trajectoire (T) considérée — [*cf.* n° 9] —, qui rempliront un espace à n dimensions ($\mathcal{E}$), dans lequel l'arc $\overline{\mathrm{T}}$ sera contenu tout entier, de telle manière que par chaque point de cet espace ($\mathcal{E}$) passe une onde de cette famille, et une seule [1]. Et nous supposerons, dorénavant, que l'arc $\overline{\mathrm{C}}$ lui-même est contenu dans cet espace ($\mathcal{E}$).

Reprenons donc les notations du n° 8, et soit

$$t = \mathrm{V}(x_1, \ldots, x_n) \tag{128}$$

l'équation générale de cette famille d'ondes. A chaque point M de l'espace ($\mathcal{E}$), elle fait correspondre une valeur de t et les quantités

$$q_i = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{129}$$

qui satisfont à l'équation (127). Ces quantités définissent une direction d'élément de contact, qui est transversale à la direction correspondante, dont les coefficients sont fournis par les formules (126). On peut donc supposer les fonctions λ_h de $x_1, \ldots, x_n$, qui figurent dans la formule (119), choisies de telle manière que les formules (121), employées pour la courbe (C), redonnent inversement les valeurs (129), quand on y remplace t par la valeur (128), et $p_1, \ldots, p_n$ par les fonctions de $x_1, \ldots, x_n$,

$$p_i = \varpi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{130}$$

obtenues en portant dans les formules (126) les valeurs (128) et (129). Nous ferons, dorénavant, cette hypothèse sur le choix des fonctions λ_h.

Relativement à l'arc $\overline{\mathrm{T}}$ lui-même, pour obtenir la date θ_1 (à

---

[1] Bien entendu, cela constitue néanmoins une hypothèse nouvelle sur l'arc $\overline{\mathrm{T}}$, puisque cela revient à supposer vérifiée la *condition de Jacobi*. *Cf.* Hadamard, *Leçons sur le Calcul des variations*, t. I, p. 360.

laquelle arrive en M_1 l'ébranlement parti de M_0 à l'instant t_0, quand il se propage le long de $\overline{T}$), nous aurons, d'après les résultats du n° 15 à intégrer, le long de $\overline{T}$, l'équation (123), où nous pouvons supposer les q_i remplacés par les expressions (129).

Mais le second membre étant alors la différentielle totale dV, on obtiendra aussi 0, en faisant cette intégration le long de C. Cette remarque essentielle est la forme sous laquelle se présente ici l'*Unbhängigkeit Satz*, qu'Hilbert a mis en évidence dans la méthode, devenue classique, de Weierstrass.

17. Nous avons ainsi introduit, en chaque point M de l'arc $\overline{C}$, deux valeurs de t, l'intégrale de l'équation (125), et la valeur de la fonction V. Nous désignerons, dorénavant, cette dernière valeur par θ. Nous avons, par suite, deux multiplicités d'onde, ayant ce point pour origine, à considérer : $\Omega_{x,t}$ et $\Omega_{x,\theta}$. La direction positive de la tangente à $\overline{C}$ en ce point perce $\Omega_{x,t}$ au point P, dont les coordonnées sont données par les formules (120) ; ou, plus explicitement, par les formules

$$(131) \qquad p_i = \frac{d\psi_i(u)}{du} \frac{1}{K(t, u)} \equiv H_i(t, u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Et, quand on associe à ces valeurs les quantités (124), c'est-à-dire

$$(132) \qquad q_i = K_i(t, u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient un élément de contact (E) de $\Omega_{x,t}$.

Mais ces formules sont absolument indépendantes de ce fait que la valeur de t est particulière. En laissant t absolument arbitraire, elles donnent toujours un élément de contact de $\Omega_{x,t}$, dont le point est sur la direction positive de la tangente à $\overline{C}$. Car les coordonnées d'un tel point sont *positivement* proportionnelles aux $\frac{d\psi_i}{du}$, qui interviennent seuls dans les formules (121) ; et, par suite, les fonctions (131) et (132) vérifient identiquement les équations (121). Comme, de plus, elles satisfont aussi à l'équation (122) identiquement, elles sont bien les coordonnées d'un élément de contact de $\Omega_{x,t}$.

En particulier, les quantités

(133) $p_i = \mathrm{H}_i(\theta, u), \qquad q_i = \mathrm{K}_i(\theta, u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

sont les coordonnées d'un élément de contact (H) de $\Omega_{x,\theta}$.

D'autre part, les formules (130) et (129) donnent, quand on y remplace les x_i par les fonctions $\psi_i(u)$, des fonctions de u et que nous désignerons par

(134) $p'_i = \mathrm{H}'_i(u), \qquad q'_i = \mathrm{K}'_i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$

et qui, d'après les explications du n° 16, sont les coordonnées d'un autre élément de contact (H′) de $\Omega_{x,\theta}$. Enfin, avec ces dernières notations, θ satisfait à l'équation différentielle

(135) $$\frac{d\theta}{du} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{K}'_i(u) \frac{d\psi_i(u)}{du} = \mathrm{K}'(u).$$

18. Ce sont les équations (125) et (135) qui vont nous permettre de comparer t_1 et θ_1. Mais quelques remarques préliminaires sont indispensables.

Nous supposons que les courbes datées (C) et (T) ont un voisinage d'ordre *un*. Donc, à chaque point $(x_1, \ldots, x_n)$, ou M, de C, et à la date t qui lui est associée, correspond un point $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, ou M′, de T, et une date θ, tels que les différences

(136) $x_i - \xi_i, \quad t - \theta, \quad \frac{dx_i}{dt} - \frac{d\xi_i}{d\theta} \qquad (i = 1, \ldots, n)$

soient inférieures en valeur absolue à un nombre positif donné ε. A ces points, M et M′, les formules (120) et (121) font correspondre respectivement l'élément de contact (E) et ([1]) un élément de contact (E′), dont les coordonnées différeront d'aussi peu que l'on veut, dès que ε sera convenablement choisi.

Mais il résulte des explications du n° 16 que l'élément de contact (E′) est donné aussi par les formules (130) et (129), quand on y remplace les x_i par les ξ_i. Et il suit de là que les coordonnées des éléments (E′) et (H′) sont aussi voisines qu'on voudra.

([1]) En changeant x_i en ξ_i, et t en θ_1.

Comme enfin (E) et (H) ont des coordonnées aussi voisines qu'on veut, dès que $|t-\theta|$ est suffisamment petit, nous concluons, en définitive, que *les éléments de contact* (H) et (H'), qui appartiennent tous deux à $\Omega_{x,\theta}$, *peuvent être supposés aussi voisins qu'on voudra.*

19. Ce point acquis, considérons la différence

(137) $$\mathrm{K}(\theta, u) - \mathrm{K}'(u).$$

On peut l'écrire

(138) $$\mathrm{K}(\theta, u)\left[1 - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{K}'_i(u)\,\mathrm{H}_i(\theta, u)\right].$$

Or le premier facteur est positif; car $\frac{dt}{du}$, qui est égal à $\mathrm{K}(t, u)$, est positif le long de (C); et il en est de même, par suite, de $\mathrm{K}(\theta, u)$, puisque θ est aussi voisin de t que l'on veut.

Quant à l'autre facteur, il s'écrit

(139) $$1 - \sum_{i=1}^{n} p_i q'_i,$$

en désignant, comme dans les formules (133) et (134) par $(p_1, \ldots, p_n;\ q_1, \ldots, q_n)$ et $(p'_1, \ldots, p'_n;\ q'_1, \ldots, q'_n)$ les coordonnées des deux éléments de contact (H) et (H') de $\Omega_{x,\theta}$. Son signe est donc lié à la concavité (¹) des multiplicités d'onde $\Omega_{x,\theta}$, dans le voisinage des éléments (H); et, par conséquent, par raison de continuité, à celle des multiplicités d'onde $\Omega_{\xi,\theta}$, ayant pour origines les divers points M' de $\overline{\mathrm{T}}$, dans le voisinage des éléments de contact (E').

Si nous nous rappelons — [*cf.* nº **16**] — que ces éléments (E') ont pour coordonnées les valeurs de $(p_1, \ldots, p_n;\ q_1, \ldots, q_n)$ fournies par une caractéristique ayant pour support la trajectoire considérée, nous pourrons énoncer le résultat suivant : *La différence* (137) *ne peut être, le long de* $\overline{\mathrm{C}}$, *que positive ou nulle, si, en chaque point de* $\overline{\mathrm{T}}$, *et à l'instant où l'ébranlement passe en ce point, la multiplicité d'onde ayant ce point pour origine est concave vers son origine dans*

(¹) Cf. *Bulletin de la Soc. math.*, t. XL, 1912, p. 92.

le voisinage de l'élément de contact qui a pour coordonnées les valeurs de $\left(p_1 = \frac{dx_1}{dt}, \ldots, p_n = \frac{dx_n}{dt}; q_1, \ldots, q_n\right)$ *données par les équations de la caractéristique qui a fourni la trajectoire* (T).

Nous supposerons cette condition suffisante remplie.

Observons de plus que, la concavité ayant lieu, le facteur (141) ne peut s'annuler que si les éléments de contact (H) et (H′) correspondent au même point de $\Omega_{x,\mathfrak{y}}$. Or les points de ces éléments sont situés, l'un sur la direction positive de la tangente à $\overline{\mathrm{C}}$, l'autre sur la direction à laquelle est transversale l'onde de la famille (128) qui passe au point de $\overline{\mathrm{C}}$ considéré. Et il est impossible que ces deux directions coïncident en tous les points de $\overline{\mathrm{C}}$; car, s'il en était ainsi, $\overline{\mathrm{C}}$ serait l'une des trajectoires auxquelles les ondes de la famille (128) sont transversales — [*cf* n° **9** et n° **16**] —. Or cela est impossible, car, d'après les équations (61) qui définissent cette famille de trajectoires, il en passe une et une seule par chaque point de l'espace ($\mathcal{E}$), et, par le point M_0, d'où part $\overline{\mathrm{C}}$, passe déjà la trajectoire $\overline{\mathrm{T}}$, qui appartient à la famille considérée, et avec laquelle, par hypothèse, $\overline{\mathrm{C}}$ ne se confond pas.

Donc, *la différence* (139) *n'est pas nulle en tous les points de* $\overline{\mathrm{C}}$.

20. Ceci posé, considérons la différence

$$(140) \qquad \Delta = t - \theta.$$

C'est, d'après les notations adoptées au n° 17, une fonction de u définie en tous les points de $\overline{\mathrm{C}}$, c'est-à-dire dans l'intervalle de u_0 à u_1. Elle admet, dans tout cet intervalle, une dérivée continue [1], donnée par la formule

$$(141) \qquad \frac{d\Delta}{du} = \mathrm{K}(t, u) - \mathrm{K}'(u).$$

qui résulte immédiatement des équations (125) et (135). Enfin, elle

---

[1] Cette continuité suppose, d'après la définition de la fonction K, que la tangente à $\overline{\mathrm{C}}$ varie d'une manière continue. La nature des raisonnements qui suivent permettrait d'admettre des discontinuités consistant en variations brusques de cette direction, en des points isolés.

s'annule pour $u = u_0$, puisque alors t et θ ont, tous deux, la valeur t_0.

Écrivons la formule (143) sous la forme

$$\frac{d\Delta}{du} = [K(t, u) - K(\theta, u)] + [K(\theta, u) - K'(u)], \tag{142}$$

et observons que, d'après l'équation (125) qui définit $K(t, u)$, cette fonction possède une dérivée partielle par rapport à t, à condition seulement de supposer que les fonctions F et F_h, — [données au n° **1**] —, aient des dérivées secondes du type $\frac{\partial^2}{\partial p_i\, \partial t}$. On peut donc poser

$$K(t, u) - K(\theta, u) = (t - \theta) A, \tag{143}$$

A étant une fonction de u, qui sera continue dans tout l'intervalle (u_0, u_1), que $(t - \theta)$ s'annule ou non. En effet, tant que $(t - \theta)$ ne s'annule pas, la continuité de A résulte de celle de la fonction $K(t, u)$, et des fonctions t et θ de u. Si $(t - \theta)$ s'annule, elle résulte de l'expression de A

$$A = \frac{\partial K(\bar{\theta}, u)}{\partial \bar{\theta}}, \tag{144}$$

que fournit le théorème des accroissements finis, et dans laquelle $\bar{\theta}$ est compris entre t et θ, pourvu qu'on suppose la continuité des dérivées de F et F_h dont nous venons de supposer l'existence.

Nous écrirons donc l'équation (142) sous la forme

$$\frac{d\Delta}{du} = A\Delta + B, \tag{145}$$

en désignant encore par B la différence (137), qui est une fonction de u, continue aussi, à cause des hypothèses précédentes. De plus, d'après le n° **19**, B est positive ou nulle, et n'est pas constamment nulle.

De cette équation, en tenant compte de ce que Δ s'annule pour pour $u = u_0$, on tire, pour Δ, l'expression

$$\Delta = e^{\int_{u_0}^{u} A\, du} \int_{u_0}^{u} B e^{-\int_{u_0}^{u} A\, du}\, du. \tag{146}$$

qui montre que Δ est positif, pour $u_0 < u \leq u_1$. En particulier, on a, pour $u = u_1$, la conséquence

$$(147) \qquad t_1 - \theta_1 > 0.$$

Il est donc démontré que *sous l'hypothèse de la concavité des multiplicités d'onde*, précisée au n° **19**, *la trajectoire* $\overline{\mathrm{T}}$ *correspond à un minimum dans la durée de la propagation.*

Sur une classe d'intégrales définies;

PAR N.-E. NÖRLUND,
à Lund (Suède).

On connaît le rôle qu'a joué la transformation d'Euler ([1])

$$y = \int (t-x)^{\xi-1} v(t)\,dt$$

dans la théorie des équations différentielles à coefficients rationnels. Cette transformation se prête particulièrement à l'étude de l'équation différentielle de Pochhammer ([2])

$$\begin{aligned} 0 = Q(x)\frac{d^n y}{dx^n} - \binom{\xi-n}{1} Q'(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \binom{\xi-n}{2} Q''(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \ldots \\ - R(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \binom{\xi-n+1}{1} R'(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \ldots, \end{aligned}$$

$Q(x)$ et $R(x)$ désignant des polynomes en x. On doit à M. Jordan ([3]) une étude complète et très élégante des solutions de cette équation.

Dans les pages suivantes nous allons nous occuper de deux classes d'équations aux différences finies, analogues à l'équation différentielle ci-dessus. Nous allons former des systèmes fondamentaux de solutions qui se représentent par certaines intégrales définies étendues sur des produits de fonctions gamma. Des intégrales de cette sorte ont été

([1]) *Voir* SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, t. II, Leipzig, 1897, p. 405.

([2]) *Journal für die reine u. angewandte Mathematik*, t. LXXI, 1870, p. 317.

([3]) *Cours d'Analyse*, t. III, Paris, 1896, p. 240.

rencontrées par MM. Mellin [1] et Pincherle [2] qui s'en sont occupés à différentes reprises. Ces auteurs ont notamment fait voir le rôle que jouent ces intégrales dans la théorie des équations différentielles hypergéométriques d'ordre supérieur.

CHAPITRE I.

1. Soit $Q(x)$ un polynome en x de degré n et soit $R(x)$ un polynome dont le degré est inférieur à n. Posons

$$\Delta_{\omega}\, u(x) = \frac{u(x+\omega) - u(x)}{\omega},$$

et considérons l'équation aux différences finies d'ordre n

$$\begin{aligned}(1)\qquad Q(x)\,\Delta^{n}_{-1}\,u(x) &+ \binom{\xi+n}{1}\Delta_{+1}\,Q(x)\,\Delta^{n-1}_{-1}\,u(x) \\ &+ \binom{\xi+n}{2}\Delta^{2}_{+1}\,Q(x)\,\Delta^{n-2}_{-1}\,u(x) + \dots \\ &+ \binom{\xi+n}{n}\Delta^{n}_{+1}\,Q(x)\,u(x) \\ = R(x)\,\Delta^{n-1}_{-1}\,u(x) &+ \binom{\xi+n-1}{1}\Delta_{+1}\,R(x)\,\Delta^{n-2}_{-1}\,u(x) + \dots \\ &+ \binom{\xi+n-1}{n-1}\Delta^{n-1}_{+1}\,R(x)\,u(x),\end{aligned}$$

ξ désignant un paramètre indépendant de x. Essayons de satisfaire à cette équation par une intégrale de la forme

$$(2)\qquad u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+1)}\,v(t)\,dt.$$

---

[1] *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XIV, 1885, p. 353; t. XV, 1888, p. 1; t. XX, n° 7, 1895; t. XXI, n° 1, 1896; t. XXII, n° 2, 1897; t. XXIII, n° 7, 1897; *Acta mathematica*, t. VIII, 1886, p. 37; t. IX, 1887, p. 137; t. XV, 1891, p. 317; t. XXII, 1898, p. 19; t. XXV, 1902, p. 139; *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, t. I, série A, n° 3, 1909.

[2] *Rendiconti del R. Ist. Lombardi*, t. XIX, 2ᵉ série, 1886; *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, t. IV, 1888, p. 694-700 et p. 792-799; *Giornale di Matematiche*, t. XXXII, 1894, p. 209-291.

$v(t)$ étant une fonction de t qui reste à déterminer ainsi que la ligne d'intégration. En formant la différence finie d'ordre s par rapport à x on trouve

$$\Delta^s_{\ 1}\, u(x) = \frac{(\xi+1)(\xi+2)\ldots(\xi+s)}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+s+1)}\, v(t)\, dt.$$

Substituons ces expressions dans l'équation (1) et remarquons qu'on a

$$(3) \qquad Q(t) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(t-x)(t-x-1)\ldots(t-x-s+1)}{s!}\, \Delta^s_{+1}\, Q(x),$$

on trouve

$$(4) \qquad \int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+n+1)}\, v(t)\, [(\xi+n)\, Q(t+n) - (t-x+n)\, R(t+n-1)]\, dt = 0.$$

Déterminons $v(t)$ comme une solution de l'équation aux différences finies de premier ordre

$$(5) \qquad Q(t+n)\, v(t) - Q(t+n-1)\, v(t-1) = R(t+n-1)\, v(t).$$

L'équation (4) se réduit à l'équation suivante

$$(6) \qquad \int \frac{\Gamma(t-x-\xi+1)}{\Gamma(t-x+n+1)}\, Q(t+n)\, v(t)\, dt = \int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+n)}\, Q(t+n-1)\, v(t-1)\, dt.$$

Choisissons la ligne d'intégration de sorte que le premier membre de cette équation ne soit pas altéré quand on remplace t par $t-1$; l'intégrale (2) représente alors une solution de l'équation (1). Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de l'équation $Q(x+n) = 0$, et par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ les racines de l'équation $Q(x+\xi+n) = R(x+\xi+n-1)$, x étant la variable. On a par hypothèse

$$(5\ bis) \qquad v(t+1) = \frac{(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\ldots(t-\alpha_n)}{(t-\xi-\gamma_1+1)(t-\xi-\gamma_2+1)\ldots(t-\xi-\gamma_n+1)}\, v(t).$$

Posons pour abréger

$$\frac{1}{\Phi(t)} = \Gamma(1+\alpha_1-t)\ldots\Gamma(1+\alpha_n-t)\,\Gamma(1-\gamma_1-\xi+t)\ldots\Gamma(1-\gamma_n-\xi+t);$$

$\Phi(t)$ est une fonction entière de t, et la solution la plus générale de l'équation (5 *bis*) est

$$v(t) = \Phi(t)\,\varpi(t),$$

$\varpi(t)$ désignant une fonction périodique avec la période 1. Posons maintenant

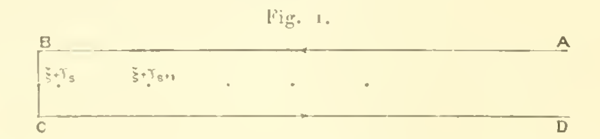
$$\varpi(t) = \frac{\pi e^{\pi i(\xi+\gamma_s-t)}}{\sin\pi(\xi+\gamma_s-t)},$$

et supposons pour le moment qu'aucune des différences entre les nombres γ_s ne soit égale à un entier positif, nul ou négatif. $v(t)$ est une fonction méromorphe admettant pour pôles les points

$$\xi+\gamma_s,\quad \xi+\gamma_s+1,\quad \xi+\gamma_s+2,\quad \ldots$$

Prenons pour chemin d'intégration la ligne brisée ABCD, comprenant à son intérieur les points $\xi+\gamma_s$, $\xi+\gamma_s+1$, $\xi+\gamma_s+2$, ...,

Fig. 1.



partant de l'infini le long de la droite AB et y revenant le long de la droite CD. Supposons que x ne soit pas situé sur la demi-droite qui passe par les points γ_s, γ_s+1, γ_s+2, ...; on peut dans l'intégrale au premier membre de (6) déplacer la ligne d'intégration d'une unité parallèlement à l'axe des nombres réels sans altérer la valeur de l'intégrale. L'intégrale (2) représente donc une solution de l'équation (1) pourvu qu'elle soit convergente. Pour déterminer la condition de convergence, il suffit de remarquer qu'on doit avoir, pour $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t=0} \Phi(t)\,t^{-k-\xi-\varepsilon} = 0,$$

t tendant vers l'infini le long de la ligne d'intégration, k étant égal à

$$k = \gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n+(n-1)\xi-n.$$

L'intégrale est donc convergente si $\mathcal{R}(k) < 0$ et elle représente une solution de l'équation (1) qui est holomorphe pour toute valeur de x non située sur la demi-droite qui passe par les points γ_s, γ_s+1,

$\gamma_s + 2, \ldots$. En donnant à s successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$, on trouve n solutions indépendantes.

2. Examinons maintenant le cas où une ou plusieurs des différences entre les nombres γ_s sont des entiers. Répartissons ces nombres en différents groupes de sorte que tous les nombres qui diffèrent par des entiers se trouvent dans un même groupe. Soit $\gamma_s, \gamma_{s+1}, \ldots, \gamma_{s+p}$ un tel groupe, où chaque nombre est répété autant de fois qu'il figure dans la suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Supposons qu'ils aient été numérotés de sorte qu'on ait

$$\Re(\gamma_s) \geqq \Re(\gamma_{s+1}) \geqq \ldots \geqq \Re(\gamma_{s+p}).$$

Au nombre γ_s correspond une solution $u_s(x)$ définie comme il a été dit plus haut, par la condition qu'aucun des autres nombres qui se trouvent dans le même groupe n'ait sa partie réelle supérieure à γ_s. Mais les solutions qui correspondent aux nombres $\gamma_{s+1}, \ldots, \gamma_{s+p}$ ne diffèrent de $u_s(x)$ que par un facteur constant. Pour obtenir un système fondamental de solutions, nous déterminerons dans le groupe de solutions $u_s(x), \ldots, u_{s+i}(x), \ldots, u_{s+p}(x)$ qui correspondent aux nombres $\gamma_s, \ldots, \gamma_{s+i}, \ldots, \gamma_{s+p}$, la fonction $v_{s+i}(t)$ comme il suit

$$v_{s+i}(t) = \Phi(t) \frac{\pi e^{\pi i(\xi+\gamma_s-t)}}{\sin\pi(\xi+\gamma_s-t)} \cdots \frac{\pi e^{\pi i(\xi+\gamma_{s+i}-t)}}{\sin\pi(\xi+\gamma_{s+i}-t)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p).$$

Les intégrales ainsi formées sont convergentes pour toute valeur de x qui ne se trouve pas sur la demi-droite passant par les points $\gamma_s, \gamma_s + 1, \gamma_s + 2, \ldots$, pourvu que $\Re(k) < 0$, et elles représentent des solutions de l'équation (1) *holomorphes pour toute valeur de x qui satisfait à cette condition.*

En écrivant l'équation aux différences sous la forme

$$P_0(x)\,u(x) + P_1(x)\,u(x-1) + \ldots + P_n(x)\,u(x-n) = 0,$$

on trouve, par un calcul facile,

$$P_0(x) = Q(x+\xi+n) - R(x+\xi+n-1).$$

Les zéros de $P_0(x)$ sont donc les nombres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. *On en conclut que les solutions $u_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ de notre système fondamental sont des fonctions méromorphes de x, et que la solution $u_s(x)$ n'ad-*

met d'autres pôles que les points $\gamma_s, \gamma_s + 1, \gamma_s + 2, \ldots$. Si γ_s ne diffère d'aucun des autres nombres γ par un entier positif, nul ou négatif, les points $\gamma_s, \gamma_s + 1, \gamma_s + 2, \ldots$ sont des pôles simples de $u_s(x)$.

5. En restant dans cette dernière hypothèse, nous allons former un développement en séries de $u_s(x)$.

Notre intégrale est égale à la somme des résidus de la fonction sous le signe dans les points $\gamma_s + \xi, \gamma_s + \xi + 1, \gamma_s + \xi + 2, \ldots$; on le vérifie sans peine à l'aide du théorème de Cauchy. En remarquant qu'on a

$$\lim_{t=-\nu} (t+\nu)\Gamma(t) = \lim_{t=-\nu} \frac{\Gamma(t+\nu+1)}{(t+\nu-1)\ldots(t+1)t} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!},$$

on trouve

$$(7) \quad u_s(x) = c_s \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\Gamma(\gamma_s - x + \nu)\,\Gamma(\gamma_s + \xi - \alpha_1 + \nu)\ldots\Gamma(\gamma_s + \xi - \alpha_n + \nu)}{\Gamma(\xi + \gamma_s - x + \nu + 1)\,\Gamma(\gamma_s - \gamma_1 + \nu + 1)\ldots\Gamma(\gamma_s - \gamma_n + \nu + 1)} (-1)^{\nu n},$$

où

$$c_s = -\frac{\sin\pi(\xi + \gamma_s - \alpha_1)}{\pi} \cdots \frac{\sin\pi(\xi + \gamma_s - \alpha_n)}{\pi},$$

la solution $u_s(x)$ *se représente donc par une série hypergéométrique.* Cette série est convergente pour toute valeur de x distincte des pôles $\gamma_s, \gamma_s + 1, \gamma_s + 2, \ldots$ pourvu qu'on ait $\mathcal{R}(k) < 0$.

Il peut arriver, par exception, qu'un ou plusieurs des nombres $\gamma_s + \xi - \alpha_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ soit égal à un entier non positif. Soit $-m$ le plus grand de ces nombres. La série (7) se réduit, en ce cas, aux m premiers termes, les termes suivants étant égaux à zéro. $u_s(x)$ est, par conséquent, égal à une fonction rationnelle de x, multipliée par un quotient de deux fonctions gamma.

Si $\gamma_s + \xi - \alpha_i$ est un entier positif, $u_s(x)$ est identiquement nul et la fonction

$$v_s(t) = \Phi(t) \frac{\pi e^{\pi i(\xi + \gamma_s - t)}}{\sin\pi(\xi + \gamma_s - t)},$$

est une fonction entière de t. On évite cette difficulté en remplaçant la fonction $v_s(t)$ par la fonction suivante

$$v_s(t) \frac{\pi}{\sin\pi(t - \alpha_i)};$$

la solution $u_s(x)$ est alors différente de zéro et elle se représente comme

plus haut par une série de la forme (7) où le terme général a été multiplié par $(-1)^\nu$ pendant que le facteur s'évanouissant dans c_s a été supprimé. Une remarque analogue a lieu s'il y a plusieurs des nombres $\gamma_s + \xi - \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ qui soient des entiers.

4. On peut obtenir un autre système fondamental de solutions $\bar{u}_1(x), \ldots, \bar{u}_n(x)$ de la manière suivante. Répartissons les racines α_s en différents groupes de sorte que toutes les racines qui diffèrent par des entiers se trouvent dans un même groupe. Soit $\alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_{s+p}$ un tel groupe où chaque racine est répétée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Supposons qu'elles aient été numérotées de sorte que

$$\mathcal{R}(\alpha_s) \leqq \mathcal{R}(\alpha_{s+1}) \leqq \ldots \leqq \mathcal{R}(\alpha_{s+p}).$$

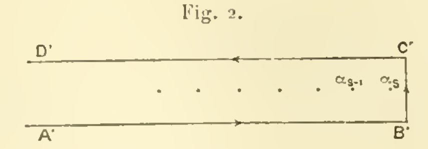
Correspondant à ces racines, nous définissons une suite de solutions par les équations suivantes :

$$\bar{u}_{s+i}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+1)} v_{s+i}(t)\,dt,$$

$$v_{s+i}(t) = \Phi(t)\frac{\pi}{\sin\pi(t-\alpha_s)}\cdots\frac{\pi}{\sin\pi(t-\alpha_{s+i})}\,\frac{\sin\pi(x+\xi-t)}{\sin\pi(x-t)}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, p),$$

où la ligne d'intégration est une ligne brisée A′B′C′D′ partant de l'infini le long de la ligne A′B′ et y revenant le long de la ligne C′D′

Fig. 2.



qui comprend à son intérieur les points $\alpha_s, \alpha_s - 1, \alpha_s - 2, \ldots$. En déformant convenablement la ligne d'intégration, on voit que l'intégrale reste convergente quand x reste à distance finie des points $\alpha_s, \alpha_s - 1, \alpha_s - 2, \ldots$ pourvu que $\mathcal{R}(k) < 0$. Elle représente une solution méromorphe de l'équation (1), admettant pour pôles les points $\alpha_s, \alpha_s - 1, \alpha_s - 2, \ldots$ et étant d'ailleurs holomorphe. A chaque racine α_s correspond une solution et ces solutions forment un système fondamental. En remarquant que l'intégrale est égale à la somme des résidus de la

fonction sous le signe d'intégrations dans les points α_s, $\alpha_s - 1$, $\alpha_s - 2$, ..., on trouve pour $i = 0$ le développement

$$\overline{u}_s(x) = c_s \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\Gamma(x - \alpha_s + \nu)\,\Gamma(\gamma_1 + \xi - \alpha_s + \nu)\ldots\Gamma(\gamma_n + \xi - \alpha_s + \nu)}{\Gamma(x - \xi - \alpha_s + \nu + 1)\,\Gamma(\alpha_1 - \alpha_s + \nu + 1)\ldots\Gamma(\alpha_n - \alpha_s + \nu + 1)} (-1)^{\nu n},$$

où

$$c_s = \frac{\sin\pi(\xi + \gamma_1 - \alpha_s)}{\pi} \cdots \frac{\sin\pi(\xi + \gamma_n - \alpha_s)}{\pi}.$$

Cette série hypergéométrique converge pour toute valeur de x différente des pôles α_s, $\alpha_s - 1$, $\alpha_s - 2$, ... pourvu que $\mathcal{R}(k) < 0$.

5. Il y a quelques cas d'exceptions intéressants qu'il convient d'examiner de plus près. Supposons qu'on ait pour $s = 1, 2, \ldots, n$

$$\gamma_s + \xi - \alpha_s = 0;$$

la condition nécessaire et suffisante pour que cela arrive c'est que $R(x) = 0$. L'équation aux différences (1) se réduit à son premier membre qui doit être identiquement zéro. La fonction $\Phi(t)$ devient

$$\Phi(t) = \frac{\sin\pi(t - \xi - \gamma_1)}{\pi(t - \xi - \gamma_1)} \cdots \frac{\sin\pi(t - \xi - \gamma_n)}{\pi(t - \xi - \gamma_n)}.$$

On peut donc définir un système de solutions par les intégrales suivantes :

$$u_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_s} \frac{\Gamma(t - x - \xi)}{\Gamma(t - x + 1)} \frac{dt}{(t - \xi - \gamma_1)\ldots(t - \xi - \gamma_n)},$$

où la ligne d'intégration C_s est un petit cercle autour de $\xi + \gamma_s$ parcouru dans le sens positif et laissant à son extérieur les autres pôles $\xi + \gamma_1$, ..., $\xi + \gamma_n$. Ces solutions ne diffèrent de celles définies plus haut que par des facteurs constants. On vérifie immédiatement qu'on a

$$u_s(x) = \frac{1}{Q'(\xi + \gamma_s + n)} \frac{\Gamma(\gamma_t - x)}{\Gamma(\xi + \gamma_s - x + 1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n);$$

ces n solutions forment un système fondamental pourvu que les γ_s soient distincts. Mais si l'on a par exemple $\gamma_1 = \gamma_2 \ldots = \gamma_m$, nous pouvons, correspondant à ces racines, choisir les solutions suivantes :

$$u_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\Gamma(t - x - \xi)}{\Gamma(t - x + 1)} \frac{[\sin\pi(t - \xi - \gamma_1)]^{s-1}\,dt}{\pi^{s-1}(t - \xi - \gamma_1)^m (t - \xi - \gamma_{m+1})\ldots(t - \xi - \gamma_n)}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m).$$

Dans le cas extrême où $m = n$, c'est-à-dire où tous les γ prennent la même valeur, on obtient donc le système fondamental de solution suivant

$$u_s(x) = \frac{1}{(n-s)!}\frac{\partial^{n-s}}{\partial\gamma_1^{n-s}}\left[\frac{\Gamma(\gamma_1 - x)}{\Gamma(\gamma_1 + \xi - x + 1)}\right] \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

et l'équation aux différences se réduit, en ce cas, à l'équation suivante :

$$\sum_{i=0}^{i=n}\binom{\xi+n}{i}\Delta_{+1}^{i}(x-\xi-\gamma_1-n)^n\,\Delta_{-1}^{n-i}\,u(x) = 0.$$

6. Considérons enfin le cas où ξ est un entier. Si $0 > \xi \geqq -n$, un certain nombre des termes contenant $u(x)$, $\Delta_1 u(x)$, dans l'équation (1) disparaissent.

On peut donc réduire l'ordre de l'équation aux différences d'une ou plusieurs unités et par là trouver la solution générale de l'équation (1). Si $\xi < -n$, l'expression intégrale (2) montre immédiatement que $u(x)$ est un polynome en x. Si ξ est un entier non négatif, les expressions des solutions, trouvées plus haut, restent valables sans modifications. Mais on peut, dans ce cas, former une solution nouvelle particulièrement remarquable; il va sans dire que cette solution est une combinaison linéaire des solutions trouvées plus haut. Soit d'abord $\xi = 0$. L'expression (2) se réduit à

(8) $$u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{v(t)}{t-x}\,dt.$$

Je pose maintenant

$$v(t) = \frac{\Gamma(t-\alpha_1)\ldots\Gamma(t-\alpha_n)}{\Gamma(t-\gamma_1-\xi+1)\ldots\Gamma(t-\gamma_n-\xi+1)},$$

et je prends, comme ligne d'intégration, un petit cercle autour du point $t = x$, parcouru dans le sens positif et laissant à son extérieur les pôles de $v(t)$. En limitant convenablement le domaine de variabilité de x, on voit que la condition (6) est satisfaite. On a, par conséquent, la solution suivante :

$$u(x) = \frac{\Gamma(x-\alpha_1)\ldots\Gamma(x-\alpha_n)}{\Gamma(x-\gamma_1+1)\ldots\Gamma(x-\gamma_n+1)}.$$

Si ξ est égal à un entier positif m on trouve de même

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{v(t)\,dt}{(t-x)(t-x-1)\ldots(t-x-m)},$$

la ligne d'intégration est un contour fermé entourant les points x, $x+1$, ..., $x+m$ dans le sens positif et laissant à son extérieur les pôles de $v(t)$. Cette intégrale pourra s'obtenir en appliquant à l'intégrale (8) l'opération $\frac{1}{m!}\Delta_{+1}^{m}$; on a par conséquent la solution suivante :

$$u(x) = \frac{1}{m!}\Delta_{+1}^{m}\left[\frac{\Gamma(x-\alpha_1)\ldots\Gamma(x-\alpha_n)}{\Gamma(x-\gamma_1-m+1)\ldots\Gamma(x-\gamma_n-m+1)}\right].$$

CHAPITRE II.

7. Il y a plusieurs autres classes d'équations aux différences finies qui se placent à côté de l'équation (1) et qu'on peut résoudre d'une manière analogue. Considérons par exemple l'équation

$$(9) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Delta_{+1}^{i}\,Q(x)}{i!}\,u(x+i) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Delta_{+1}^{i-1}\,R(x)}{(i-1)!}\,u(x+i).$$

On suppose que $Q(x)$ et $R(x)$ soient des polynomes en x respectivement du degré $n+1$ et n et de la forme

$$Q(x) = (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n),$$
$$R(x) = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n),$$

où les α et les γ sont des constantes données. Nous considérons pour abréger seulement le cas, qu'on pourrait appeler général, où les γ et les α sont distincts et où aucunes des différences entre ces nombres ne sont des entiers. Essayons de satisfaire à cette équation par une intégrale de la forme

$$(10) \qquad u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{v(t)\,dt}{\Gamma(t-x+1)},$$

$v(t)$ étant une fonction à déterminer qui soit indépendante de x. En substituant cette intégrale dans l'équation (9) on trouve, en vertu

de (3),

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{v(t)}{\Gamma(t-x+1)}[Q(t)-(t-x)R(t-1)]\,dt = 0. \tag{11}$$

Déterminons $v(t)$ comme une solution de l'équation aux différences finies du premier ordre

$$v(t+1) = \frac{Q(t)}{R(t)}v(t). \tag{12}$$

La condition (11) se réduit à l'équation suivante

$$\int \frac{v(t)\,Q(t)}{\Gamma(t-x+1)}\,dt = \int \frac{v(t-1)\,Q(t-1)}{\Gamma(t-x)}\,dt. \tag{13}$$

L'intégrale (10) satisfait donc à l'équation (9) si $v(t)$ est une solution convenablement choisie de l'équation aux différences (12) et si le chemin d'intégration a été choisi de sorte que la valeur de l'intégrale, qui figure au premier membre de (13), ne soit pas altérée quand on déplace le chemin d'intégration d'une unité parallèlement à l'axe des nombres réels. On a

$$v(t) = \frac{\Gamma(t-\alpha_0)\,\Gamma(t-\alpha_1)\ldots\Gamma(t-\alpha_n)}{\Gamma(t-\gamma_1)\,\Gamma(t-\gamma_2)\ldots\Gamma(t-\gamma_n)}\,\pi(t),$$

$\pi(t)$ étant une fonction périodique avec la période 1. Soit s un des nombres 1, 2, ..., n. Posons

$$\pi(t) = \frac{\pi e^{\pi i(t-\gamma_s)}}{\sin\pi(t-\gamma_s)},$$

et prenons pour ligne d'intégration, un contour ABCD (*fig.* 1) comprenant à son intérieur les points γ_s+1, γ_s+2, γ_s+3, ... et laissant à son extérieur les pôles $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. L'intégrale ainsi définie est convergente pourvu que

$$\mathcal{R}(x) < \mathcal{R}(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n-\gamma_1-\ldots-\gamma_n),$$

et elle représente dans ce demi-plan une solution de l'équation (9) que nous désignons par $u_s(x)$. Il est facile de développer cette intégrale en série de facultés. La valeur de l'intégrale est, en effet, égale à la somme des résidus de la fonction sous le signe pour les pôles γ_s+1, γ_s+2, γ_s+3, ... Notre solution se représente donc par la série

hypergéométrique

$$u_s(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\Gamma(\gamma_s - \alpha_0 + \nu)\,\Gamma(\gamma_s - \alpha_1 + \nu)\ldots\Gamma(\gamma_s - \alpha_n + \nu)}{\Gamma(\gamma_s - x + \nu + 1)\,\Gamma(\gamma_s - \gamma_1 + \nu)\ldots\Gamma(\gamma_s - \gamma_n + \nu)},$$

qui est convergente dans le même demi-plan que l'intégrale. Des propriétés connues des séries de facultés permettent de conclure qu'on a uniformément

$$\lim_{|x|=\infty} \Gamma(\gamma_s - x + 2)\, u_s(x) = \text{const.},$$

x tendant vers l'infini en restant à l'intérieur du demi-plan de convergence.

En donnant à s successivement les valeurs 1, 2, ..., n, on obtient n solutions différentes. La propriété asymptotique susdite permet immédiatement de conclure que ces solutions forment un système fondamental de solutions.

Dans un Mémoire intitulé : *Sur une classe de fonctions hypergéométriques* (¹), j'ai discuté le cas particulier où $n = 2$, et montré comment on peut prolonger analytiquement les solutions dans tout le plan. Les équations (1) et (9) rentrent d'ailleurs comme cas particuliers dans deux classes générales d'équations aux différences finies que j'ai discutées avec détails dans deux autres Mémoires en me servant respectivement de la transformation de Laplace (²)

$$u(x) = \int t^{x-1}\, v(t)\, dt,$$

et des propriétés des séries de facultés (³). On trouve indiquées, dans ces Mémoires, les propriétés analytiques les plus importantes des solutions considérées plus haut.

(¹) *Bulletin de l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark*, Copenhague, 1913.

(²) *Sur les équations linéaires aux différences finies à coefficients rationnels* (*Acta mathematica*, t. XXXVII, 1913.

(³) *Sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies par des séries de facultés* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXV, 1913.

Sur le diamagnétisme;

PAR PIERRE DUHEM.

INTRODUCTION.

L'étude thermodynamique des corps diamagnétiques a suscité un certain nombre de paradoxes embarrassants.

Dès 1888, nous avions annoncé que, lorsque l'équilibre magnétique est établi sur un corps diamagnétique placé en présence d'un aimant permanent, le potentiel interne du système n'est pas toujours un minimum; nous avions attiré l'attention sur quelques conséquences étranges qui paraissaient découler de cette proposition.

En 1889, M. J. Parker montrait qu'à l'aide d'un corps diamagnétique, on peut réaliser un cycle isothermique fermé durant lequel les actions extérieures effectuent un travail négatif, tandis qu'une proposition bien connue de Clausius exigerait que ce travail fût nul ou positif.

En 1889, à la suite du travail de M. Parker, nous reprenions la proposition que nous avions établie l'année précédente et nous en tirions ce corollaire que, sur un corps diamagnétique, l'équilibre magnétique pourrait être instable; nous étions amenés, par là, à penser que l'existence de corps diamagnétiques est une impossibilité physique; nous proposions de reprendre une supposition due à Faraday et à Edmond Becquerel : le diamagnétisme serait une apparence qu'offrent certains corps moins magnétiques que le milieu où ils sont plongés.

Quelques semaines avant la publication de notre note, dans une lettre à E. Cesàro, lettre dont, alors, nous ignorions l'existence,

E. Beltrami formulait cette proposition, qui n'est d'ailleurs pas exacte : L'équilibre d'aimantation sur un corps diamagnétique correspond toujours à un maximum du potentiel interne. De cette proposition il déduisait, au sujet de l'instabilité de l'équilibre diamagnétique et de l'impossibilité du diamagnétisme véritable, des conséquences semblables de tout point à celles que nous allions formuler peu de jours après.

Ces diverses recherches semblaient concourir à cette conséquence, importante au point de vue de la Physique : Le diamagnétisme ne peut se rencontrer dans la nature : pour expliquer le diamagnétisme apparent, il est nécessaire de recourir à l'hypothèse de Faraday et d'Edmond Becquerel.

Or, aujourd'hui, nous croyons pouvoir affirmer que toutes les objections élevées contre l'existence des corps diamagnétiques reposaient sur un fondement dénué de solidité; les déductions qui paraissaient les justifier se rattachaient toutes à une manière incorrecte de raisonner sur le magnétisme; on pensait pouvoir traiter du mouvement du magnétisme sur un corps en faisant abstraction des courants électriques dont ce corps est le siège; c'était, assurément, une supposition illégitime; tout raisonnement correct sur le mouvement du magnétisme (et les problèmes de stabilité d'équilibre sont des problèmes de mouvement) exige qu'on recoure aux lois de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme; l'emploi de ces lois a tôt fait de montrer l'inexactitude des raisonnements qui prétendaient s'en passer, et de faire évanouir les propositions paradoxales auxquelles ces raisonnements avaient conduit.

Le présent travail a pour objet de prouver ce que nous venons d'énoncer.

CHAPITRE I.

L'INSTABILITÉ DU DIAMAGNÉTISME, DÉDUITE DE LA CONSIDÉRATION DU POTENTIEL INTERNE.

1. Soient :

(x_1, y_1, z_1) un point d'un corps aimanté;

A_1, B_1, C_1 les composantes de l'aimantation en ce point;

$d\varpi_1$ un élément de volume entourant ce point;
(x, y, z) un point quelconque de l'espace;
r la distance mutuelle des deux points (x, y, z), (x_1, y_1, z_1).

La fonction potentielle magnétique au point (x, y, z) est la quantité

$$(1) \qquad V(x, y, z) = \int \left(A_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + B_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + C_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d\varpi_1,$$

où l'intégration s'étend au volume entier du corps aimanté que l'on considère.

Considérons un espace en tout point (x, y, z) duquel des corps immuables, extérieurs à cet espace, engendrent un champ magnétique de composantes données L, M, N. En cet espace, plaçons un corps susceptible de s'aimanter. Ce corps sera dit *parfaitement doux* si l'aimantation qu'il prend en cette circonstance vérifie la loi suivante :

Si $\mathfrak{M}$ est l'intensité d'aimantation au point (x, y, z) du corps aimanté, A, B, C les composantes de cette aimantation et T la température au même point, il existe une *fonction magnétisante* $K(\mathfrak{M}, T)$ telle qu'on ait

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= K(\mathfrak{M}, T)\left(L - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}\right), \\ B &= K(\mathfrak{M}, T)\left(M - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}\right), \\ C &= K(\mathfrak{M}, T)\left(N - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial z}\right). \end{aligned} \right.$$

ε est un coefficient *positif* dont la valeur dépend de l'unité choisie pour mesurer les intensités d'aimantation.

Lorsque la fonction magnétisante $K(\mathfrak{M}, T)$ est positive, le corps est dit *magnétique;* il est dit *diamagnétique* lorsque cette fonction est négative.

Dans ce qui va suivre, nous nous bornerons au cas simple où la fonction magnétisante ne dépend pas de l'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$. En outre, nous n'aurons pas à faire varier la température T. La fonction magnétisante $K(\mathfrak{M}, T)$ se réduira alors à un *coefficient d'aimantation* K, constant, positif pour un corps magnétique et négatif pour un corps diamagnétique.

La quantité

$$(3)\qquad \Upsilon = \frac{\varepsilon}{2}\int\int\left(\begin{aligned} &AA'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial x'} + AB'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y'} + AC'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z'}\\ &+ BA'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x'} + BB'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial y'} + BC'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z'}\\ &+ CA'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x'} + CB'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial y'} + CC'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial z'}\end{aligned}\right)d\varpi\,d\varpi',$$

où chacune des deux intégrations s'étend à l'aimant tout entier, prend le nom de *potentiel de la distribution magnétique sur elle-même*. On démontre aisément que cette quantité peut se mettre sous la forme :

$$(4)\qquad \Upsilon = \frac{\varepsilon}{2}\int\left(A\frac{\partial V}{\partial x} + B\frac{\partial V}{\partial y} + C\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\varpi$$

ou encore sous la forme

$$(5)\qquad \Upsilon = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi.$$

Cette dernière forme montre que la quantité Υ est forcément positive, à moins que l'intensité d'aimantation ne soit nulle en tout point du corps considéré.

2. Nous n'avons rien supposé jusqu'ici au sujet des corps extérieurs qui engendrent le champ magnétique donné (L, M, N); admettons, dorénavant, que ces corps soient des aimants permanents absolument immuables de position et d'état; le système formé par l'ensemble de ces aimants permanents et du corps parfaitement doux soumis à leur influence aura alors pour potentiel interne, à une constante près, la quantité suivante :

$$(6)\qquad \mathcal{F} = -\int(LA + MB + NC)\,d\varpi + \Upsilon + \int\frac{\mathfrak{M}^2}{2K}\,d\varpi.$$

où les intégrations s'étendent toutes deux au volume occupé par le corps parfaitement doux.

On reconnaît sans peine que les équations (2) de l'équilibre magnétique équivalent à la proposition suivante :

Toute variation infiniment petite ($\delta A, \delta B, \delta C$) *imposée à l'aimantation, en chaque point d'un corps parfaitement doux, annule la variation première du potentiel interne :*

$$\delta \mathfrak{F} = 0. \tag{7}$$

3. Par analogie avec des propositions de Dynamique dont l'exactitude est démontrée, on est conduit à admettre le Postulat suivant :

1° *Toute distribution du magnétisme sur le corps soumis à l'aimantation, qui rend minimum le potentiel interne* $\mathfrak{F}$ *du système, définit un état d'équilibre magnétique stable.*

2° *Si une distribution magnétique vérifie la condition* (7), *mais ne rend pas minimum le potentiel interne* $\mathfrak{F}$, *et si, pour reconnaître qu'elle ne le rend pas minimum, il suffit de considérer le signe pris par la variation seconde* $\delta^2 \mathfrak{F}$, *cette distribution correspond à un état d'équilibre magnétique instable.*

La généralisation qui fournit ce Postulat n'est aucunement justifiée. Pour établir les propositions correspondantes de Dynamique, on applique les équations de la Dynamique aux mouvements des systèmes qu'on a l'intention d'étudier. Dans le système qui nous occupe en ce moment, le mouvement magnétique, constitué par une distribution magnétique variable d'un instant à l'autre, ne reçoit point ses lois des équations de la Dynamique, mais des équations de l'Électromagnétisme et de l'Électrodynamique qui en sont toutes différentes. En admettant le postulat précédemment énoncé, on peut fort bien être conduit à des conséquences que l'Électromagnétisme viendra ensuite contredire. C'est ce que nous aurons occasion de constater au cours du présent écrit.

Provisoirement, *en tout ce Chapitre I*, nous regarderons comme exact le postulat qui vient d'être énoncé et nous en déduirons divers corollaires.

4. Faisons croître respectivement de α, β, γ les composantes A, B, C de l'aimantation sur le corps qui se trouve soumis à l'action de l'aimant permanent. Le potentiel interne du système, qui avait la

valeur $\mathcal{F}$, prendra la valeur $(\mathcal{F} + \varphi)$. Si nous observons que

$$(8) \qquad \mathfrak{M}^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

et si nous posons

$$(9) \qquad w = \frac{\varepsilon}{2} \int\int \left(\alpha\alpha' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial x'} + \alpha\beta' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y'} + \alpha\gamma' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z'} \right.$$
$$+ \beta\alpha' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x'} + \beta\beta' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial y'} + \beta\gamma' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z'}$$
$$\left. + \gamma\alpha' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x'} + \gamma\beta' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial y'} + \gamma\gamma' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial z'} \right) d\varpi\, d\varpi',$$

nous trouverons sans peine qu'on peut écrire :

$$(10) \qquad \varphi = -\int \left[\left(L - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{A}{K} \right) \alpha + \left(M - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{B}{K} \right) \beta \right.$$
$$\left. + \left(N - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{C}{K} \right) \gamma \right] d\varpi$$
$$+ w + \frac{1}{2K} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\varpi.$$

Cette égalité est générale. Dans le *cas particulier où la distribution magnétique initiale est une distribution d'équilibre*, l'égalité (10), en vertu des égalités (2), se réduit à la forme extrêmement simple

$$(11) \qquad \varphi = w + \frac{1}{2K} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\varpi.$$

La quantité w est susceptible de transformations toutes semblables à celles qu'on a fait subir à la quantité Y.

Introduisons, en effet, la fonction potentielle $v(x, y, z)$ de la distribution additionnelle α, β, γ :

$$(12) \qquad v(x, y, z) = \int \left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d\varpi_1,$$

et nous aurons les égalités suivantes, analogues aux égalités (4) et (5),

$$(13) \qquad w = \frac{\varepsilon}{2} \int \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\varpi,$$

$$(14) \qquad w = \frac{\varepsilon}{2} \int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi.$$

Cette dernière expression de ω entraîne la conséquence suivante qui joue un rôle essentiel en tout ce qui va suivre :

Si la distribution additionnelle (α, β, γ) *n'est pas nulle en tout point du corps soumis à l'aimantation, la quantité* ω *est positive.*

5. Ce corollaire, joint à l'égalité (11), nous montre que, pour tout corps magnétique ($K > 0$), la quantité φ est positive, à moins que la distribution additionnelle (α, β, γ) ne soit nulle en tout point de ce corps. D'où cette proposition :

Sur un corps magnétique, la distribution d'équilibre correspond à un minimum absolu du potentiel interne du système.

Partant, en vertu du Postulat énoncé au n° **3**, *sur un corps magnétique, tout équilibre magnétique est stable.*

6. En une lettre adressée à Ernesto Cesàro, Eugenio Beltrami s'exprimait de la manière suivante [1] :

« ... L'energia d'un corpo diamagnetico avrebbe dunque un valore *negativo*.

» Questo risultato ne trae con sè un altro, che non è meno inverosimile. È noto che se alla distribuzione indotta in un corpo da azioni magnetiche esterne, date ed invariabili, si sovrappone un' altra distribuzione magnetica qualunque, il potenziale di tutto il sistema se accresce d'une quantità che è semplicemente eguale al potenziale della distribuzione sovrapposta all' indotta. Risulta di qui, tenendo conto del risultato precedente, che se il corpo indotto è paramagnetico, il potenziale totale aumenta quando cessa l'equilibrio d'induzione, mentre, se il corpo è diamagnetico, il potenziale diminuisce; nel primo caso dunque il potenziale totale sarebbe minimo nello stato d'equilibrio, nel secondo invece sarebbe massimo, cioè l'equilibrio d'induzione diamagnetica sarebbe instabile.

» Queste incongruenze mi sembrano tali di rendere sempre piu

---

(1) E. BELTRAMI, *Note fisico-matematiche* (*Lettera al Prof. Ernesto Cesàro*) [*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*. Adunanza del 10 Marzo 1889, t. III (1889)].

probabile la nota ipotesi di Faraday, d'una polarizzabilità di tutto lo spazio, con coefficiente positivo per questo come per ogni corpo in esso immerso: merce quest' ipotesi l'induzione diamagnetica viene ridotta, com'è noto, ad una mera apparenza. »

Le théorème que Beltrami a énoncé tout d'abord, et d'où il a déduit ces diverses conséquences, n'est point exact; on trouverait sans peine l'inadvertance qui a induit en erreur l'illustre géomètre. Sans nous attarder à cette recherche, nous allons établir une proposition manifestement contradictoire du théorème de Beltrami.

Sur un corps de figure donnée, plaçons une distribution magnétique quelconque (α, β, γ). La quantité w prendra une valeur positive qui ne dépendra aucunement de la nature de la matière qui forme ce corps; il en sera de même de la quantité

$$m = \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\varpi. \tag{15}$$

Si alors nous supposons ce corps taillé dans une matière diamagnétique dont le coefficient d'aimantation surpasse en valeur absolue $\frac{m}{2w}$,

$$|K| > \frac{m}{2w}, \tag{16}$$

il est bien clair que, pour ce corps et pour la distribution additionnelle (α, β, γ), la quantité φ, donnée par l'égalité (11), sera positive, contrairement à la proposition énoncée par Beltrami. Sur un tel corps diamagnétique, une distribution d'équilibre ne correspondra peut-être pas à un minimum du potentiel interne du système, mais, à coup sûr, elle ne correspondra pas à un maximum de ce même potentiel. Les considérations de Beltrami ne sauraient donc être conservées.

7. Comme au numéro précédent, imaginons un corps de figure déterminée et, sur ce corps, une distribution magnétique (α, β, γ); calculons les valeurs correspondantes des quantités w et m, puis taillons ce corps en une matière diamagnétique dont le coefficient d'aimantation soit, en valeur absolue, inférieur à $\frac{m}{2w}$:

$$|K| < \frac{m}{2w}. \tag{17}$$

Sur un corps de telle figure et de telle matière, la distribution magnétique additionnelle considérée fera prendre à la quantité φ, donnée par l'égalité (11), une valeur négative. D'où cette conclusion :

Il existe des corps diamagnétiques sur lesquels aucune distribution d'équilibre ne peut rendre minimum le potentiel interne du système; si, sur ces corps, à partir d'une distribution d'équilibre, on impose à l'aimantation un changement infiniment petit convenablement choisi, la variation seconde du potentiel interne prend une valeur négative.

Dès lors, si l'on admet le Postulat qui a été énoncé au n° 5, *sur un tel corps diamagnétique, tout équilibre magnétique est instable.*

Ces résultats reproduisent, sous une forme à la fois plus élémentaire et plus précise, ceux auxquels nous étions jadis parvenus [1].

8. Rien ne nous empêche, dans le raisonnement précédent, de supposer que l'aimantation (α, β, γ) soit une aimantation uniforme; or, en faisant cette supposition, nous allons obtenir des conclusions plus détaillées.

Désignons par ϖ le volume du corps soumis à l'aimantation et posons

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &P_x\varpi = \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial x_1}\,d\varpi\,d\varpi_1, \quad P_y\varpi = \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial y_1}\,d\varpi\,d\varpi_1, \quad P_z\varpi = \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial z_1}\,d\varpi\,d\varpi_1,\\ &T_x\varpi = \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z_1}\,d\varpi\,d\varpi_1, \quad T_y\varpi = \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x_1}\,d\varpi\,d\varpi_1, \quad T_z\varpi = \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y_1}\,d\varpi\,d\varpi_1,\end{aligned}\right.$$

les intégrations s'étendant toutes au corps considéré.

---

[1] P. Duhem, *Sur l'aimantation des corps diamagnétiques* (*Comptes rendus*, t. CVI, 1888, p. 736); *Sur l'aimantation par influence* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, 1888, pp. 47 et suiv.); *Sur l'impossibilité des corps diamagnétiques* (*Comptes rendus*, t. CVIII, 1889, p. 1042); *Des corps diamagnétiques* (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, t. I, n° 2; 1889); *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, Livre IX, Chap. VI, t. II, pp. 221 et suiv.

Les six quantités P_x, P_y, P_z, T_x, T_y, T_z dépendent uniquement de la figure du corps considéré; de plus, elles ne changent pas si l'on remplace ce corps par un corps semblable et semblablement placé.

Il est clair que, dans ces conditions, nous avons

$$w = \frac{\varepsilon}{2}(P_x\alpha^2 + P_y\beta^2 + P_z\gamma^2 + 2T_x\beta\gamma + 2T_y\gamma\alpha + 2T_z\alpha\beta)\varpi, \tag{19}$$

$$m = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\varpi. \tag{20}$$

Par un changement convenable d'axes de coordonnées, nous pourrons toujours faire que

$$P_x\alpha^2 + P_y\beta^2 + P_z\gamma^2 + 2T_x\beta\gamma + 2T_y\gamma\alpha + 2T_z\alpha\beta$$

se transforme en

$$S_1\alpha'^2 + S_2\beta'^2 + S_3\gamma'^2,$$

S_1, S_2, S_3 étant trois quantités qui, comme les quantités P et T, dépendent exclusivement de la figure du corps étudié et qui, de plus, sont les mêmes pour tous les corps semblables.

En même temps, la somme $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ se transformera en la somme $(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)$.

On voit alors que toute distribution additionnelle uniforme, déposée sur un corps de telle figure et de coefficient d'aimantation K, fera prendre à φ la valeur suivante :

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{2}(S_1\alpha'^2 + S_2\beta'^2 + S_3\gamma'^2)\varpi + \frac{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}{2K}\varpi. \tag{21}$$

Si les trois coefficients S_1, S_2, S_3 sont inégaux, soit S_1 le plus grand d'entre eux; d'une manière plus générale, soit S_1 un de ces coefficients choisi de telle sorte qu'aucun des deux autres ne lui soit supérieur. Si K est une quantité négative, inférieure, en valeur absolue, à l'inverse de εS_1,

$$\varepsilon|K| < \frac{1}{S_1}, \tag{22}$$

la valeur (21) de φ sera négative; l'addition, sur le corps considéré, à partir d'un état d'équilibre magnétique, de la distribution uniforme $(\alpha', \beta', \gamma')$ aura pour effet de faire décroître le potentiel interne du système.

Si donc on taille un corps dont la figure, donnée d'avance, correspond à une valeur bien déterminée de la quantité S_1, *dans une substance diamagnétique de coefficient d'aimantation assez petit pour que l'inégalité* (22) *soit vérifiée, l'équilibre magnétique d'un tel corps, placé en présence d'aimants permanents donnés, quelconques d'ailleurs, ne pourra jamais correspondre à un minimum du potentiel interne du système; le signe de la variation seconde de ce potentiel suffira à nous assurer qu'il n'est pas minimum.*

Dès lors, si l'on admet le Postulat formulé au n° **5**, on obtiendra cette proposition :

Sur un tel corps diamagnétique, l'équilibre magnétique sera toujours instable.

9. Appliquons ces considérations au cas particulier d'un ellipsoïde dont les trois axes, $2a$, $2b$, $2c$, soient respectivement dirigés suivant Ox, Oy, Oz.

Les formules données par Lejeune-Dirichlet conduisent sans peine au résultat suivant [1] :

Si l'on pose

$$(23)\qquad \begin{cases} \Phi = \pi abc \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \\ \mathrm{X} = \pi abc \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \\ \Psi = \pi abc \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \end{cases}$$

on a, en tout point intérieur à l'ellipsoïde,

$$(24)\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2\Phi\alpha, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2\mathrm{X}\beta, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 2\Psi\gamma.$$

La formule (13) donne alors

$$w = \varepsilon(\Phi\alpha^2 + \mathrm{X}\beta^2 + \Psi\gamma^2)\varpi$$

---

[1] P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. II, p. 132, égalités (10).

ou bien

$$(25) \qquad w = \frac{\varepsilon}{2}(S_1\alpha^2 + S_2\beta^2 + S_3\gamma^2)\varpi,$$

si l'on pose

$$(26) \qquad S_1 = 2\Phi, \qquad S_2 = 2X, \qquad S_3 = 2\Psi.$$

La quantité S_1 sera, d'ailleurs, comme il en a été convenu au numéro précédent, au moins égale à chacune des deux quantités S_2, S_3 si l'on a eu soin de placer l'ellipsoïde de telle manière que l'axe $2a$ soit au plus égal à chacun des deux autres $2b$, $2c$:

$$(27) \qquad a \leqq b, \qquad a \leqq c.$$

On voit donc que, *sur un ellipsoïde taillé dans une substance diamagnétique et placé en présence d'aimants permanents quelconques, aucune distribution magnétique ne peut correspondre à un minimum du potentiel interne du système, si le coefficient d'aimantation est assez petit en valeur absolue pour qu'on ait l'inégalité*

$$(28) \qquad \frac{1}{\varepsilon|K|} > 2\pi abc\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

l'axe $2a$ de l'ellipsoïde n'étant supérieur à aucun des deux autres, $2b$, $2c$.

Si l'on admet le Postulat énoncé au n° **5**, on pourra dire que, *sur un tel ellipsoïde diamagnétique, tout équilibre magnétique serait instable.*

10. Quelle figure faut-il donner à l'ellipsoïde pour que la limite supérieure imposée par l'inégalité (28) à la quantité $\varepsilon|K|$ ait la plus grande valeur possible?

On reconnaît sans peine que, pour des ellipsoïdes homothétiques, le second membre de l'inégalité (28) a même valeur. Dès lors, pour résoudre le problème posé, il nous suffit de faire varier b et c en laissant a invariable.

Écrivons le second membre de l'inégalité (28) sous la forme

$$(29) \qquad 2\pi a\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)}},$$

et nous reconnaissons immédiatement que cette quantité prend sa plus petite valeur lorsque les demi-axes b et c prennent, eux aussi, les valeurs les plus petites dont ils soient susceptibles; or, en vertu des conditions (27), ces valeurs sont

$$b = a, \qquad c = a.$$

Le second membre de l'inégalité (28) prend donc sa plus petite valeur lorsque l'ellipsoïde considéré a la figure d'une sphère. Cette valeur est, d'ailleurs,

(30) $$2\pi a^3 \int_0^\infty (a^2 + \lambda)^{-\frac{5}{2}} d\lambda = \frac{4}{3}\pi.$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante :

Si une sphère, taillée dans une substance diamagnétique dont le coefficient d'aimantation vérifie la condition

(31) $$\varepsilon |K| < \frac{3}{4\pi},$$

est placée en présence d'aimants permanents, aucune distribution magnétique ne peut, sur cette sphère, correspondre à un minimum du potentiel interne; partant, sur cette sphère, tout équilibre magnétique est instable, si l'on admet le Postulat formulé au n° **5**.

Ce théorème peut, d'ailleurs, s'établir directement, sans recourir aux formules de l'attraction des ellipsoïdes. En tout point intérieur à une sphère qui porte une aimantation uniforme (α, β, γ), on a

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4}{3}\pi\alpha, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4}{3}\pi\beta, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{4}{3}\pi\gamma,$$

en sorte que l'égalité (13) donne

(32) $$w = \frac{2}{3}\pi\varepsilon(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\varpi$$

et, par conséquent,

(33) $$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{4}{3}\pi.$$

11. Si l'on écrit le second membre de la condition (28) sous la forme (29), on voit qu'il est toujours inférieur à la quantité

$$2\pi a \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} - 4\pi,$$

dont on peut, d'ailleurs, en prenant un ellipsoïde suffisamment aplati, le rendre aussi voisin que l'on voudra. Si donc, on a l'inégalité

(34) $$\varepsilon |k| < \frac{1}{4\pi},$$

l'inégalité (28) se trouvera vérifiée pour tous les ellipsoïdes possibles.

D'où la conclusion suivante :

Si le coefficient d'aimantation d'une substance diamagnétique vérifie la condition (34), *aucun ellipsoïde, taillé en une telle substance, ne pourra, en présence d'aimants permanents, se recouvrir d'une distribution magnétique qui rende minimum le potentiel interne du système.* Si l'on admet le postulat énoncé au n° **5**, *aucun ellipsoïde taillé en une telle substance ne pourra être le siège d'un équilibre magnétique stable.*

12. De ce théorème il nous est maintenant facile de conclure cette autre proposition, qui est entièrement générale :

Sur un corps diamagnétique DE FORME QUELCONQUE, *placé en présence d'aimants permanents, aucune distribution magnétique ne peut rendre minimum le potentiel interne du système, si le coefficient d'aimantation de ce corps vérifie la condition* (34). Si donc on admet le Postulat formulé au n° **5**, *un tel corps ne saurait, en aucun cas, être le siège d'un équilibre magnétique stable.*

En effet, l'emploi de la formule (11) n'impose aucune restriction, *pas même la continuité*, à la distribution additionnelle (α, β, γ). Il nous est permis de supposer que cette distribution, généralement différente de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ en une partie du corps, soit nulle en tous les points de l'autre partie. Dès lors, l'intégration qui figure au second membre de l'égalité (11) et les deux intégrations qu'il faut,

selon la formule (9), effectuer pour obtenir la valeur de ϖ, s'étendront simplement, toutes trois, à la partie du corps pour laquelle la distribution additionnelle n'est pas identiquement nulle.

Cette remarque faite, dessinons à l'intérieur du corps considéré un ellipsoïde de figure quelconque; supposons que la distribution additionnelle, nulle en tout point extérieur à l'ellipsoïde, soit uniforme à l'intérieur de l'ellipsoïde; le théorème démontré au numéro **11** nous donnera la proposition que nous venons d'énoncer.

13. *La proposition précédente demeure vraie même pour un corps diamagnétique dont le coefficient d'aimantation vérifie seulement la condition*

$$\varepsilon |K| < \frac{3}{4\pi}. \tag{31}$$

On le reconnaît en reprenant la démonstration précédente, mais en donnant la figure d'une sphère à la partie du corps pour laquelle la distribution additionnelle n'est pas nulle.

En vertu de ce qui a été dit à la fin du n° **10**, cette dernière démonstration peut être présentée sans qu'il soit fait usage de formules relatives à l'attraction des ellipsoïdes.

14. Si donc, on admet la légitimité de la seconde partie du Postulat énoncé au n° **3**, l'existence de substances diamagnétiques pour lesquelles on aurait à la fois

$$\left\{ \begin{array}{l} K < 0, \\ 1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon K > 0, \end{array} \right. \tag{31 bis}$$

apparaît comme une impossibilité naturelle.

Or, ces conditions (31 *bis*) sont précisément vérifiées par toutes les substances diamagnétiques connues. Le bismuth est, de tous les corps diamagnétiques, celui pour lequel le coefficient d'aimantation K a la plus grande valeur absolue; or, pour ce corps,

$$\varepsilon K = -146 \times 10^{-7}.$$

On se trouve donc en présence de l'alternative suivante :

On bien l'existence de corps faiblement diamagnétiques, tels que

ceux dont la nature semble nous fournir des exemples, est une impossibilité : les corps naturels ne sont diamagnétiques qu'en apparence : l'éther du vide est, lui-même, magnétique ; les corps qui nous paraissent diamagnétiques sont simplement ceux qui sont moins magnétiques que l'éther du vide.

Ou bien le Postulat formulé au n° **3** n'est pas exact.

Dans ces conditions, il est évidemment fort important de demander à l'Électrodynamique et à l'Électromagnétisme toutes les raisons, propres à confirmer ou à infirmer ce Postulat, que ces sciences peuvent nous fournir.

CHAPITRE II.

LA STABILITÉ DU DIAMAGNÉTISME SELON LES LOIS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME.

15. Pour les corps magnétiques, le Postulat énoncé au n° **3** entraîne la stabilité de tout équilibre magnétique. En imitant la méthode suivie par Lejeune-Dirichlet dans l'étude de la stabilité des systèmes purement mécaniques, et en généralisant une démonstration que Helmholtz avait développée au sujet de la stabilité de l'équilibre électrique, nous avons déduit ailleurs, des équations de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme, un théorème tout à fait général (1). Ce théorème renferme, en particulier, la justification de ce qui, en notre postulat, concerne les corps magnétiques. Nous allons, sans reprendre la démonstration, reproduire ici l'énoncé de ce corollaire du théorème général. En cet énoncé, nous introduirons certaines précisions qui ne sont pas indiquées en notre ancienne exposition. Ces précisions, qui visent la définition même de la stabilité de l'équilibre magnétique.

---

(1) P. DUHEM, *Sur la propagation des actions électrodynamiques*, Chap. IV ; *Stabilité de l'équilibre électrique et magnétique sur les corps immobiles* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, 1896, pp. B.41-B.49). En cette démonstration, nous supposions que les corps susceptibles de prendre l'aimantation ou la polarisation diélectrique sont laissés à eux-mêmes et non point, comme nous l'admettrons ici, soumis à l'influence d'un corps permanent dont l'aimantation, l'électrisation, la polarisation diélectrique, les courants électriques sont invariables ; mais il suffit d'apporter à notre démonstration une modification insignifiante et que le lecteur trouvera sans peine pour qu'elle s'étende à un système où figure un tel corps permanent.

sont rendues nécessaires par les difficultés qu'on rencontre toutes les fois qu'on veut appliquer la méthode de Lejeune-Dirichlet à un système qui ne dépend pas simplement d'un nombre limité de paramètres variables.

Venons donc à cette définition.

Un ou plusieurs corps susceptibles d'être aimantés, d'être électrisés, de subir une polarisation électrique, d'être parcourus par des courants électriques, sont mis en présence de corps immobiles et permanents; sur ces derniers, distribution magnétique, distribution électrique, polarisation diélectrique, courants électriques sont supposés donnés et rigoureusement invariables.

Sur les corps non permanents, s'est établi, par hypothèse, un certain état d'équilibre magnétique et diélectrique.

A cet état d'équilibre on apporte, d'une façon qu'on n'a pas à indiquer, une certaine perturbation initiale. Cette perturbation consiste à superposer certaines distributions additionnelles aux distributions magnétique, électrique et diélectrique qui caractérisent l'état d'équilibre, et à lancer, dans la masse des corps non permanents, certains courants électriques.

L'aimantation, l'électrisation, la polarisation du système se mettent à varier; considérons, en particulier, l'aimantation; à un instant t postérieur à la perturbation, en un point (x, y, z) d'un corps non permanent, on n'a plus l'aimantation (A, B, C) qu'on avait tant que durait l'équilibre, mais une aimantation $(A+\alpha, B+\beta, C+\gamma)$, α, β, γ variant avec le temps t.

Une constante positive D étant donnée, arbitrairement d'ailleurs, supposons qu'aux valeurs absolues des intensités d'aimantation, des densités électriques, des intensités de polarisation diélectrique, des densités de courant électrique qui caractérisent la perturbation initiale, on puisse, en chaque point des corps non permanents, imposer des limites supérieures telles qu'on ait, quel que soit t,

$$\int (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,d\varpi < D.$$

On dira que *l'équilibre magnétique est stable* sur le système considéré.

Or, le théorème général dont nous avons parlé renferme le corollaire suivant :

La stabilité de l'équilibre magnétique sur un système quelconque est assurée à trois conditions :

1° *La constante qu'Helmholtz a introduite en Électrodynamique et qu'il a désignée par la lettre k n'est pas négative;*

2° *Sur aucun corps non permanent, le coefficient de polarisation diélectrique n'est négatif;*

3° *Aucun de ces corps n'a un coefficient d'aimantation négatif.*

Or : 1° Helmholtz avait annoncé qu'on ne pouvait, sans impossibilité physique, attribuer à la constante *k* une valeur négative; la démonstration qu'il avait donnée à l'appui de cette affirmation ne pouvait être, assurément, regardée comme convaincante; mais nous en avons donné une autre (¹) qui ne laisse rien à désirer, croyons-nous, au point de vue de la rigueur.

2° En même temps, nous avons démontré, d'une manière entièrement générale, que l'existence d'une substance diélectrique dont le coefficient de polarisation serait négatif constituerait une autre impossibilité physique.

Nous pouvons donc énoncer sans restriction le théorème suivant : *La stabilité de l'équilibre magnétique est assurée sur un système où les aimants non permanents ont tous des coefficients d'aimantation positifs.*

L'Électrodynamique et l'Électromagnétisme justifient ainsi la proposition à laquelle nous avions été conduits, au n° **5**, en appliquant à des corps magnétiques le Postulat qui avait été énoncé au n° **5**. Reste à examiner si l'application de ce Postulat aux corps diamagnétiques est légitime.

16. Les raisonnements que nous allons développer supposent que le corps capable de s'aimanter soit placé dans des conditions toutes différentes de celles qui ont été considérées jusqu'ici.

(¹) P. DUHEM, *Sur la stabilité électrique d'un milieu homogène et illimité* (*Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechszigsten Geburtstage*, 20 Februar 1904, pp. 15-27).

Jusqu'ici, nous supposions que ce corps était soumis à l'action d'autres corps que nous nommions *permanents*. Les corps permanents, invariables de figure et de position, portent une aimantation donnée et sont traversés par des courants électriques également donnés. En tout point de l'espace qui leur est extérieur et, en particulier, en tout point du volume occupé par le corps soumis à l'aimantation, ces corps engendrent un champ magnétique donné, auquel se superpose un second champ magnétique produit par l'aimantation qui s'est développée sur le corps considéré. En aucun point, ce dernier champ n'est donné; le problème posé revient à la détermination de la grandeur et de la direction prises par ce champ en tous les points du corps soumis à l'aimantation.

Nous allons supposer maintenant de tout autres conditions. Nous supposerons les corps extérieurs, dont le corps que nous voulons étudier subit l'action, tellement disposés que la proposition suivante soit véritable :

En tout point intérieur au corps soumis à l'aimantation, et infiniment voisin de la surface qui borne ce corps, le CHAMP TOTAL (L, M, N) *a une grandeur et une direction données.*

Ce champ total résulte de la superposition du champ engendré par les courants et par les aimants extérieurs, et du champ créé par l'aimantation qui s'est développée sur ce corps et par les courants qui le traversent. Si cette aimantation et ces courants viennent à changer, ils amèneront, en général, des variations dans la grandeur et la direction du second champ en tous les points de l'espace. Les aimants et les courants extérieurs devront alors éprouver des changements tellement combinés qu'ils aient pour effet, aux divers points intérieurs au corps soumis à l'aimantation, mais infiniment voisins de la surface de ce corps, de compenser exactement les variations du champ de ce corps, et de maintenir au champ total la grandeur et la direction qui lui ont été assignées. On voit bien que les aimants et les courants extérieurs ne pourront plus être, en général, des corps permanents.

Les corps extérieurs capables de donner les conditions que nous venons de définir constituent évidemment une abstraction, une pure fiction; il ne saurait être question de chercher une disposition pra-

tique qui permît de réaliser à peu près ces conditions. Mais on peut remarquer que l'aimant permanent est déjà, lui aussi, une fiction. En l'étude de la conductibilité de la chaleur, on introduit des corps extérieurs fictifs fort analogues à ceux que nous venons de définir, lorsqu'on suppose ces corps capables de maintenir une valeur donnée à la température, en chaque point de la surface de la masse à l'intérieur de laquelle on recherche la distribution des températures.

En tout point (x, y, z) intérieur au corps qui est soumis à l'aimantation, l'intensité d'aimantation (A, B, C) est liée au champ total (L, M, N) par les égalités

$$A = kL, \qquad B = kM, \qquad C = kN.$$

La condition précédemment formulée peut donc être remplacée par la suivante :

Le corps étudié est soumis à des influences telles qu'en tout point qui lui est intérieur et qui est infiniment voisin de la surface qui le borne, l'aimantation garde une grandeur et une direction données.

17. Considérons d'abord le cas où le corps étudié est conducteur de l'électricité, mais se trouve privé de tout pouvoir diélectrique. En ce cas, la composante A de l'intensité d'aimantation varie selon la loi que voici (¹) :

$$\Delta A - \frac{4\pi(1 + 4\pi\varepsilon k)}{\rho} \frac{a^2}{2} \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \tag{35}$$

dans laquelle ρ est la résistance spécifique (résistivité) du milieu, et $\frac{a^2}{2}$ la constante fondamentale des actions électrodynamiques.

Les composantes B et C vérifient des équations semblables.

Supposons qu'on se donne :

1° A l'instant $t = 0$, les valeurs A_0, B_0, C_0 de A, B, C, en tout point du corps;

(¹) P. DUHEM, *Sur la propagation des actions électrodynamiques*, équations (181) et (182) (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, pp. B.62-B.63).

2° A tout instant t, les valeurs prises par A, B, C, en tout point qui est intérieur au corps et infiniment voisin de la surface terminale S.

Le mouvement magnétique se trouvera-t-il entièrement déterminé par l'équation (35) et par les équations analogues?

Imaginons que ces équations comportent deux solutions distinctes. Selon l'une de ces solutions, au point (x, y, z) et à l'instant t, l'aimantation a des composantes A, B, C; selon l'autre, au même point et au même instant, elle a des composantes $A + \alpha$, $B + \beta$, $C + \gamma$. Les conditions données nous enseignent :

1° Qu'à l'instant $t = 0$, on a, dans toute la masse du corps étudié,

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0; \tag{36}$$

2° Qu'en tout point de la surface S, on a, quel que soit t,

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0. \tag{37}$$

Les deux quantités A et $A + \alpha$ vérifient également l'équation (35); leur différence α doit aussi vérifier cette équation; on a ainsi

$$\Delta\alpha - \frac{4\pi(1 + 4\pi\varepsilon K)}{\rho} \frac{a^2}{2} \frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0. \tag{38}$$

Multiplions par $\alpha\, d\varpi$ les deux membres de cette équation (38), et intégrons pour le volume entier du corps étudié; nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \alpha^2\, d\varpi = \frac{\rho}{\pi a^2(1 + 4\pi\varepsilon K)} \int \alpha\, \Delta\alpha\, d\varpi.$$

L'emploi du théorème de Green et de la première condition (37) nous permet de transformer cette égalité en la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \alpha^2\, d\varpi = -\frac{\rho}{\pi a^2(1 + 4\pi\varepsilon K)} \int \left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi. \tag{39}$$

Si $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est positif, le second membre de cette égalité (39) ne peut jamais être positif. La quantité $\int \alpha^2\, d\varpi$, qui ne peut pas être négative, ne peut non plus être fonction croissante de t. Or, pour $t = 0$, elle est nulle, en vertu des conditions (36). Elle est donc constamment nulle, ce qui exige qu'on ait, en tout point du corps et à tout instant,

$$\alpha = 0.$$

On démontrerait de même qu'on a, en tout point du corps et à tout instant,

$$\beta = 0, \qquad \gamma = 0,$$

ce qui justifierait la proposition suivante :

Quel que soit le signe du coefficient d'aimantation K, *si le binôme* $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est positif, le mouvement magnétique sur un corps est déterminé sans ambiguïté par la connaissance, à l'instant initial, de l'aimantation en toute la masse du corps et, à tout instant, de l'aimantation aux points infiniment voisins de la surface de ce corps.*

18. Étudions maintenant la stabilité d'un tel mouvement.

Un premier mouvement est déterminé sans ambiguïté par une certaine aimantation initiale dont nous désignerons par A_0, B_0, C_0 les composantes en un point quelconque de l'aimant, et par une aimantation, à chaque instant connue, en tout point de la surface limite de l'aimant. En ce premier mouvement, les composantes de l'aimantation, au point (x, y, z) et à l'instant t, sont désignées par A, B, C.

Un second mouvement est déterminé en gardant à chaque point infiniment voisin de la surface, en chaque instant, une aimantation identique à celle que possédait le même point au même instant, au cours du premier mouvement, mais en prenant une autre aimantation initiale $A_0 + \alpha_0$, $B_0 + \beta_0$, $C_0 + \gamma_0$. Au cours de ce second mouvement, l'aimantation au point (x, y, z) et à l'instant t aura pour composantes $A + \alpha$, $B + \beta$, $C + \gamma$.

Soit D *une constante positive arbitrairement choisie ; si l'on peut, aux valeurs absolues de* α_0, β_0, γ_0, *imposer des limites supérieures telles qu'on ait, quel que soit* t,

$$\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\varpi < D, \tag{40}$$

on dira que le premier mouvement est un mouvement stable.

Les conditions (37) sont, ici encore, vérifiées quel que soit t, ce qui nous permet de récrire l'égalité (39). Or, si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est positif, cette égalité nous démontre que la quantité $\int \alpha^2\, d\varpi$ ne peut

être fonction croissante de t, en sorte qu'elle ne peut jamais surpasser sa valeur initiale $\int \alpha_0^2 \, d\varpi$. Les quantités $\int \beta^2 \, d\varpi$, $\int \gamma^2 \, d\varpi$ justifient des propositions analogues. La condition (40) sera donc assurément vérifiée, quel que soit t, si l'on a

$$\int (\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2) \, d\varpi < D.$$

D'où le théorème suivant :

Quel que soit le signe du coefficient d'aimantation K, *tout mouvement magnétique est assurément stable sur un corps pour lequel le binôme* $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est positif :*

$$1 + 4\pi\varepsilon K > 0. \tag{41}$$

19. Imaginons qu'au lieu d'être des fonctions données du temps, les composantes A, B, C de l'aimantation, en tout point infiniment voisin de la surface du corps, soient des constantes. Le mouvement magnétique compatible avec ces données, mouvement que nous savons être déterminé sans ambiguïté, est l'équilibre magnétique. Or, ce mouvement doit être stable. Donc :

Imaginons que, sur un corps, on maintienne invariables la grandeur et la direction de l'aimantation en tout point infiniment voisin de la surface qui limite ce corps. Quel que soit le signe du coefficient d'aimantation K, *si le binôme* $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est positif, tout équilibre magnétique réalisé en de telles conditions est stable.*

20. Voyons maintenant ce qu'on peut dire au sujet de la stabilité du mouvement magnétique ou de l'équilibre magnétique sur un corps diamagnétique pour lequel la condition

$$1 + 4\pi\varepsilon K < 0 \tag{42}$$

est vérifiée.

Gardons toutes les notations employées au n° **18**, et différentions par rapport à t les deux membres de l'égalité (39); nous trouvons

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \alpha^2 \, d\varpi = - \frac{2\rho}{\pi a^2 (1 + 4\pi\varepsilon K)} \int \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \, \partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \, \partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \, \partial t} \right) d\varpi.$$

Mais l'emploi des égalités (37) permet d'écrire

$$\int\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi=-\int\Delta\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}\,d\varpi.$$

A son tour, le second membre de cette égalité peut, en vertu de l'équation (38), s'écrire

$$-\frac{\rho}{2\pi a^2(1+4\pi\varepsilon K)}\int(\Delta\alpha)^2\,d\varpi.$$

Nous trouvons donc, tout calcul fait,

$$(43)\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\alpha^2\,d\varpi=\frac{\rho^2}{\pi^2a^4(1+4\pi\varepsilon K)^2}\int(\Delta\alpha)^2\,d\varpi.$$

Cette égalité (43), dont le second membre ne peut pas être négatif, nous apprend que la quantité $\frac{\partial}{\partial t}\int\alpha^2\,d\varpi$ ne peut jamais être fonction décroissante de t; elle garde, quel que soit t, une valeur au moins égale à la valeur δ qu'elle avait pour $t=0$.

Or, l'égalité (39) nous donne

$$(44)\qquad \delta=-\frac{\rho}{\pi a^2(1+4\pi\varepsilon K)}\int\left[\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi.$$

Les quantités α_0, β_0, γ_0 doivent vérifier les conditions (37); α_0 est donc nul en tout point infiniment voisin de la surface S; d'autre part, parmi les trois quantités α_0, β_0, γ_0, il en est assurément au moins une qui n'est pas nulle en tous les points du corps aimanté; nous pouvons toujours supposer qu'on ait choisi les axes de coordonnées de telle sorte que α_0 ne soit pas nul en tout point du corps aimanté; dès lors, on ne pourra pas avoir, en tout point de ce corps,

$$\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\alpha_0}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\alpha_0}{\partial z}=0.$$

La quantité

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi$$

aura une valeur positive et, si l'inégalité (42) est vérifiée, δ aura aussi, en vertu de l'égalité (44), une valeur positive.

Par conséquent, $\frac{\partial}{\partial t}\int\alpha^2\,d\varpi$ demeure, quel que soit t, au moins égal

à une valeur positive δ et $\int \alpha^2 d\varpi$ croît au delà de toute limite avec t.

D'où la conclusion suivante :

Si, pour un corps diamagnétique, le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est négatif, tout mouvement magnétique et, en particulier, tout équilibre magnétique, obtenus sur ce corps dans les conditions indiquées, sont instables.*

21. Nous allons reprendre maintenant les problèmes que nous avons traités aux n^{os} **17**, **18**, **19** et **20**, en supposant que le corps susceptible d'aimantation soit également capable de polarisation diélectrique; K' sera le coefficient de cette polarisation diélectrique; en tout ce Chapitre, *nous le supposerons positif*.

Pour laisser aux problèmes traités leur entière généralité, nous supposerons que le corps étudié soit conducteur de l'électricité; si l'on voulait qu'il fût isolant, on n'aurait qu'à biffer, en toutes nos équations, les termes qui renferment en facteur l'inverse $\frac{1}{\rho}$ de la résistance spécifique.

Des trois équations du mouvement magnétique, voici, alors, quelle est la première [1] :

$$\frac{1}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)} \Delta A - \frac{1}{\rho K'} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \tag{45}$$

Les deux autres s'en déduisent en remplaçant A par B ou par C.

Supposons qu'on se donne :

1° A l'instant $t = 0$, les valeurs de A, B, C, $\frac{\partial A}{\partial t}$, $\frac{\partial B}{\partial t}$, $\frac{\partial C}{\partial t}$ en tous les points du corps soumis à l'aimantation;

2° A chaque instant t, les valeurs de A, B, C en tout point intérieur au corps et infiniment voisin de la surface qui borne ce corps.

Demandons-nous si, dans ces conditions, le mouvement magnétique sera entièrement déterminé sur ce corps.

---

[1] P. Duhem, *loc. cit.* Les deux constantes que nous représentions alors par $\mathfrak{A}^2$ et par $\mathfrak{C}^2$, doivent être prises identiques entre elles et à a^2.

Gardons les notations qui ont été employées au n° **17**.

D'après les conditions qui viennent d'être posées, on aura :

1° A l'instant initial $t = 0$, en tout point du corps,

$$(46)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \alpha = 0, & \beta = 0, & \gamma = 0, \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial\beta}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial t} = 0. \end{array}\right.$$

2° Quel que soit t, en tout point du corps infiniment voisin de la surface qui le borne,

$$(37)\qquad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

En outre, en vertu de l'égalité (45), on aura constamment

$$(47)\qquad \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\Delta\alpha - \frac{1}{\rho K'}\frac{\partial\alpha}{\partial t} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = 0.$$

Multiplions par $2\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}$ les deux membres de cette égalité et intégrons, pour le volume entier du corps, les résultats obtenus; nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi - \frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\int\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\alpha\, d\varpi = -\frac{2}{\rho K'}\int\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi.$$

A l'aide du théorème de Green et des conditions (37), cette égalité devient

$$(48)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\int\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right]\right\} d\varpi \\ &\qquad = -\frac{2}{\rho K'}\int\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi. \end{aligned}$$

Le second membre de l'égalité (48) ne peut jamais être positif. La quantité

$$(49)\qquad U = \int\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right]\right\} d\varpi$$

ne peut donc jamais être fonction croissante de t.

D'après les conditions (46), cette quantité est nulle pour $t = 0$.

Enfin, si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est positif, cette quantité ne peut jamais être négative.

Dès lors, on doit avoir, quel que soit t,

$$U = 0,$$

ce qui exige qu'on ait, à tout instant et en tout point du corps,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0,$$

$$(50) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0.$$

En vertu des égalités (37), pour que les égalités (50) aient lieu à tout instant et en tout point du corps, il faut et il suffit qu'on ait aussi à tout instant et en tout point du corps,

$$\alpha = 0.$$

On démontrerait de même qu'on a, à tout instant et en tout point du corps,

$$\beta = 0, \qquad \gamma = 0,$$

ce qui justifierait le théorème suivant:

Si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est positif, tout mouvement magnétique sur le corps considéré est déterminé, sans aucune ambiguïté, par les conditions qui lui ont été imposées.*

22. Nous allons maintenant nous occuper de la stabilité d'un tel mouvement. Dans ce but, nous garderons les notations dont nous avons fait usage au n° **18**, mais nous changerons la définition de la stabilité qui a été donnée en cet endroit.

Soient E *et* F *deux constantes positives données d'avance, arbitrairement d'ailleurs. Si, aux valeurs absolues initiales de*

$$\alpha_0, \qquad \beta_0, \qquad \gamma_0,$$

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \alpha_0}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \alpha_0}{\partial z}, \qquad \dots,$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right)_0,$$

on peut, en tout point du corps, imposer des limites supérieures

telles qu'on ait, quel que soit t,

$$(51)\quad \int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2 +\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi < \mathrm{E},$$

$$(52)\quad \int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)^2\right]d\varpi = \mathrm{F}.$$

le mouvement considéré sera un mouvement stable.

Pour reconnaître la grande différence qui existe entre cette définition de la stabilité et celle qui a été donnée au n° **18**, il suffit de faire la remarque suivante :

En vertu de la première condition (37), aucune des deux intégrales

$$\int \alpha^2\, d\varpi, \qquad \int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi,$$

ne peut s'annuler à moins que l'autre ne s'annule en même temps; mais il n'est pas permis d'affirmer qu'elles sont infiniment petites ensemble ni qu'elles sont infiniment grandes ensemble.

L'égalité (48) nous permet d'écrire, quel que soit t,

$$\int\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2\pi a^2\mathrm{K}(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\varpi = \int\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0^2+\frac{1}{2\pi a^2\mathrm{K}(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})}\left[\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\varpi.$$

Si le binome $(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})$ est positif, nous en déduisons les deux conditions, vérifiées quel que soit t,

$$(53)\quad \int\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi \leq \int\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0^2+\frac{1}{2\pi a^2\mathrm{K}'(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})} \times\left[\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\varpi.$$

$$(54)\quad \int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi \leq \int\left[2\pi a^2\mathrm{K}'(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi.$$

Pour chacune des deux quantités β et γ, on peut établir deux conditions analogues aux conditions (53) et (54).

Dès lors, désignons par G la plus petite des deux quantités positives

$$\frac{E}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} \quad \text{et} \quad F.$$

Il est clair qu'aux valeurs absolues de

$$\alpha_0, \qquad \beta_0, \qquad \gamma_0,$$
$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \alpha_0}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \alpha_0}{\partial z}, \qquad \ldots,$$
$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right)_0,$$

nous pouvons assigner des limites supérieures telles que nous ayions l'inégalité

$$(55) \quad \int \left\{ \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} \left[\left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial z}\right)^2 \right] + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)_0^2 + \ldots \right\} d\varpi < G,$$

dans laquelle $+ \ldots$ désigne des termes qui se déduisent de ceux qui sont explicitement écrits en remplaçant α d'abord par β, puis par γ.

Cela fait, les conditions (53) et (54) nous assurent que les inégalités (51) et (52) seront vérifiées quel que soit t.

D'où la conclusion suivante :

Si le binôme $(1+4\pi\varepsilon K)$ *est positif, tout mouvement magnétique obtenu sur le corps considéré est stable dans les conditions indiquées.*

Cette proposition est vraie, en particulier, de l'équilibre magnétique qu'on obtient en maintenant invariables la grandeur et la direction de l'aimantation en chaque point intérieur au corps et infiniment voisin de la surface de ce corps.

25. Nous allons montrer maintenant que, *dans les conditions indiquées, tout mouvement magnétique et, en particulier, tout équilibre magnétique est instable si le binôme* $(1+4\pi\varepsilon K)$ *est négatif.*

Considérons la quantité

$$(56)\qquad U=\int\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\varpi.$$

L'égalité (48) nous donne

$$(57)\qquad \frac{dU}{dt}=2\int\left(\frac{1}{\rho K'}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+2\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

En vertu de l'équation (47), cette dernière égalité peut encore s'écrire

$$(58)\qquad \frac{dU}{dt}=4\int\left[\frac{\Delta\alpha}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}-\frac{1}{\rho K'}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right]\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

L'égalité (57) nous donne

$$\frac{d^2U}{dt^2}=4\int\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi+4\int\left(\frac{1}{\rho K'}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}+\frac{\partial^3\alpha}{\partial t^3}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

Si l'on compare cette égalité à celle qu'on obtient en différentiant l'égalité (47) par rapport à t, on voit qu'on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{d^2U}{dt^2}=4\int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)^2+\frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right]d\varpi$$

que l'emploi du théorème de Green et des conditions (37) transforme en

$$(59)\qquad \frac{d^2U}{dt^2}=4\int\left\{\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)^2 -\frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\left[\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]\right\}d\varpi.$$

Si le binôme $(1+4\pi\varepsilon K)$ est négatif, cette égalité nous montre que $\frac{d^2U}{dt^2}$ ne peut jamais être négatif. La fonction $\frac{dU}{dt}$ ne peut donc, à aucun moment, être fonction décroissante de t; quel que soit t, elle demeure au moins égale à sa valeur initiale $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$.

Or, on voit aisément qu'on peut, sans franchir les limites supérieures imposées aux valeurs absolues de α_0 et de $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$, faire en sorte que la quantité $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ soit positive.

En effet, en sus des conditions qui imposent des limites supérieures à leurs valeurs absolues, les quantités α_0 et $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$ sont assujetties seulement à s'annuler en tout point infiniment voisin de la surface qui limite le corps.

Sans nous occuper tout d'abord des limites supérieures imposées aux valeurs absolues de α_0, de $\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}$, $\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}$, $\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}$ et de $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$, prenons pour valeur de $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$ le produit d'une constante λ par une fonction continue quelconque de x, y, z, $f(x, y, z)$, assujettie seulement à s'annuler en tout point de la surface qui limite le corps. Choisissons ensuite une autre fonction continue $g(x, y, z)$, nulle à la surface du corps, et telle que

$$\frac{g(x, y, z)}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} - \frac{f(x, y, z)}{\rho K'}$$

ait, en chaque point, le signe de $f(x, y, z)$; puis déterminons α_0 par les conditions de s'annuler à la surface du corps et de vérifier, en tout point du corps, l'équation

$$\Delta\alpha_0 = \lambda g(x, y, z).$$

Toutes choses égales d'ailleurs, α_0 sera proportionnel à λ.

On pourra maintenant donner à λ une valeur absolue assez petite pour que les valeurs absolues de α_0, de $\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}$, $\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}$, $\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}$ et de $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$ ne surpassent, en aucun point, les limites supérieures qui leur ont été assignées.

Mais, d'autre part, en vertu de l'égalité (58), on aura

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = 4\lambda^2 \int \left[\frac{g(x, y, z)}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} - \frac{f(x, y, z)}{\rho K'}\right] f(x, y, z)\, d\varpi$$

et le second membre de cette égalité est assurément positif.

Comme nous l'avons vu, $\frac{dU}{dt}$ ne pourra jamais devenir inférieur à cette valeur positive initiale. Donc U croîtra au delà de toute limite avec t.

Si l'on se reporte alors à l'expression (56) de U, on voit que, quelque petites que soient les limites supérieures imposées aux valeurs

absolues des quantités

$$\alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial z}, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial t},$$

on peut toujours disposer de ces quantités de telle sorte que l'une au moins des quantités

$$\int \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi, \qquad \int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi$$

croisse au delà de toute limite avec t, ce qui établit l'instabilité annoncée.

24. On peut reprendre les problèmes traités aux deux numéros précédents, mais en adoptant une nouvelle définition de la stabilité qui n'est équivalente ni à celle dont il a été fait usage en ces deux numéros ni à celle qui a été donnée au n° **18**. Voici cette définition :

e et f étant deux quantités positives arbitrairement choisies d'avance, si l'on peut, aux valeurs absolues de α_0, β_0, γ_0 et de leurs dérivées premières et secondes par rapport à x, y et z, de $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right)_0$ et de leurs dérivées premières par rapport à x, y et z, imposer des limites supérieures telles qu'on ait, quel que soit t,

$$\int [(\Delta\alpha)^2 + (\Delta\beta)^2 + (\Delta\gamma)^2]\, d\varpi < e, \tag{60}$$

$$\begin{aligned} \int \Bigg| & \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \\ & \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \\ & \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \Bigg| \, d\varpi < f, \end{aligned} \tag{61}$$

le mouvement magnétique est stable.

On reconnaîtra la différence qu'il y a entre cette nouvelle définition de la stabilité et celles qui ont été données précédemment en observant :

1° Qu'en vertu des conditions (37), l'intégrale

$$\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\varpi,$$

l'intégrale qui forme le premier membre de l'inégalité (51) et l'intégrale

$$\int [(\Delta\alpha)^2 + (\Delta\beta)^2 + (\Delta\gamma)^2]\, d\varpi$$

s'annulent en même temps, mais qu'il n'est permis de dire ni qu'elles sont infiniment petites en même temps ni qu'elles sont infiniment grandes en même temps;

2° Qu'en vertu des mêmes conditions (37), l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi$$

et l'intégrale qui forme le premier membre de l'inégalité (61) s'annulent toujours ensemble, sans qu'il soit permis de dire qu'elles sont infiniment petites en même temps ou infiniment grandes en même temps.

25. Nous allons prouver d'abord que, *selon cette nouvelle définition, tout mouvement magnétique et, en particulier, tout équilibre magnétique est encore stable sur un corps magnétique ou diamagnétique pour lequel le binôme* $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est positif.*

Multiplions, en effet, les deux membres de l'égalité (47) par

$$2\Delta \frac{\partial\alpha}{\partial t}\, d\varpi$$

et intégrons pour le volume entier du corps soumis à l'aimantation. Nous trouvons l'égalité

$$\frac{1}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)} \frac{d}{dt} \int (\Delta\alpha)^2\, d\varpi - 2\int \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} \Delta \frac{\partial\alpha}{\partial t}\, d\varpi = \frac{2}{\rho K'} \int \frac{\partial\alpha}{\partial t} \Delta \frac{\partial\alpha}{\partial t}\, \partial\varpi.$$

L'emploi des conditions (37) et du théorème de Green transforme cette égalité là en la suivante :

$$\frac{d}{dt} \int \left[\frac{1}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)} (\Delta\alpha)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\, \partial t}\right)^2\right] d\varpi$$
$$= -\frac{2}{\rho K'} \int \left[\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\, \partial t}\right)^2\right] d\varpi.$$

Le second membre de cette égalité ne peut jamais être négatif; l'intégrale qui figure au premier membre ne peut jamais être fonction croissante de t; à aucun instant, sa valeur ne surpasse celle qu'elle avait prise à l'instant initial. Ce résultat acquis, la démonstration du théorème énoncé s'achève par une méthode semblable à celle qui a été employée au n° **22**.

26. *Selon la nouvelle définition, tout mouvement magnétique et, en particulier, tout équilibre magnétique est instable sur un corps diamagnétique pour lequel le binôme* $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est négatif.*

Nous allons prouver, en effet, que, quelles que soient les limites supérieures imposées aux valeurs absolues des quantités α_0, $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$ et de leurs dérivées premières par rapport à x, y et z, on pourra toujours disposer de ces quantités de telle sorte que l'une au moins des intégrales

$$I = \int (\Delta\alpha)^2 \, d\varpi, \tag{62}$$

$$J = \int \left[\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t}\right)^2 \right] d\varpi \tag{63}$$

croisse au delà de toute limite avec t (¹).

Nous trouvons, tout d'abord,

$$\frac{dI}{dt} = 2\int \Delta\alpha\,\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\,d\varpi; \tag{64}$$

puis

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\int \left(\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi + 2\int \Delta\alpha\,\Delta\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\,d\varpi.$$

Au moyen de l'équation (47), qui donne $\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}$, cette égalité devient

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\int \left(\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi - \frac{2}{\rho K'}\int \Delta\alpha\,\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\,d\varpi$$
$$+ \frac{1}{\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)}\int \Delta\alpha\,\Delta\Delta\alpha\,d\varpi.$$

(¹) Cette démonstration est analogue à celle que nous avons donnée au paragraphe 3 de notre travail *Sur la stabilité électrique d'un milieu homogène et illimité.* Certaines fautes de calcul, qui s'étaient glissées en ce travail, sont corrigées ici.

L'emploi du théorème de Green et des conditions (37) permet de mettre cette dernière égalité sous la forme

$$(65)\quad \frac{d^2 I}{dt^2} = 2\int\left(\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$
$$+\frac{2}{\rho K'}\int\left(\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial y}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial z}\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi$$
$$-\frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\int\left[\left(\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi.$$

D'autre part, en vertu du théorème de Green et des conditions (37), l'égalité (63) peut s'écrire

$$J = -\int\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

Nous en tirons l'égalité

$$\frac{dJ}{dt} = -\int\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi - \int\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}d\varpi$$

que l'emploi du théorème de Green et des conditions (37) transforme en l'égalité

$$\frac{dJ}{dt} = -2\int\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

En vertu de l'équation (47), cette dernière égalité devient

$$(66)\quad \frac{dJ}{dt} = \frac{2}{\rho K'}\int\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi - \frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\int\Delta\alpha\,\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

Nous tirons de là

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = \frac{2}{\rho K'}\int\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi + \frac{2}{\rho K'}\int\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}d\varpi$$
$$-\frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\int\left(\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$
$$-\frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\int\Delta\alpha\,\Delta\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}d\varpi.$$

Le théorème de Green, joint aux conditions (37), nous permet d'écrire

$$\int\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}d\varpi = \int\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

Moyennant cette remarque et l'équation (47), l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned}\frac{d^2 J}{dt^2} = &- \frac{4}{\rho^2 K'^2} \int \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} d\varpi \\ &+ \frac{3}{\pi a^2 \rho K'^2 (1 + 4\pi\varepsilon K)} \int \Delta\alpha \, \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} d\varpi \\ &- \frac{1}{2[\pi a^2 K (1 + 4\pi\varepsilon K)]^2} \int \Delta\alpha \, \Delta\Delta\alpha \, d\varpi \\ &- \frac{1}{\pi a^2 K' (1 + 4\pi\varepsilon K)} \int \left(\Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi.\end{aligned}$$

Un nouvel emploi du théorème de Green et des conditions (37) donne

$$(67) \quad \begin{aligned}\frac{d^2 J}{dt^2} = &\frac{4}{\rho^2 K'^2} \int \left[\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \, \partial t}\right)^2\right] d\varpi \\ &- \frac{3}{\pi a^2 \rho K'^2 (1 + 4\pi\varepsilon K)} \int \left(\frac{\partial \Delta\alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \, \partial t} + \frac{\partial \Delta\alpha}{\partial y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \, \partial t} + \frac{\partial \Delta\alpha}{\partial z} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \, \partial t}\right) d\varpi \\ &+ \frac{1}{2[\pi a^2 K' (1 + 4\pi\varepsilon K)]^2} \int \left[\left(\frac{\partial \Delta\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta\alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta\alpha}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi \\ &- \frac{1}{\pi a^2 K' (1 + 4\pi\varepsilon K)} \int \left(\Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi.\end{aligned}$$

Considérons maintenant la quantité

$$(68) \qquad W = J - \frac{1}{2\pi a^2 K' (1 + 4\pi\varepsilon K)}.$$

Les égalités (64) et (66) nous donneront

$$(69) \qquad \frac{dW}{dt} = 2 \int \left[\frac{1}{\rho K} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{1}{\pi a^2 K' (1 + 4\pi\varepsilon K)} \Delta\alpha\right] \frac{\partial \alpha}{\partial t} d\varpi.$$

Quant aux égalités (65) et (67), elles nous donneront

$$(70) \quad \begin{aligned}\frac{d^2 W}{dt^2} = &- \frac{2}{\pi a^2 K' (1 + 4\pi\varepsilon K)} \int \left(\Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi \\ &+ \int \left\{ \left[\frac{2}{\rho K'} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \, \partial t} - \frac{1}{\pi a^2 K' (1 + 4\pi\varepsilon K)} \frac{\partial \Delta\alpha}{\partial x}\right]^2 \right. \\ &\qquad + \left[\frac{2}{\rho K'} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \, \partial t} - \frac{1}{\pi a^2 K' (1 + 4\pi\varepsilon K)} \frac{\partial \Delta\alpha}{\partial y}\right]^2 \\ &\qquad \left. + \left[\frac{2}{\rho K'} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \, \partial t} - \frac{1}{\pi a^2 K' (1 - 4\pi\varepsilon K)} \frac{\partial \Delta\alpha}{\partial z}\right]^2 \right\} d\varpi.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité nous montre que, si le binôme $(1+4\pi\varepsilon K)$ est négatif, $\frac{d^2W}{dt^2}$ ne peut jamais prendre de valeurs négatives, en sorte que $\frac{dW}{dt}$ garde, quel que soit t, une valeur au moins égale à celle que cette quantité avait à l'instant initial.

Nous allons montrer maintenant que, sans transgresser aucune des limites supérieures qu'on aura imposées aux valeurs absolues de α_0, de $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$ et de leurs dérivées partielles par rapport à x, y et z, on peut disposer de ces quantités de telle sorte que $\left(\frac{dW}{dt}\right)_0$ soit positif.

Soit, en effet, $f(x, y, z)$ une fonction finie et continue quelconque, nulle en tout point de la surface qui limite le corps et différente de zéro en tout autre point de ce corps; soit λ une constante provisoirement quelconque. Prenons

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0 = \lambda f(x, y, z).$$

Prenons ensuite, pour α_0, une fonction de x, y, z qui s'annule en tout point de la surface qui limite le corps et qui vérifie, en tout point du corps, l'équation

$$\Delta\alpha_0 = \lambda\mu^2 f(x, y, z),$$

μ étant une quantité indépendante de x, y, z.

Cela fait, nous pourrons prendre la constante λ assez voisine de zéro pour que les valeurs absolues de α_0, de $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$ et de leurs dérivées partielles ne surpassent assurément pas les limites supérieures qui leur ont été assignées.

Mais, en vertu de l'égalité (69), nous aurons

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_0 = 2\lambda^2 \int \left[\frac{1}{\rho K'} - \frac{\mu^2}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\right] [f(x, y, z)]^2 \, d\varpi,$$

quantité essentiellement positive.

Puisque $\frac{dW}{dt}$ garde, quel que soit t, une valeur positive au moins égale à $\left(\frac{dW}{dt}\right)_0$, W croît au delà de toute limite avec t. D'après l'égalité (68), cela ne peut être que si l'une au moins des deux intégrales I

et J croît au delà de toute limite avec t. Le théorème énoncé est donc démontré.

27. Les diverses méthodes fondées sur l'emploi des équations de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme conduisent donc à ce résultat : Sur un corps diamagnétique, qu'il soit, d'ailleurs, capable ou non de polarisation diélectrique, l'équilibre magnétique est stable si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est positif et instable si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est négatif. Or, le Postulat formulé au n° 5 annonce que, sur un corps diamagnétique, l'équilibre magnétique est instable toutes les fois que le binôme $\left(1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon K\right)$ est positif. Il apparaît donc que le Postulat dont nous venons de parler reçoit un démenti de la part des équations de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme.

A la vérité, on pourrait essayer, de la manière que voici, d'éviter cette contradiction :

Le corps diamagnétique pour lequel on discute de la stabilité de l'équilibre magnétique, n'est pas, lorsqu'on lui applique des équations de l'Électromagnétisme, placé dans les conditions où il se trouve lorsqu'on fait usage du postulat relatif au potentiel interne; en cette circonstance-ci, on le suppose soumis à l'influence de corps permanents; en cette circonstance-là, on maintient invariable le champ magnétique en chaque point intérieur au corps diamagnétique et infiniment voisin de la surface de ce corps; on pourrait, sans absurdité, admettre que l'équilibre magnétique, stable dans un cas, ne l'est pas dans l'autre.

On fermera cette échappatoire si l'on peut définir un cas où les deux dispositifs dont nous venons de parler cessent d'être différents l'un de l'autre. Or, voici comment on peut, fort simplement, imaginer un tel cas :

Concevons un milieu magnétique ou diamagnétique, homogène, illimité en tout sens, soustrait à l'action de tout corps étranger. Admettons simplement qu'à l'infini, les composantes α, β, γ de l'aimantation s'annulent comme $\frac{1}{r^2}$, et leurs dérivées partielles par rapport à x, y, z, comme $\frac{1}{r^3}$, r étant la distance du point qui s'éloigne à l'infini à un point fixe situé dans la région où nous étudions

l'aimantation. Dans ces conditions, on pourra encore, comme on le voit aisément, faire usage de toutes les formules que nous avons précédemment écrites pour un corps aimanté de dimensions finies.

Si un tel milieu est entièrement désaimanté, il est évidemment à l'état d'équilibre magnétique. Cet équilibre est-il stable ou instable?

Traitons d'abord la question au moyen du Postulat énoncé au n° 3.

Si le milieu est diamagnétique et si, cependant, la valeur absolue de son coefficient d'aimantation est assez petite pour que le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ soit positif, ce postulat nous avertit que l'équilibre magnétique considéré n'est pas stable.

En effet, le potentiel interne du milieu désaimanté est nul.

Au sein de ce milieu, dessinons un ellipsoïde quelconque et, en cet ellipsoïde, imaginons une distribution magnétique uniforme quelconque, sans concevoir aucune aimantation dans le milieu extérieur à l'ellipsoïde. Le potentiel interne du système, qui se réduit au potentiel interne de l'ellipsoïde aimanté, est maintenant négatif.

Donc, en l'état d'équilibre, ce potentiel n'était pas minimum.

On arriverait encore à cette conclusion, même si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ était négatif, pourvu seulement que le binôme

$$\left(1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon K\right)$$

fût positif; il suffirait, dans la démonstration précédente, de remplacer l'ellipsoïde par une sphère.

Reprenons maintenant le même problème au moyen des équations de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme. Les considérations développées au cours du présent Chapitre nous apprennent que, pour un milieu diamagnétique capable ou non de polarisation diélectrique, l'équilibre est stable si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est positif et instable si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est négatif.

Ainsi, *appliqués à ce même problème, le Postulat énoncé au n° 3 et les lois de l'Électromagnétisme conduisent à des résultats concordants si le milieu est magnétique. Ils conduisent encore à des résultats concordants si le milieu est diamagnétique et si l'on a les deux inégalités*

$$1 + 4\pi\varepsilon K < 0, \qquad 1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon K > 0.$$

Mais ils conduisent à des résultats qui se contredisent si le milieu est diamagnétique et si l'on a l'inégalité

$$1 + 4\pi\varepsilon K > 0.$$

De là cette première conclusion :

LE POSTULAT, ÉNONCÉ AU N° 3, JUSTIFIÉ POUR LES SYSTÈMES DONT LE MOUVEMENT DÉPEND DES SEULES LOIS DE LA DYNAMIQUE, NE L'EST PLUS POUR LES SYSTÈMES OÙ FIGURENT DES CORPS MAGNÉTIQUES ET DONT, PAR CONSÉQUENT, LE MOUVEMENT DÉPEND DES LOIS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME.

28. De là aussi cette seconde conclusion :

L'EXISTENCE D'UN CORPS ASSEZ FORTEMENT DIAMAGNÉTIQUE POUR QUE LE BINÔME $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ SOIT NÉGATIF, APPARAÎT COMME UNE IMPOSSIBILITÉ PHYSIQUE. MAIS LES OBJECTIONS FORMULÉES CONTRE L'EXISTENCE DE CORPS DIAMAGNÉTIQUES S'ÉVANOUISSENT SI CES CORPS SONT ASSEZ FAIBLEMENT DIAMAGNÉTIQUES POUR QU'AUCUN D'ENTRE EUX NE RENDE NÉGATIF LE BINÔME $(1 + 4\pi\varepsilon K)$.

CHAPITRE III.

COMPARAISON ENTRE LES CORPS DIÉLECTRIQUES ET LES CORPS DIAMAGNÉTIQUES.

29. Il est intéressant de reprendre, au sujet des corps diélectriques, des considérations semblables à celles que nous venons de développer au sujet des corps diamagnétiques, et de comparer entre eux les résultats que donnent ces deux études.

La Statique des corps diélectriques est absolument semblable à la Statique des corps magnétiques, en sorte qu'on peut répéter textuellement, au sujet des corps diélectriques, tout ce qui, au Chapitre I, a été dit des corps magnétiques. Il suffit de remplacer l'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$ et ses composantes A, B, C par l'intensité de la polarisation diélectrique $\mathfrak{M}'$ et ses composantes A', B', C'; le coefficient d'aimantation K par le coefficient de polarisation K'; la constante ε des actions magnétiques par la constante ε' des actions électrostatiques; la fonction potentielle magnétique V par la fonction potentielle électrostatique V'; enfin, les composantes L, M, N du

champ magnétique par les composantes X, Y, Z du champ électrique.

Le potentiel interne d'un système formé par un corps électrisé d'une manière permanente et par un corps diélectrique se calcule de la même manière que le potentiel interne d'un système formé d'un aimant permanent et d'un corps magnétique.

Dès lors, si l'on admet la généralité du Postulat énoncé au n° **3**, on peut formuler les propositions suivantes :

Si le coefficient de polarisation K′ *d'un corps diélectrique est positif, ce corps, placé en présence d'un corps électrisé d'une manière permanente, parviendra à un état d'équilibre de polarisation qui sera assurément stable.*

Cet état d'équilibre, au contraire, serait assurément instable si le coefficient de polarisation K′ *était négatif, tandis que le pouvoir inducteur spécifique* $(1 + 4\pi\varepsilon' K')$ *ou même simplement le binôme* $\left(1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon' K'\right)$ *serait positif.*

Mais rien ne nous autorise, jusqu'ici, à étendre aux systèmes qui renferment des corps diélectriques le Postulat qui a été formulé au n° **3**; la justification de ce Postulat suppose l'emploi des équations de la Dynamique; or, lorsqu'un système contient des corps diélectriques, l'étude du changement de la polarisation prise par ces corps ne dépend pas des équations de la Dynamique, mais bien des équations de l'Électrodynamique; c'est donc à ces dernières qu'il faut demander la démonstration ou la réfutation des propositions qui viennent d'être formulées.

30. En premier lieu, pour les corps diélectriques dont le coefficient de polarisation est positif, on peut répéter exactement ce que nous avons dit, au n° **15**, des corps magnétiques dont le coefficient d'aimantation est positif. Le théorème général dont nous avons parlé en cet endroit s'applique à un système qui contient à la fois des corps magnétiques et des corps diélectriques; il suppose seulement que le coefficient d'aimantation des uns et le coefficient de polarisation des autres soient positifs. Si donc, nous définissons la stabilité d'un équilibre de polarisation exactement comme au n° **15**, nous avons défini la stabi-

lité d'un équilibre d'aimantation, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

L'équilibre de polarisation qui s'établit, sous l'influence de corps électrisés et polarisés d'une manière permanente, sur un corps diélectrique dont le coefficient de polarisation est positif, est un équilibre stable.

31. Imaginons maintenant un corps diélectrique placé dans des conditions telles qu'*en tout point intérieur à ce corps et infiniment voisin de la surface qui le limite, le champ électrique et, par conséquent, l'intensité de la polarisation diélectrique gardent une grandeur et une direction invariables.* Proposons-nous d'étudier, sur un tel corps, la stabilité de l'équilibre de polarisation.

Considérons, tout d'abord, le cas où le corps dont il s'agit est privé de conductibilité électrique.

Les équations qui régissent, sur un tel corps, les changements de la polarisation diélectrique ont été données par Helmholtz [1]; voici la première :

$$(71)\quad \frac{\partial^2 A'}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} \Delta A' + \frac{(1+4\pi\varepsilon K)(1+4\pi\varepsilon K')-k}{2\pi a^2 k K'(1+4\pi\varepsilon K)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A'}{\partial x}+\frac{\partial B'}{\partial y}+\frac{\partial C'}{\partial z}\right).$$

Les deux autres se déduisent de celle-là en remplaçant successivement x par y et z, et A' par B' et C'.

k représente la constante que Helmholtz a introduite en Électrodynamique et que nous savons ne pas pouvoir être négative.

Voici le théorème que nous nous proposons de démontrer :

Si l'on admet que la constante k de Helmholtz est positive;

Que le binôme $(1+4\pi\varepsilon K)$, *relatif au coefficient d'aimantation, est positif;*

Que le pouvoir inducteur spécifique $(1+4\pi\varepsilon' K')$ *est également positif;*

[1] H. Helmholtz, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper* [*Borchardt's Journal*, Bd. LXXII, 1870, p. 57; *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I, 1882, p. 545; équations (21 c)].

Mais que le coefficient de polarisation diélectrique K′ *est négatif :*
La polarisation diélectrique ne peut, sur le corps considéré et dans les conditions indiquées, être en équilibre stable.

Nous prendrons les lettres A'_0, B'_0, C'_0 pour désigner les valeurs des composantes de la polarisation diélectrique en l'état d'équilibre.

En un autre état quelconque, nous poserons

$$A' = A'_0 + \alpha', \qquad B' = B'_0 + \beta', \qquad C' = C'_0 + \gamma'.$$

En tout point intérieur au corps et infiniment voisin de la surface de ce corps, nous devrons avoir, quel que soit t,

$$(72) \qquad \alpha' = 0, \qquad \beta' = 0, \qquad \gamma' = 0.$$

En outre, les quantités α', β', γ' devront vérifier trois équations qui se tirent des équations (71), et dont voici la première :

$$(73) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} = {} & \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} \Delta\alpha' \\ & + \frac{(1+4\pi\varepsilon K)(1+4\pi\varepsilon' K') - k}{2\pi a^2 k K'(1+4\pi\varepsilon K)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

De là nous allons déduire les formules fondamentales de notre analyse.

Considérons la quantité

$$(74) \qquad U = \frac{1}{2}\int (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\, d\varpi.$$

Nous trouvons

$$(75) \qquad \frac{dU}{dt} = \int \left(\alpha' \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \beta' \frac{\partial \beta'}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right) d\varpi,$$

puis

$$(76) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2 U}{dt^2} = {} & \int \left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi \\ & + \int \left(\alpha' \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + \beta' \frac{\partial^2 \beta'}{\partial t^2} + \gamma' \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2}\right) d\varpi. \end{aligned}$$

Mais les égalités (73) donnent

$$\begin{aligned} & \int \left(\alpha' \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + \beta' \frac{\partial^2 \beta'}{\partial t^2} + \gamma' \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2}\right) d\varpi \\ & \quad = \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} \int (\alpha' \Delta\alpha' + \beta' \Delta\beta' + \gamma' \Delta\gamma')\, d\varpi \\ & \qquad + \frac{(1+4\pi\varepsilon K)(1+4\pi\varepsilon K') - k}{2\pi a^2 k K'(1+4\pi\varepsilon K)} \int \left[\alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z}\right) + \ldots\right] d\varpi, \end{aligned}$$

$+ \ldots$ désignant deux termes qui se déduisent par permutation du terme explicitement écrit.

Mais, en vertu des conditions (72), on a

$$\int\left[\alpha' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z}\right) + \ldots\right] d\varpi = -\int\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z}\right)^2 d\varpi.$$

$$\int \alpha' \Delta \alpha' \, d\varpi = -\int\left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi$$

et deux égalités analogues à cette dernière.

L'égalité (76) peut donc s'écrire

$$(77) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 U}{dt^2} = & \int\left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi \\ & - \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} \int\left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial z}\right)^2\right. \\ & \qquad + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial z}\right)^2 \\ & \qquad \left. + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi \\ & - \frac{(1+4\pi\varepsilon K)(1+4\pi\varepsilon' K') - k}{2\pi a^2 k K'(1+4\pi\varepsilon K)} \int\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z}\right)^2 d\varpi. \end{aligned}$$

Les formules (75) et (77) nous permettront de démontrer le théorème énoncé lorsque nous aurons établi quatre lemmes.

Premier lemme. — Posons

$$(78) \qquad \theta = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

On peut, à l'instant $t = 0$, choisir, dans tout le corps, les valeurs de

$$\alpha'_0, \quad \beta'_0, \quad \gamma'_0, \quad \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)_0,$$

de telle sorte :

1° Que les valeurs absolues de ces quantités soient inférieures à telles limites supérieures qu'il aura plu de leur imposer;

2° Que les conditions (72) soient vérifiées;

3° Que l'on ait, à cet instant,

$$(79) \qquad \theta_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_0 = 0;$$

4° Que l'intégrale

$$\text{(80)} \qquad V_0 = \int \left(\alpha' \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \beta' \frac{\partial \beta'}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial \gamma'}{\partial t} \right)_0 d\varpi$$

ait une valeur positive.

Prenons, en effet, ce qui est évidemment possible d'une infinité de manières, trois fonctions de x, y, z, désignées par p, q, r, qui soient assujetties aux conditions suivantes :

1° Dans l'étendue occupée par le corps,

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz$$

n'est pas une différentielle totale;

2° Les dérivées partielles du premier ordre de p, q, r s'annulent en tout point de la surface qui limite le corps.

Prenons ensuite

$$\alpha'_0 = \lambda \left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} \right), \qquad \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} \right)_0 = \mu \left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} \right),$$

$$\beta'_0 = \lambda \left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} \right), \qquad \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t} \right)_0 = \mu \left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} \right),$$

$$\gamma'_0 = \lambda \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right), \qquad \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t} \right)_0 = \mu \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right),$$

λ et μ étant deux quantités quelconques indépendantes de x, y, z, t.

La deuxième et la troisième conditions seront vérifiées quelles que soient les valeurs imposées à λ et μ.

L'égalité (80) prend maintenant la forme

$$V_0 = \lambda\mu \int \left[\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] d\varpi.$$

Pour que la quatrième condition soit vérifiée, il suffit que λ et μ soient deux quantités de même signe.

En donnant enfin à chacune de ces deux quantités des valeurs absolues suffisamment petites, on satisfera à la première condition.

Deuxième lemme. — Si le rapport

$$\text{(81)} \qquad P = \frac{1 + 4\pi\varepsilon' K}{2\pi a^2 \lambda K}$$

est nul ou positif, et si l'on a, à l'instant initial, en tout le volume occupé par le corps,

$$\theta_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_0 = 0, \tag{79}$$

θ demeure nul quel que soit t.

En effet, différentions respectivement les équations (73) par rapport à x, y, z et ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte de la définition (78) de θ. Nous trouvons, moyennant l'égalité (81), l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - P\,\Delta\theta = 0. \tag{82}$$

Si P est nul, cette équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0.$$

$\frac{\partial \theta}{\partial t}$ garde alors une valeur indépendante de t, qui est zéro, en vertu de la seconde condition (79); θ est donc indépendant de t et, partant, constamment nul en vertu de la première égalité (79).

Supposons maintenant que P soit négatif. L'équation (82) se ramène à une équation de Laplace à quatre variables. En vertu d'un théorème bien connu d'Axel Harnack, toute intégrale de l'équation (82), continue ainsi que ses dérivées premières en x, y, z, t, est fonction analytique de x, y, z, t.

D'autre part, l'équation (82), jointe aux conditions (79), nous montre qu'on a, à l'instant initial, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$.

De même, en différentiant 1, 2, ..., n, ..., fois l'équation (82) par rapport à t, nous démontrerons de proche en proche que les dérivées

$$\frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3}, \quad \frac{\partial^4 \theta}{\partial t^4}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n+2} \theta}{\partial t^{n+2}}, \quad \ldots$$

sont, à l'instant initial, nulles dans tout le corps.

Puisque θ est fonction analytique de t et que, pour $t = 0$, ses dérivées des divers ordres par rapport à t sont toutes nulles, θ est nul quel que soit t.

TROISIÈME LEMME. — Posons

$$\frac{\partial \beta'}{\partial z} - \frac{\partial \gamma'}{\partial y} = \omega_x, \quad \frac{\partial \gamma'}{\partial x} - \frac{\partial \alpha'}{\partial z} = \omega_y, \quad \frac{\partial \alpha'}{\partial y} - \frac{\partial \beta'}{\partial x} = \omega_z. \tag{83}$$

On peut, à l'instant initial, choisir, dans tout le corps, les valeurs de

$$\alpha'_0, \quad \beta'_0, \quad \gamma'_0, \quad \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)_0,$$

de telle sorte :

1° Que les valeurs absolues de ces quantités soient inférieures à telles limites positives qu'il aura plu de leur assigner;

2° Que les conditions (72) soient vérifiées;

3° Que l'on ait, à cet instant,

$$\left\{\begin{array}{lll} \omega_{x0} = 0, & \omega_{y0} = 0, & \omega_{z0} = 0, \\ \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial t}\right)_0 = 0, & \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial t}\right)_0 = 0, & \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial t}\right)_0 = 0; \end{array}\right. \tag{84}$$

4° Que l'intégrale

$$V_0 = \int \left(\alpha' \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \beta' \frac{\partial \beta'}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)_0 d\varpi \tag{80}$$

soit positive.

Prenons, en effet, une fonction $u(x, y, z)$ qui ne se réduise pas à une constante, mais dont les dérivées partielles du premier ordre s'annulent en tout point de la surface du corps.

Prenons ensuite

$$\begin{aligned} \alpha'_0 &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x}, & \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)_0 &= \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \beta'_0 &= \lambda \frac{\partial u}{\partial y}, & \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t}\right)_0 &= \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \gamma'_0 &= \lambda \frac{\partial u}{\partial z}, & \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)_0 &= \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned}$$

les quantités λ et μ étant deux quantités quelconques indépendantes de x, y, z, t. La deuxième et la troisième conditions seront évidemment vérifiées.

L'égalité (80) prendra la forme

$$V_0 = \lambda\mu \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi.$$

en sorte que V_0 sera positif pourvu seulement qu'on attribue à λ et à μ deux valeurs de même signe.

Enfin, on pourra toujours limiter supérieurement les valeurs absolues de ces deux quantités λ et μ de telle sorte que la première condition soit vérifiée.

Quatrième lemme. — Si le rapport

$$Q = \frac{1}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)} \tag{85}$$

est négatif et si l'on a choisi les données initiales de telle sorte qu'on ait

$$\omega_{x0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial t}\right)_0 = 0,$$

ω_x demeure nul quel que soit t.

Pour chacune des deux quantités ω_y, ω_z, on peut formuler une proposition analogue.

Différentions en effet la seconde équation (73) par rapport à z et, du résultat obtenu, retranchons membre à membre la troisième équation (73) différentiée par rapport à y; moyennant les égalités (83) et (85), nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = Q\,\Delta\omega_x. \tag{86}$$

Les quantités ω_y, ω_z vérifient des équations semblables.

Pour établir le lemme énoncé, il suffit de reprendre le raisonnement qui a donné le second lemme.

Nous voici maintenant en état d'établir le théorème énoncé et cela par deux démonstrations équivalentes.

Première démonstration. — Choisissons les données initiales comme le premier lemme nous a permis de le faire.

D'après nos hypothèses, le rapport

$$P = \frac{1 + 4\pi\varepsilon' K'}{2\pi a^2 k K'} \tag{81}$$

est négatif; dès lors, comme les équations (79) sont vérifiées à l'instant

initial, le second lemme nous apprend qu'on a, quel que soit t,

$$\theta = \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z} = 0.$$

Moyennant cette égalité et l'égalité (85), l'égalité (77) devient

$$\begin{aligned}\frac{d^2 U}{dt^2} = & \int \left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi \\ & - Q \int \left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial z}\right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi.\end{aligned}$$

Or, d'après les hypothèses faites, le rapport

(85) $$Q = \frac{1}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)}$$

est négatif. $\frac{d^2 U}{dt^2}$ ne peut donc jamais prendre de valeur négative.

D'autre part, les égalités (75) et (80) donnent l'égalité

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = 2 V_0,$$

et le choix des données initiales a assuré à V_0 une valeur positive.

Nous voyons donc que la quantité U, définie par l'égalité (74), croît au delà de toute limite avec t. L'équilibre du système est instable.

Seconde démonstration. — Choisissons les données initiales comme le troisième lemme nous a appris à le faire.

En vertu des hypothèses faites, le rapport

(85) $$Q = \frac{1}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)}$$

est négatif.

Le quatrième lemme nous apprend alors que les conditions (84), vérifiées à l'instant initial, entraînent, quel que soit t,

$$\omega_x = \frac{\partial \beta'}{\partial z} - \frac{\partial \gamma'}{\partial y} = 0,$$

$$\omega_y = \frac{\partial \gamma'}{\partial x} - \frac{\partial \alpha'}{\partial z} = 0,$$

$$\omega_z = \frac{\partial \alpha'}{\partial y} - \frac{\partial \beta'}{\partial z} = 0.$$

Il existe donc une fonction $v(x, y, z, t)$ telle qu'on ait

$$(87) \qquad \alpha' = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \beta' = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma' = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Les conditions (72) nous apprennent qu'en tout point de la surface du corps et à tout instant, on a

$$(88) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

En vertu des équations (87), on a

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z} = \Delta v$$

et, par conséquent,

$$\int \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z} \right)^2 d\varpi = \int (\Delta v)^2 \, d\varpi,$$

ce que le théorème de Green, joint aux égalités (88), permet d'écrire

$$(89) \quad \int \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z} \right)^2 d\varpi = - \int \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\varpi.$$

D'autre part, le théorème de Green, joint aux conditions (72), permet d'écrire

$$\int \left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi = - \int \alpha' \Delta \alpha' \, d\varpi$$

ou bien, en vertu des égalités (87),

$$(90) \qquad \int \left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi = - \int \frac{\partial v}{\partial x} \Delta \frac{\partial v}{\partial x} \, d\varpi.$$

Cette égalité (90) et deux égalités analogues, comparées à l'égalité (89), nous donnent :

$$(91) \quad \begin{aligned} \int \Bigg[& \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial z} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial z} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial z} \right)^2 \Bigg] d\varpi = \int \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z} \right)^2 d\varpi. \end{aligned}$$

Moyennant cette égalité (91) et l'égalité

(81) $$P = \frac{1+4\pi\varepsilon' K'}{2\pi a^2 k K'},$$

l'égalité (77) prend la forme suivante :

(92) $$\frac{d^2U}{dt^2} = \int \left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi - P \int \left(\frac{\partial\alpha'}{\partial x} + \frac{\partial\beta'}{\partial y} + \frac{\partial\gamma'}{\partial z} \right)^2 d\varpi.$$

D'après les hypothèses faites, P est négatif; $\frac{d^2U}{dt^2}$ ne peut donc jamais prendre de valeurs négatives.

D'autre part, les égalités (75) et (80) donnent l'égalité

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = V_0,$$

et le choix des données initiales a assuré à V_0 une valeur positive.

Nous voyons donc que la quantité U, définie par l'égalité (74), croît encore au delà de toute limite avec t, en sorte que l'équilibre du système ne peut être stable.

Par deux voies distinctes, le théorème énoncé est démontré.

52. Nous allons nous proposer maintenant de démontrer le même théorème en supposant que le corps diélectrique soit doué de conductibilité. Plus exactement, voici l'énoncé du théorème que nous allons établir :

Désignons toujours par A'_0, B'_0, C'_0 les composantes de la polarisation que prend le corps considéré, en un point déterminé, lorsque l'équilibre est établi; par A', B', C' les composantes de la polarisation, au même point, en un mouvement quelconque; posons

$$A' = A'_0 + \alpha', \quad B' = B'_0 + \beta', \quad C' = C'_0 + \gamma'.$$

Quelque petites que soient les limites supérieures imposées aux valeurs absolues initiales de

(93) $$\left\{ \begin{array}{lll} \alpha', & \beta', & \gamma', \\ \frac{\partial\alpha'}{\partial t}, & \frac{\partial\beta'}{\partial t}, & \frac{\partial\gamma'}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}, & \frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2}, & \frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}, \end{array} \right.$$

si K' *est négatif tandis que* $(1+4\pi\varepsilon' K')$, $(1+4\pi\varepsilon K)$ *et* k *sont positifs, on pourra toujours disposer des valeurs initiales des quantités* (93) *de telle manière que la quantité*

$$W = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi, \tag{94}$$

croisse au delà de toute limite avec t.

De cette proposition, nous donnerons deux démonstrations qui procéderont comme les deux démonstrations relatives au corps diélectrique dénué de conductibilité: mais, pour des raisons que nous signalerons en leur temps, elles n'auront pas la même rigueur.

Les trois quantités α', β', γ' vérifient trois équations aux dérivées partielles du troisième ordre [1]. Si nous posons, comme précédemment,

$$\theta = \frac{\partial\alpha'}{\partial x} + \frac{\partial\beta'}{\partial y} + \frac{\partial\gamma'}{\partial z}, \tag{78}$$

$$P = \frac{1+4\pi\varepsilon' K'}{2\pi a^2 k K'}, \tag{81}$$

$$Q = \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}, \tag{85}$$

et si nous continuons à désigner par ρ la résistance spécifique (résistivité) de la substance, la première de ces équations sera

$$\frac{\partial^3\alpha'}{\partial t^3} = Q\Delta\frac{\partial\alpha'}{\partial t} + (P-Q)\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial t} + \frac{1}{K'\rho}\left(\frac{2\varepsilon'}{a^2 k}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}\right). \tag{95}$$

Les deux autres se déduisent de celle-là par des permutations aisées.

L'égalité (94) nous donne

$$\frac{dW}{dt} = \int\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2} + \frac{\partial\beta'}{\partial t}\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2} + \frac{\partial\gamma'}{\partial t}\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}\right) d\varpi, \tag{96}$$

puis, en tenant compte des égalités (95),

$$\frac{d^2W}{dt^2} = H + \Phi, \tag{97}$$

---

[1] P. DUHEM, *Sur la propagation des actions électrodynamiques*, équations (155).

avec

$$\begin{aligned}\Pi = & \int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}\right)^2\right]d\varpi \\ & + Q\int\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\Delta\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\Delta\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\Delta\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)d\varpi \\ & + (P-Q)\int\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\frac{\partial^2\theta}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi = & \frac{2\varepsilon'}{a^2 k K'\rho}\int\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)d\varpi \\ & - \frac{1}{K'\rho}\int\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2}+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}\right)d\varpi.\end{aligned}$$

Mais l'emploi du théorème de Green, des conditions (72) et de l'égalité (78) transforme ces expressions de Π et de Φ et permet d'écrire

(98)
$$\begin{aligned}\Pi = & \int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}\right)^2\right]d\varpi \\ & - Q\int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right. \\ & \qquad +\left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial z\,\partial t}\right)^2 \\ & \qquad \left.+\left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi \\ & + (Q-P)\int\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 d\varpi,\end{aligned}$$

(99)
$$\Phi = -\frac{1}{K'\rho}\int\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2}+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}+\frac{2\varepsilon'}{a^2 k}\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)d\varpi.$$

Considérons maintenant la quantité

(100)
$$X = \frac{1}{2K'\rho}\int_0^t\int\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2+\frac{2\varepsilon'}{a^2 k}\theta^2\right]d\varpi\,dt.$$

Nous trouvons

(101)
$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{2K'\rho}\int\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2+\frac{2\varepsilon'}{a^2 k}\theta^2\right]d\varpi,$$

puis

(102)
$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\Phi.$$

Formons la somme

(103)
$$Y = W + X.$$

Les égalités (96) et (101) nous donneront

$$(104)\quad \frac{dY}{dt} = \int \left\{ \frac{\partial\alpha'}{\partial t}\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2} + \frac{\partial\beta'}{\partial t}\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2} + \frac{\partial\gamma'}{\partial t}\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2} + \frac{1}{2K'\rho}\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2 + \frac{2\varepsilon'}{a^2k}\theta^2\right]\right\} d\varpi,$$

tandis que les égalités (97) et (102) nous donneront

$$(105)\quad \frac{d^2Y}{dt^2} = H.$$

Ces formules une fois établies, nous allons démontrer quatre lemmes analogues à ceux que nous avons démontrés au numéro précédent.

Premier lemme. — On peut, à l'instant $t = 0$, choisir, dans tout le corps, les valeurs de

$$\alpha_0, \quad \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}\right)_0, \quad \ldots,$$

de telle sorte :

1° Que les valeurs absolues de ces quantités soient inférieures aux limites supérieures qui leur ont été assignées;

2° Que les conditions (72) soient vérifiées;

3° Que l'on ait, à cet instant,

$$(106)\qquad \theta_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)_0 = 0;$$

4° Que l'intégrale

$$(107)\quad Z_0 = \int \left\{ \frac{\partial\alpha'}{\partial t}\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2} + \frac{\partial\beta'}{\partial t}\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2} + \frac{\partial\gamma'}{\partial t}\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2} + \frac{1}{2K'\rho}\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2\right]\right\}_0 d\varpi$$

ait une valeur positive.

Définissons, en effet, les fonctions p, q, r comme au premier lemme du numéro précédent, et posons

$$\alpha_0 = \lambda\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0 = \mu\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y}\right), \qquad \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)_0 = \mu\nu\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y}\right), \qquad \ldots;$$

λ, μ, ν sont trois quantités indépendantes de x, y, z et, jusqu'ici, arbitraires. La deuxième et la troisième conditions sont désormais vérifiées.

L'égalité (107) deviendra

$$Z_0 = \mu^2\left(\nu + \frac{1}{2K'\rho}\right)\int\left[\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right] d\varpi.$$

Il suffira de donner à ν une valeur positive plus grande que la valeur absolue de $\frac{1}{2K'\rho}$ pour être assuré que Z_0 est positif.

Cela fait, on pourra donner aux constantes λ et μ qui, jusqu'ici, sont demeurées arbitraires, des valeurs absolues assez petites pour que la première condition soit sûrement vérifiée.

Deuxième lemme. — Si P est négatif et si, à l'instant $t = 0$, on a

$$(106) \qquad \theta_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right)_0 = 0,$$

θ demeure nul quel que soit t.

Différentions la première égalité (95) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et ajoutons membre à membre les égalités obtenues, en tenant compte de la définition (78) de θ. Nous trouvons que θ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(108) \qquad \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3} = P\Delta\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{K'\rho}\left(\frac{2\varepsilon'}{a^2 k}\Delta\theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right).$$

S'il était établi que toutes les intégrales de cette équation sont, lorsque P *est négatif, fonctions analytiques de* x, y, z, t, la démonstration du lemme s'achèverait comme s'est achevée, au numéro précédent, la démonstration du second lemme. Mais pour l'équation (108), on n'a pas démontré, du moins à notre connaissance, un théorème analogue à celui qu'Axel Harnack a démontré au sujet de l'équation de Laplace.

La seule proposition que nous puissions affirmer avec assurance au sujet de l'équation (108) est la suivante :

Si P *est négatif, il ne peut pas exister de surface, fixe ou variable avec* t, *qui séparerait deux intégrales analytiques différentes de l'équation* (108), *au travers de laquelle* θ *et toutes ses*

dérivées jusqu'à l'ordre n ($n \geq 2$) seraient continues, tandis que les dérivées d'ordre $(n+1)$ ou l'une au moins d'entre elles seraient discontinues.

Appliquons, en effet, la méthode de Christoffel et d'Hugoniot à la détermination de la vitesse normale de propagation $\mathfrak{N}$ d'une telle onde. Nous trouvons

$$\mathfrak{N}^2 = P,$$

en sorte que $\mathfrak{N}$ est imaginaire lorsque P est négatif.

Ce résultat rend vraisemblable, mais ne suffit pas à transformer en vérité démontrée le postulat suivant :

Postulat. — *Lorsque* P *est négatif, toute intégrale de l'équation* (108) *est fonction analytique de t, même pour $t = 0$.*

Si l'on admet ce postulat, la démonstration du deuxième lemme se fait sans aucune difficulté.

Troisième lemme. — Posons, comme au numéro précédent,

$$(83) \qquad \frac{\partial \beta'}{\partial z} - \frac{\partial \gamma'}{\partial y} = \omega_x, \qquad \frac{\partial \gamma'}{\partial x} - \frac{\partial \alpha'}{\partial y} = \omega_y, \qquad \frac{\partial \alpha'}{\partial y} - \frac{\partial \beta'}{\partial x} = \omega_z.$$

On peut, à l'instant initial, choisir, dans tout le corps, les valeurs de

$$\alpha'_0, \quad \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2}\right)_0, \quad \ldots,$$

de telle sorte :

1° Que les valeurs absolues de ces quantités soient inférieures aux limites qui leur ont été assignées;

2° Que les conditions (72) soient vérifiées;

3° Que l'on ait, à cet instant initial,

$$(109) \qquad \begin{cases} \omega_{x0} = 0, & \left(\dfrac{\partial \omega_x}{\partial t}\right)_0 = 0, & \left(\dfrac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2}\right)_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

4° Que l'intégrale

$$(110) \quad T_0 = \int \Big\{ \frac{\partial \alpha'}{\partial t}\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + \frac{\partial \beta'}{\partial t}\frac{\partial^2 \beta'}{\partial t^2} + \frac{\partial \gamma'}{\partial t}\frac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2} + \frac{1}{2K\rho}\left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right)^2 + \frac{2\varepsilon'}{a^2 k}\theta^2\right]\Big\}_0 d\varpi$$

soit positive.

Définissons la fonction $u(x, y, z)$ comme au troisième lemme du numéro précédent, et posons

$$\alpha'_0 = \lambda\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2}\right)_0 = \mu\nu \frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

λ, μ, ν étant trois quantités, indépendantes de x, y, z, qui sont provisoirement arbitraires.

Quelles que soient les valeurs de ces quantités, la seconde et la troisième conditions sont vérifiées.

En vertu de ces déterminations de α'_0, $\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2}\right)_0$, ..., l'égalité (110) devient

$$T_0 = \mu^2 \int \left\{ \left(\nu + \frac{1}{2 K' \rho}\right) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] + \frac{\varepsilon' \lambda^2}{a^2 k K' \rho} (\Delta u)^2 \right\} d\varpi.$$

On pourra toujours, après avoir fixé arbitrairement la valeur de λ, donner à ν une valeur positive assez grande pour que T_0 soit positif quel que soit μ.

Il suffira alors de donner à μ une valeur absolue assez petite pour que l'exécution des premières conditions soit assurée.

Quatrième lemme. — Si Q est négatif et si l'on a, à l'instant initial,

$$(111) \qquad \omega_{x0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial t}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2}\right)_0 = 0,$$

ω_x demeure égal à 0 quel que soit t.

Différentions, en effet, la seconde équation (95) par rapport à z, et retranchons-en membre à membre la troisième équation (95), différentiée par rapport à y; en tenant compte de la définition (83) de ω_x, nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} - Q\,\Delta\omega_x + \frac{1}{K'\rho}\frac{\partial \omega_x}{\partial t}\right) = 0.$$

En vertu des conditions (111), cette équation entraîne cette autre :

$$(112) \qquad \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = Q\,\Delta\omega_x - \frac{1}{K'\rho}\frac{\partial \omega_x}{\partial t}.$$

ω_y et ω_z vérifient des équations semblables.

Au sujet de cette équation (112), la méthode de Christoffel et d'Hugoniot nous permet d'établir bien aisément le théorème suivant :

Si Q est négatif, il ne peut exister aucune surface, fixe ou variable avec t, qui séparerait deux intégrales analytiques différentes de l'équation (112), *au travers de laquelle* ω_x *et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n* ($n - 1$) *seraient continues, tandis que les dérivées d'ordre* ($n + 1$) *ou l'une au moins d'entre elles seraient discontinues.*

Ce théorème rend vraisemblable, mais ne suffit pas à transformer en vérité démontrée le postulat suivant :

Postulat. — *Si Q est négatif, toute intégrale de l'équation* (112) *est fonction analytique de t, même pour* $t = 0$.

Si l'on admet ce postulat, la démonstration de notre quatrième lemme s'achève sans aucune difficulté.

Ces lemmes établis, nous allons donner deux démonstrations différentes du théorème énoncé.

Première démonstration. — Choisissons les données initiales comme le premier lemme nous apprend à le faire.

Selon les hypothèses faites, le rapport P, défini par l'égalité (81), est négatif. Dès lors, en vertu du second lemme, on a, quel que soit t, $\theta = 0$.

L'égalité (98) se réduit alors à

$$\begin{aligned} H = & \int \left[\left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta'}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2}\right)^2 \right] d\varpi \\ & - Q \int \left[\left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \right. \\ & \qquad + \left(\frac{\partial^2 \beta'}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta'}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta'}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \\ & \qquad \left. + \left(\frac{\partial^2 \gamma'}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \gamma'}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \gamma'}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \right] d\varpi. \end{aligned}$$

Or, en vertu des hypothèses faites et de l'égalité (85) qui définit Q, ce coefficient est négatif. La quantité H ne peut donc jamais être négative et, en vertu de l'égalité (105), il en est de même de $\frac{d^2 Y}{dt^2}$.

D'autre part, θ étant constamment nul, les égalités (104) et (107) permettent d'écrire

$$\left(\frac{dY}{dt}\right)_0 = Z_0.$$

Le choix des données initiales nous assure que $\left(\frac{dY}{dt}\right)_0$ a une valeur positive. $Y = W + X$ croît donc au delà de toute limite avec t.

Considérons maintenant la quantité X, définie par l'égalité (100). Puisque θ est constamment nul, elle se réduit ici à

$$X = \frac{1}{2K'\rho}\int_0^t \int \left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi\, dt.$$

La quantité qu'on intègre de o à t ne peut jamais être négative; l'intégrale obtenue ne peut donc pas être fonction décroissante de t; comme K' a été supposé négatif, X ne peut jamais être fonction croissante de t.

Dès lors, pour que $Y = W + X$ croisse au delà de toute limite avec t, il faut que W croisse au delà de toute limite avec t. C'est ce qu'on se proposait de démontrer.

Seconde démonstration. — Choisissons les données initiales comme il est possible de le faire selon le troisième lemme.

En vertu des hypothèses faites, Q est négatif. Dès lors, le quatrième lemme nous apprend que nous aurons, quel que soit t,

$$\omega_x = 0, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0.$$

Une démonstration toute semblable à celle qui a fourni l'égalité (91) donnera l'égalité

$$(113)\quad \begin{aligned}\int\Bigg[& \left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial z\,\partial t}\right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial z\,\partial t}\right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial z\,\partial t}\right)^2\Bigg] d\varpi = \int\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 d\varpi.\end{aligned}$$

En vertu de cette égalité (113), l'égalité (98) se réduira à

$$H = \int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi - P\int\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 d\varpi.$$

Or, en vertu des hypothèses faites, P est négatif. La quantité H ne peut donc jamais être négative et, d'après l'égalité (105), il en est de même de $\frac{d^2Y}{dt^2}$.

Les égalités (104) et (110) nous donnent

$$\left(\frac{dY}{dt}\right)_0 = T_0.$$

Or, les données initiales ont été choisies de telle manière que T_0 soit positif. Il en est donc de même de $\left(\frac{dY}{dt}\right)_0$. Dès lors, la quantité $Y = W + X$ croît certainement au delà de toute limite avec t.

X est défini par l'égalité (100). Comme la constante k de Helmholtz a été supposée positive, la quantité qui figure sous le signe $\int_0^t$ ne peut jamais être négative et l'intégrale ne peut être fonction décroissante de t. D'ailleurs, le coefficient K' a été supposé négatif; X n'est donc jamais une fonction croissante de t. Pour que $Y = W + X$ croisse au delà de toute limite avec t, il faut, comme on l'avait annoncé, que W croisse au delà de toute limite avec t.

53. Il nous faut revenir maintenant sur les diverses définitions de la stabilité qui ont été admises au cours du présent Chapitre.

Aux n^{os} **50** et **51**, nos définitions reposaient sur la considération de la quantité

$$(74) \qquad U = \frac{1}{2}\int (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\, d\varpi.$$

Peut-on, aux perturbations initiales, assigner des limites supérieures assez petites pour que l'intégrale U ne surpasse jamais une valeur positive arbitrairement donnée d'avance? L'équilibre est stable. Quelque étroites, au contraire, que soient les limites imposées aux perturbations initiales, peut-on disposer de ces perturbations de telle sorte que l'intégrale U croisse au delà d'une limite imposée d'avance, si grande soit-elle? L'équilibre est instable. A la stabilité et à l'instabilité ainsi définies, nous donnerons le nom de *stabilité* et d'*instabilité électrostatiques intégrales*. L'épithète *électrostatique* est introduite ici pour rappeler que les quantités

$$A' = A'_0 + \alpha', \qquad B' = B'_0 + \beta', \qquad C' = C'_0 + \gamma'$$

sont celles dont la connaissance importe au calcul des actions électrostatiques exercées, à chaque instant, par le corps polarisé.

La stabilité électrostatique intégrale ainsi définie est, selon ce qui a été dit au n° **15**, la seule au sujet de laquelle on puisse démontrer, par une méthode inspirée de Lejeune-Dirichlet [1], le théorème général dont il est fait usage au n° **15** et au n° **30**.

A côté de cette stabilité et de cette instabilité, on en peut considérer d'autres que nous nommerons *stabilité* et *instabilité électrostatiques ponctuelles*, et que nous définirons de la manière suivante :

Si l'on peut toujours, aux perturbations initiales, assigner des limites supérieures assez petites pour que les valeurs absolues de α', β', γ' demeurent, *en tout point* et quel que soit t, inférieures à des valeurs positives données d'avance, l'équilibre considéré possède la stabilité électrostatique ponctuelle.

Si, au contraire, quelque petites que soient les limites supérieures assignées aux perturbations initiales, on peut disposer de ces perturbations de telle manière qu'*en certains points* (ou, au moins, *en un certain point*) du corps polarisé, la valeur absolue de l'une au moins des quantités α', β', γ' croisse au delà d'une limite assignée d'avance, si grande soit-elle, l'équilibre considéré est affecté d'instabilité électrostatique ponctuelle.

Il est bien évident que la stabilité électrostatique ponctuelle entraîne la stabilité électrostatique intégrale, *mais que la réciproque n'est pas vraie;* que l'instabilité électrostatique intégrale entraîne l'instabilité électrostatique ponctuelle, *mais que la réciproque n'est pas vraie.*

De la seconde de ces deux propositions découle cette conséquence : *Le diélectrique non conducteur considéré au n°* **31** *possède non seulement l'instabilité électrostatique intégrale, mais encore l'instabilité électrostatique ponctuelle.*

Lorsque l'équilibre électrique n'est pas établi sur le diélectrique considéré, ce corps exerce des actions électrodynamiques. Le calcul de ces actions exige simplement que l'on connaisse, en chaque point

---

(1) Le lecteur pourra trouver, au sujet de cette question, une discussion complète dans notre *Traité d'Énergétique*, Chap. XVI, paragraphe 6, t. II, pp. 304 et suiv.

du corps, les composantes φ, ψ, χ de ce qu'on nomme la *densité de courant*.

Nous pourrons alors définir des *stabilités* et des *instabilités électrodynamiques*, *intégrales* ou *ponctuelles*, tout à fait analogue aux stabilités et instabilités électrostatiques; il suffira, dans les définitions précédentes, de substituer aux composantes α', β', γ' de l'intensité de polarisation, les composantes φ, ψ, χ de la densité de courant.

En particulier, si, quelque petites que soient les limites supérieures assignées à la perturbation initiale, on peut disposer de cette perturbation de telle sorte que l'intégrale

$$S = \frac{1}{2}\int(\varphi^2 + \psi^2 + \chi^2)\,d\varpi \tag{114}$$

croisse au delà de toute limite avec t, le système possède l'instabilité électrodynamique intégrale; il possède seulement l'instabilité électrodynamique ponctuelle si, en certains points, la valeur absolue de l'une au moins des quantités φ, ψ et χ croît au delà de toute limite avec t.

La densité de courant se compose, en général, de deux parties : la densité du *courant de conduction* u, v, w et la densité du *courant de déplacement* $\frac{\partial\alpha'}{\partial t}$, $\frac{\partial\beta'}{\partial t}$, $\frac{\partial\gamma'}{\partial t}$, en sorte qu'on a

$$\varphi = u + \frac{\partial\alpha'}{\partial t}, \qquad \psi = v + \frac{\partial\beta'}{\partial t}, \qquad \chi = w + \frac{\partial\gamma'}{\partial t},$$

et que l'égalité (114) devient

$$S = \frac{1}{2}\int\left[\left(u + \frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(v + \frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(w + \frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2\right]d\varpi. \tag{115}$$

En ces formules, on doit biffer u, v, w si le corps n'est point conducteur, et $\frac{\partial\alpha'}{\partial t}$, $\frac{\partial\beta'}{\partial t}$, $\frac{\partial\gamma'}{\partial t}$ si le corps n'est pas diélectrique.

Il apparaît maintenant que l'instabilité démontrée, au n° **32**, pour un système à la fois conducteur et diélectrique, n'est comprise par aucune des définitions qui viennent d'être données, puisque la quantité dont nous avons établi la croissance indéfinie n'est pas la quantité S, définie

par l'égalité (115), mais seulement la quantité

$$(94) \qquad W = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2\right]d\varpi.$$

Nous allons donc compléter ce qui a été établi au sujet de ce système en démontrant le théorème suivant :

*L'équilibre du système étudié au n° **32** est affecté soit d'instabilité électrodynamique intégrale, soit d'instabilité électrostatique intégrale.*

Pour démontrer cette proposition, transformons l'expression de S.

Si X, Y, Z sont, en un point, les composantes du champ électrique, nous avons

$$\rho u = X, \qquad \rho v = Y, \qquad \rho w = Z,$$
$$\alpha' = K'X, \qquad \beta' = K'Y, \qquad \gamma' = K'Z.$$

De ces égalités nous tirons

$$u = \frac{\alpha'}{\rho K'}, \qquad v = \frac{\beta'}{\rho K'}, \qquad w = \frac{\gamma'}{\rho K'}.$$

En vertu de ces égalités et des égalités (74) et (94), l'expression (115) de S se transforme aisément en la suivante

$$(116) \qquad S = W + \frac{U}{\rho^2 K'^2} + \frac{1}{\rho K'}\frac{dU}{dt}.$$

Supposons que l'équilibre du système ne soit pas affecté d'instabilité électrodynamique intégrale. Si l'on assigne aux valeurs absolues des perturbations initiales des limites supérieures suffisamment petites, on sera assuré que, de quelque manière qu'on choisisse les perturbations initiales, S ne croîtra pas au delà d'une certaine limite positive. Soit D cette limite. On aura donc, quelles que soient les perturbations initiales et quel que soit t,

$$S < D$$

ou bien, en vertu de l'égalité (116),

$$\frac{1}{\rho K'}\frac{dU}{dt} < D - W - \frac{U}{\rho^2 K'^2}$$

et *a fortiori*, puisque U ne peut être négatif,

$$\frac{1}{\rho K'}\frac{dU}{dt} = D - W$$

ou bien encore

$$-\frac{1}{\rho K'}\frac{dU}{dt} = W - D.$$

Pour le corps considéré, $\rho K'$ est négatif; D est indépendant de t, tandis que, d'après la démonstration donnée au n° **52**, W croît au delà de toute limite avec t; il en est donc de même de $\frac{dU}{dt}$ et, partant, de U, en sorte que le système est atteint d'instabilité électrostatique intégrale, comme nous l'avions annoncé.

Ainsi le système étudié au n° **52** est affecté, soit d'instabilité électrostatique intégrale et, partant, d'instabilité électrostatique ponctuelle; soit d'instabilité électrodynamique intégrale et, partant, d'instabilité électrodynamique ponctuelle; soit enfin, simultanément, de ces deux sortes d'instabilité.

54. Pour les corps diamagnétiques, les lois de l'Électromagnétisme se sont montrées en contradiction avec le Postulat énoncé au n° **5**; pour les corps diélectriques, au contraire, les lois de l'Électrodynamique ne nous ont rien enseigné qui ne se pût accorder avec ce même Postulat.

Pour les corps magnétiques et pour les corps diélectriques, les lois de la Statique sont absolument les mêmes; au contraire, les lois qui régissent la stabilité de l'équilibre ne sont pas les mêmes pour l'une et pour l'autre de ces deux catégories de corps, et cela, parce que le mouvement de l'aimantation sur les uns et le mouvement de la polarisation diélectrique sur les autres ne dépendent pas d'équations de même forme.

Gustave Robin a écrit ([1]), au sujet d'une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre qu'il pensait avoir donnée :

« Il importe de remarquer que, grâce aux principes de Carnot, nous avons pu établir *complètement* cette proposition capitale, sans

([1]) GUSTAVE ROBIN, *Œuvres scientifiques : Thermodynamique générale*, p. 83.

faire intervenir les lois de la Dynamique. Or, Lejeune-Dirichlet a seulement démontré que le minimum du potentiel est une condition *suffisante* pour l'équilibre stable, mais non qu'il en est la condition *nécessaire;* et sa démonstration s'appuie sur des résultats empruntés à la Dynamique, ce qui est un grave défaut : il n'est pas acceptable qu'on doive connaître les lois exactes du mouvement pour établir un théorème relatif à l'équilibre. »

A quel point cette dernière phrase exprime une pensée entachée d'erreur et capable de conduire à d'inacceptables conséquences, les théorèmes démontrés en ce qui précède en sont la preuve manifeste.

CHAPITRE IV.

LES CORPS DIAMAGNÉTIQUES ET LE PRINCIPE DE CARNOT.

53. En 1889, M. James Parker a publié, au sujet du diamagnétisme, un travail qui contenait d'importantes remarques [1]. Reproduisons ici quelques passages de ce travail :

« Soit A un morceau d'acier aimanté d'une manière permanente; soit B un morceau d'une substance diamagnétique quelconque, de bismuth par exemple, qui, lorsqu'on le place sous l'influence du corps A, est aimanté par influence et *repoussé* par A. Supposons qu'on effectue les cycles suivants d'opérations à température constante :

» *a*. Le corps B est amené d'une position P, éloignée de A, à une seconde position Q, voisine de A, et cela de manière que l'aimantation de ce corps B ait, à chaque instant, sa valeur maximum; soit W le *travail dépensé*. Supposons ensuite que le corps B retourne à sa position primitive P en suivant en ordre inverse la modification précédente. Le travail W, qui avait été dépensé dans la modification précédente, est recouvré dans celle-ci. Il n'y a donc, en somme, ni perte ni gain de travail.

» *b*. Le corps B est amené de P en Q si rapidement que l'aimanta-

---

[1] J. Parker, *On Diamagnetism and the Concentration of Energy* (*Philosophical Magazine*, 5e série, t. XXVII, mai 1889, p. 403).

tion de ce corps B n'ait pas le temps de s'altérer d'une manière sensible. Le travail fourni à B sera inférieur à W. On laisse ensuite B dans la position Q assez longtemps pour qu'il atteigne l'aimantation qui convient à l'équilibre, puis on le ramène rapidement de Q en P par le premier chemin renversé. Le travail rendu par B est supérieur à W. Ce cycle fournit donc, à température constante, un gain de travail, contrairement au principe de Carnot.

» Trois voies se présentent pour résoudre cette difficulté :

» 1° On peut supposer que le travail qui a été obtenu a été créé de rien. Cette manière de voir est en contradiction à la fois avec le principe de la conservation de l'énergie et avec le principe de Carnot, et ces derniers sont, aujourd'hui, universellement acceptés;

» 2° Le développement du magnétisme sur les corps diamagnétiques est instantané, contrairement à ce qui arrive pour les autres phénomènes physiques qui exigent un certain *temps*.

» 3° Le travail qu'on a gagné a été produit aux dépens de la *chaleur;* dans ce cas, le principe de l'énergie demeure intact, mais le principe de Carnot est en défaut. Si nous employons le travail produit à transporter de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud, nous sommes en possession d'un moyen qui permet de produire des inégalités de température, c'est-à-dire une concentration d'énergie, sans aucune action extérieure. Il devient donc nécessaire de modifier le principe de Carnot. »

56. Pour décrire le cycle défini par M. J. Parker, il faut déplacer le corps magnétique. On peut imaginer un cycle analogue dont le parcours laisse le corps immobile; les principes et les résultats restent essentiellement les mêmes, mais la discussion en est rendue plus aisée.

Imaginons un corps magnétique immobile en une région de l'espace où certains autres corps qui seront, en notre analyse, les *corps extérieurs* au système étudié, engendrent un certain champ magnétique. Soient L, M, N les composantes, en un point, de ce *champ magnétique externe*. Soient A, B, C les composantes, au même point, de l'intensité d'aimantation prise par le corps magnétique qui constitue le système étudié.

Si ce corps n'est parcouru par aucun courant de conduction;
S'il ne porte point une polarisation diélectrique variable;
Si, enfin, il demeure immobile,

une modification élémentaire au cours de laquelle A, B, C varient respectivement de δA, δB, δC correspond à un certain travail effectué par les actions extérieures, et ce travail a pour expression :

$$(117) \qquad \mathfrak{T} = \int (L\,\delta A + M\,\delta B + N\,\delta C)\,d\varpi.$$

Cela posé, considérons le cycle suivant, que nous supposerons parcouru sans que le corps magnétique éprouve aucun changement de température :

1° Au début de la *première opération*, les corps extérieurs sont supposés dépourvus de tout courant électrique et de toute aimantation, en sorte que le champ extérieur est nul. Le corps magnétique est complètement désaimanté :

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0,$$
$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$

Brusquement, c'est-à-dire en un temps nul, nous établissons le champ extérieur; il prend, en chaque point (x, y, z), des composantes que nous désignerons par L_0, B_0, C_0; nous admettons qu'*aucune aimantation ne peut être instantanée*, en sorte que, pendant cette opération de durée nulle, l'aimantation du corps considéré demeure nulle. On a donc, à la fin de cette opération,

$$L = L_0, \qquad M = M_0, \qquad N = N_0.$$
$$A = 0, \qquad B = 0. \qquad C = 0.$$

2° La *deuxième opération* consiste à laisser le corps magnétique sous l'action du champ externe (L_0, M_0, N_0), maintenu invariable, assez longtemps pour qu'il prenne l'aimantation d'équilibre (A_0, B_0, C_0) qui convient à ce champ. On a donc, à la fin de cette seconde opération,

$$L = L_0, \qquad M = M_0, \qquad N = N_0,$$
$$A = A_0, \qquad B = B_0, \qquad C = C_0.$$

3° En la *troisième opération*, nous anéantissons *brusquement* le

champ magnétique externe; en vertu de la supposition formulée à propos de la première opération, l'aimantation du corps ne varie pas, en sorte qu'à la fin de cette troisième opération, nous avons

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0,$$
$$A = A_0, \qquad B = B_0, \qquad C = C_0$$

4° La *quatrième opération* consiste à laisser le corps sous l'action du champ extérieur nul assez longtemps pour qu'il se désaimante totalement. A la fin de cette opération, nous avons

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0,$$
$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$

Le corps magnétique a parcouru un cycle fermé et isothermique; ce cycle diffère de celui que M. Parker a considéré; mais au sujet de ces deux cycles, des suppositions semblables ont été faites; il est donc naturel qu'ils conduisent tous deux à des conclusions semblables.

Calculons le travail accompli, durant le parcours de ce cycle, par les actions extérieures.

Selon la formule (117), ce travail est nul aussi bien durant la première opération que durant la troisième, car, en chacune de ces deux opérations, l'aimantation du corps demeure invariable.

Ce travail est également nul durant la quatrième opération, puisqu'elle s'accomplit alors que le champ extérieur est constamment nul.

Le travail externe relatif au cycle total se réduit donc au travail relatif à la seconde opération. Pendant que celle-ci s'accomplit, L, M, N gardent les valeurs invariables L_0, M_0, N_0, tandis que A, B, C croissent respectivement de 0, 0, 0, à A_0, B_0, C_0. La formule (117) nous montre alors que le travail externe accompli dans la seconde opération et, partant, dans le cycle tout entier, a pour valeur

$$(118) \qquad \mathfrak{T} = \int (L_0 A_0 + M_0 B_0 + N_0 C_0)\, d\varpi.$$

Mais A_0, B_0, C_0 sont les composantes de l'aimantation d'équilibre qui correspond au champ externe L_0, M_0, N_0; elles sont donc données par les équations (2) où les diverses quantités devront être affectées

de l'indice o; en d'autres termes, si K est le coefficient d'aimantation de la substance et V_0 la fonction potentielle magnétique due à la distribution A_0, B_0, C_0, nous aurons

$$(119)\qquad \begin{cases} A_0 = K\left(L_0 - \varepsilon \dfrac{\partial V_0}{\partial x}\right), \\ B_0 = K\left(L_0 - \varepsilon \dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right), \\ C_0 = K\left(L_0 - \varepsilon \dfrac{\partial V_0}{\partial z}\right) \end{cases}$$

et l'égalité (118) deviendra

$$(120)\quad \mathfrak{E} = \int \frac{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}{K}\, d\varpi + \varepsilon \int \left(A_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + B_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} + C_0 \frac{\partial V_0}{\partial z} \right) d\varpi.$$

Cette égalité peut encore s'écrire un peu autrement. Conformément à l'égalité (4), posons

$$(121)\qquad Y_0 = \frac{\varepsilon}{2} \int \left(A_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + B_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} + C_0 \frac{\partial V_0}{\partial z} \right) d\varpi$$

et nous aurons

$$(122)\qquad \mathfrak{E} = 2\left(Y_0 + \int \frac{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}{2K}\, d\varpi \right).$$

Ce résultat est indépendant de la nature du corps magnétique et de la figure qu'il affecte.

Imaginons maintenant que la substance considérée soit diamagnétique ($K < 0$), mais qu'elle soit assez faiblement diamagnétique pour que $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ soit positif. Donnons au corps étudié la figure d'un ellipsoïde quelconque, et supposons que le champ externe (L_0, M_0, N_0) soit un champ uniforme. On sait que, dans ces conditions, l'aimantation d'équilibre (A_0, B_0, C_0) sera une aimantation uniforme. Dès lors, ce qui a été établi au n° **11** nous apprend que

$$Y_0 + \int \frac{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}{K}\, d\varpi$$

est négatif. Ainsi, *pour un tel corps diamagnétique, le travail accompli par les actions extérieures durant le parcours du cycle isothermique considéré est négatif.*

On retrouverait la même conclusion en faisant usage d'un corps diamagnétique pour lequel $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ serait négatif, pourvu, toutefois, que $\left(1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon K\right)$ fût positif; selon ce qui a été dit au n° **10**, il suffirait alors de donner au corps non plus la figure d'un ellipsoïde quelconque, mais la figure d'une sphère.

Nous arrivons ainsi, à l'aide d'un corps diamagnétique, à constituer un cycle isothermique qui contredit à cette proposition de Clausius : *Lorsqu'un système parcourt un cercle isothermique, le travail total accompli par les actions extérieures ne peut être que nul ou positif.*

C'est la conclusion que M. Parker avait également tirée du raisonnement que nous avons reproduit.

57. Ce raisonnement est vicieux, et M. Parker a entrevu ce en quoi il pèche.

Nous avons admis, d'une part, qu'une variation brusque du champ magnétique externe n'entraînait aucune variation brusque de l'aimantation.

Nous avons admis, d'autre part, qu'il n'y avait pas, en notre corps, de courants de conduction; qu'il n'y avait pas davantage de polarisation diélectrique variable, partant, pas de courants de déplacement.

Or, cette seconde supposition entraîne cette conséquence : les équations (2) sont, à chaque instant, applicables; la distribution de l'aimantation sur le corps magnétique considéré est, à chaque instant, celle qu'il faut faire correspondre au champ extérieur pour assurer l'équilibre. Dès lors, il est contradictoire d'imaginer qu'une variation brusque du champ ne soit pas accompagnée d'une variation brusque de l'aimantation. Le raisonnement précédent est illogique.

Si l'on veut qu'une variation d'aimantation ne se puisse produire brusquement, il faut que les équations (2) cessent d'être applicables au corps parfaitement doux que nous étudions; pour cela, il faut et il suffit que ce corps soit le siège de courants de conduction ou de courants de déplacement ou, à la fois, de ces deux sortes de courants. Mais alors, le travail externe doit s'évaluer tout autrement que nous ne l'avons évalué au n° **56**. Nous allons calculer exactement ce travail

et montrer comment ce calcul fait disparaître tout paradoxe relatif aux corps diamagnétiques.

38. En chaque point du corps considéré, l'intensité d'aimantation a pour composantes A, B, C; l'intensité de polarisation diélectrique a pour composantes A′, B′, C′; la densité du courant de conduction a pour composantes u, v, w; la densité du courant de déplacement a pour composantes $\frac{\partial A'}{\partial t}$, $\frac{\partial B'}{\partial t}$, $\frac{\partial C'}{\partial t}$; la densité du courant total a donc pour composantes

$$(123) \qquad \varphi = u + \frac{\partial A'}{\partial t}, \qquad \psi = v + \frac{\partial B'}{\partial t}, \qquad \chi = w + \frac{\partial C'}{\partial t}.$$

En chaque point agit un champ magnétique externe dont les composantes sont L, M, N, et un champ électrique externe dont les composantes sont X, Y, Z.

Si, pendant un temps dt, le corps demeure immobile, le travail accompli pendant ce temps par les actions extérieures se compose de deux termes :

Le travail magnétique externe

$$\tau = dt \int \left(L\frac{\partial A}{\partial t} + M\frac{\partial B}{\partial C} + N\frac{\partial C}{\partial t} \right) d\varpi$$

et le travail électrique externe

$$\tau' = dt \int (X\varphi + Y\psi + Z\chi)\, d\varpi.$$

Le travail externe total a pour valeur

$$\mathfrak{E} = \tau + \tau'$$

ou bien

$$(124) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{E} = {} & dt \int \left(L\frac{\partial A}{\partial t} + M\frac{\partial B}{\partial t} + N\frac{\partial C}{\partial t} \right) d\varpi \\ & + dt \int (Xu + Yv + Zw)\, d\varpi \\ & + dt \int \left(X\frac{\partial A'}{\partial t} + Y\frac{\partial B'}{\partial t} + Z\frac{\partial C'}{\partial t} \right) d\varpi. \end{aligned}$$

Considérons, en un point du corps, le champ magnétique total. Ce champ se compose :

1° Du champ magnétique externe dont L, M, N sont les composantes.

2° Du champ magnétique produit par l'aimantation distribuée sur le corps; si l'on garde les notations posées au n° 1, ce champ a pour composantes

$$-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}.$$

3° Du champ magnétique produit par les courants, tant de déplacement que de conduction, qui circulent dans la masse du corps.

Posons les formules

$$(125)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}(x, y, z) = \displaystyle\int\left(\psi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1} - \chi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\right)d\varpi_1, \\ \mathfrak{Q}(x, y, z) = \displaystyle\int\left(\chi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1} - \varphi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)d\varpi_1, \\ \mathfrak{R}(x, y, z) = \displaystyle\int\left(\varphi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1} - \psi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\right)d\varpi_1, \end{cases}$$

où r est la distance mutuelle des deux points (x, y, z), (x_1, y_1, z_1); désignons par $\frac{a^2}{2}$ la constante fondamentale de l'Électrodynamique; par $\frac{a}{\sqrt{2}}$ la racine carrée positive de cette quantité; par $\sqrt{\varepsilon}$ la racine carrée positive de la constante fondamentale du Magnétisme; les composantes du champ considéré seront

$$\frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\mathfrak{P}, \quad \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\mathfrak{Q}, \quad \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\mathfrak{R}.$$

Chacune des composantes A, B, C de l'aimantation au point (x, y, z) s'obtient en multipliant la composante correspondante du champ magnétique total par le coefficient d'aimantation K. Les équations de l'aimantation sont donc l'équation

$$(126)\qquad A = K\left(L - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\mathfrak{P}\right)$$

et deux équations analogues.

Considérons de même, au point (x, y, z), le champ électrique total. Il se compose :

1° Du champ électrique externe dont les composantes sont X, Y, Z.

2° Du champ électrostatique; si V′ est la fonction potentielle électrostatique, ce champ a pour composantes

$$-\varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial x}, \quad -\varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial y}, \quad -\varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial z}.$$

3° Du champ électrodynamique créé par les courants de conduction et de déplacement.

Désignons par k la constante numérique introduite par Helmholtz dans l'étude de l'Électrodynamique; posons, avec Helmholtz,

$$(127)\quad \mathfrak{V}(x, y, z) = \int\left[\frac{1+K}{2}\frac{\varphi_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r}\left(\frac{x_1-x}{r}\varphi_1 + \frac{y_1-y}{r}\psi_1 + \frac{z_1-z}{r}\chi_1\right)\right]d\varpi_1,$$

et désignons par $\mathfrak{P}(x, y, z)$, $\mathfrak{W}(x, y, z)$ deux fonctions analogues; les composantes du champ considéré seront

$$-\frac{a^2}{2}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}, \quad -\frac{a^2}{2}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}, \quad -\frac{a^2}{2}\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t}.$$

4° Du champ électromagnétique dû aux variations de l'aimantation sur le corps considéré.

Posons

$$(128)\quad \begin{cases} F(x, y, z) = \displaystyle\int\left(B_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1} - C_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\right)d\varpi_1, \\ G(x, y, z) = \displaystyle\int\left(C_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1} - A_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)d\varpi_1, \\ H(x, y, z) = \displaystyle\int\left(A_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1} - B_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\right)d\varpi_1. \end{cases}$$

Cette dernière partie du champ aura pour composantes

$$\frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\frac{\partial G}{\partial t}, \quad \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\frac{\partial H}{\partial t}.$$

En chaque point, chacune des composantes u, v, w de la densité du courant de conduction s'obtient en divisant par la résistivité ρ la composante correspondante du champ électrique; on a donc

$$\rho u = X - \varepsilon' \frac{\partial V'}{\partial x} - \frac{a^2}{2} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} + \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \frac{\partial F}{\partial t} \tag{129}$$

et deux équations analogues.

En chaque point, chacune des composantes A′, B′, C′ de la polarisation diélectrique s'obtient en multipliant la composante correspondante du champ électrique par le coefficient de polarisation K′; on a donc

$$\frac{A'}{K'} = X - \varepsilon' \frac{\partial V'}{\partial x} - \frac{a^2}{2} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} + \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \frac{\partial F}{\partial t} \tag{130}$$

et deux équations analogues.

Au second membre de l'égalité (124), transformons le premier terme en tirant L, M, N des égalités (126); le second terme, en tirant X, Y, Z des égalités (129); le troisième terme, en tirant X, Y, Z des égalités (130); tenons compte, d'ailleurs, des égalités (123); nous trouvons

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C} = {} & dt \int \rho (u^2 + v^2 + w^2)\, d\varpi \\
& + dt \frac{d}{dt} \left(\int \frac{A^2 + B^2 + C^2}{2K} d\varpi + \int \frac{A'^2 + B'^2 + C'^2}{2K'} d\varpi \right) \\
& + dt\, \varepsilon \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial C}{\partial t} \right) d\varpi \\
& + dt\, \varepsilon' \int \left(\frac{\partial V'}{\partial x} \varphi + \frac{\partial V'}{\partial y} \psi + \frac{\partial V'}{\partial z} \chi \right) d\varpi \\
& + dt \frac{a^2}{2} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} \varphi + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} \psi + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} \chi \right) d\varpi \\
& - dt \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{\partial F}{\partial t} \varphi + \frac{\partial G}{\partial t} \psi + \frac{\partial H}{\partial t} \chi \right) d\varpi \\
& - dt \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \int \left(\mathfrak{P} \frac{\partial A'}{\partial t} + \mathfrak{Q} \frac{\partial B'}{\partial t} + \mathfrak{R} \frac{\partial C'}{\partial t} \right) d\varpi.
\end{aligned} \tag{131}$$

Cette égalité suppose que K et K′ demeurent invariables pendant le temps dt, ce qui exige que la température ne varie pas; si elle variait

de $\frac{dT}{dt}dt$, il faudrait ajouter au second membre

$$\left(\int \frac{A^2+B^2+C^2}{2K^2}\frac{dK}{dT}d\varpi + \int \frac{A'^2+B'^2+C'^2}{2K'^2}\frac{dK}{dT}d\varpi\right)\frac{dT}{dt}dt.$$

Mais : 1° Si l'on garde à la quantité Y la signification que lui donne l'égalité (3), une démonstration connue donne

$$\varepsilon\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial t}\right)d\varpi = \frac{dY}{dt}.$$

2° Si l'on désigne par W le potentiel électrostatique total dû à toutes les charges électriques et à toute la polarisation diélectrique que porte le corps considéré, on sait qu'on a

$$\varepsilon'\int\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\varphi + \frac{\partial V'}{\partial y}\psi + \frac{\partial V'}{\partial z}\chi\right)d\varpi = \frac{dW}{dt}.$$

3° De même, si l'on désigne par H le potentiel électrodynamique de tous les courants, tant de conduction que de déplacement, qui circulent dans le corps considéré, potentiel qui a pour expression

(132) $$H = -\frac{a^2}{4}\int(\mathfrak{U}\varphi + \mathfrak{V}\psi + \mathfrak{W}\chi)\,d\varpi,$$

on trouve sans peine l'égalité

$$\frac{a^2}{2}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}\varphi + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}\psi + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}\chi\right)d\varpi = -\frac{dH}{dt}.$$

Enfin, l'examen des formules (125) et (128) donne immédiatement

$$\frac{\partial F}{\partial t}\varphi + \frac{\partial G}{\partial t}\psi + \frac{\partial H}{\partial t}\chi + \mathfrak{A}\frac{\partial A}{\partial t} + \mathfrak{B}\frac{\partial B}{\partial t} + \mathfrak{C}\frac{\partial C}{\partial t} = 0.$$

Moyennant ces diverses formules, l'égalité (131) devient

(133) $$\begin{aligned}\mathfrak{T} = {} & dt\int\rho(u^2+v^2+w^2)\,d\varpi \\ & + dt\frac{d}{dt}\left(\int\frac{A^2+B^2+C^2}{2K}d\varpi + \int\frac{A'^2+B'^2+C'^2}{2K}d\varpi + Y + W - H\right).\end{aligned}$$

Telle est l'expression du travail accompli par les actions extérieures pendant que le corps, maintenu immobile, éprouve une modification élémentaire, isothermique et réelle.

Si le corps parcourt un cycle isothermique à la fin duquel l'aimantation, la polarisation diélectrique, les courants, tant de déplacement que de conduction, sont les mêmes qu'au commencement, le travail accompli par les actions extérieures se réduit à

$$(134)\qquad \mathcal{E} = \int_{t_0}^{t}\int \rho(u^2+v^2+w^2)\,d\varpi.$$

Positif si le système a été parcouru par des courants de conduction, ce travail est nul en tout autre cas, ce qui est conforme à la proposition de Clausius.

Ce résultat fait évanouir l'objection que, de la proposition de Clausius, on pouvait tirer, semble-t-il, contre l'existence des corps diamagnétiques.

On voit, par cet exemple, combien il est dangereux, en l'étude thermodynamique de phénomènes irréversibles, d'employer des raisonnements intuitifs et sommaires analogues à celui dont M. J. Parker a fait usage. Il est indispensable de suivre dans le détail la transformation réellement éprouvée par le système, en écrivant, à chaque instant, les équations qui régissent le mouvement de ce système. Cette méthode lente, mais sûre, est la seule qui nous puisse mettre en garde contre les conséquences paradoxales ou contradictoires auxquelles on est souvent conduit par l'emploi de procédés trop brefs et trop peu rigoureux.

Extrait d'une lettre à M. Haton de la Goupillière

Par Gomes TEIXEIRA.

Ma première Communication concerne la théorie des développoïdes, qui a attiré bien des fois votre attention. Je vais démontrer à cet égard le théorème suivant :

Les foyers d'une courbe C sont aussi des foyers de sa développoïde.

On sait que la développée d'une courbe jouit de cette propriété, mais je crois que le théorème plus général que je viens d'énoncer n'a pas encore été signalé.

Soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations de la courbe C. L'équation de la droite D qui passe par le point (x, y) de cette courbe et fait un angle ω avec la tangente en ce point est

$$\begin{aligned} &x'(\mathrm{Y}\cos\omega + \mathrm{X}\sin\omega) + y'(\mathrm{Y}\sin\omega - \mathrm{X}\cos\omega) \\ &\quad = y(x'\cos\omega + y'\sin\omega) - x(y'\cos\omega - x'\sin\omega). \end{aligned}$$

En dérivant cette équation par rapport à t, on a

$$\begin{aligned} &x''(\mathrm{Y}\cos\omega + \mathrm{X}\sin\omega) + y''(\mathrm{Y}\sin\omega - \mathrm{X}\cos\omega) \\ &\quad = (x'^2 + y'^2 + xx'' + yy'')\sin\omega + (yx'' - xy'')\cos\omega. \end{aligned}$$

Donc, l'enveloppe de la droite D, c'est-à-dire la développoïde de C, peut être représentée par les équations paramétriques

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{Y} = y + (y'\cos\omega - x'\sin\omega)\dfrac{x'^2 + y'^2}{y'x'' - x'y''}\sin\omega, \\[2ex] \mathrm{X} = x + (x'\cos\omega + y'\sin\omega)\dfrac{x'^2 + y'^2}{y'x'' - x'y''}\sin\omega. \end{cases}$$

Cela posé, remarquons qu'on peut déterminer les foyers (x_1, y_1) de la courbe donnée C au moyen de l'équation qui résulte de l'élimination de t entre les équations

$$(2) \qquad y' = ix', \qquad y_1 - ix_1 = y - ix.$$

D'un autre côté, on peut déterminer les foyers (X_1, Y_1) de la développoïde de C au moyen des équations

$$(3) \qquad Y' = iX', \qquad Y_1 - iX_1 = Y - iX.$$

Or, en dérivant les expressions de x et y, données par les équations (1) par rapport à t et en faisant ensuite $y = ix$, on trouve les relations

$$Y' = y' - 2ix'(i\cos\omega - \sin\omega),$$
$$X' = x' - 2ix'(\cos\omega + i\sin\omega);$$

d'où il résulte

$$Y' = iX'.$$

Les mêmes équations (1) donnent encore, quand on pose $y = ix$,

$$Y - iX = y - ix.$$

Donc, les valeurs de t qui vérifient les équations (2) vérifient aussi les équations (3), si l'on pose $x_1 = X_1$, $y_1 = Y_1$; et par conséquent chaque foyer de C est aussi un foyer de sa développoïde.

*
* *

Ma seconde Communication concerne la théorie des foyers des courbes. Je vais en effet démontrer le théorème suivant, qui est peut-être nouveau :

La polaire d'une courbe quelconque par rapport à un cercle ayant son centre en un foyer de cette courbe passe par les points circulaires de l'infini.

Soient $y = f(x)$ la fonction définie par l'équation $F(x, y) = 0$ de la courbe donnée et (x', y') les coordonnées d'un de ses foyers. Ces coordonnées doivent vérifier l'équation qui résulte de l'élimination

de x et y entre les équations

$$y=f(x),\qquad f'(x)=i,\qquad iy'+x'=iy+x,$$

c'est-à-dire l'équation

$$iy'+x'=if[\varphi(i)]+\varphi(i),$$

où φ désigne la fonction inverse de la fonction $f'(x)$.

D'un autre côté, en transportant l'origine des coordonnées en un point $(-x_1, -y_1)$, l'équation de la courbe donnée prend la forme

$$y+y_1=f(x+x_1),$$

et l'équation de sa polaire par rapport au cercle représenté par l'équation

$$x^2+y^2=r^2,$$

résulte de l'élimination de x et y entre les équations

$$[f(x+x_1)-y_1]\mathrm{Y}+x\mathrm{X}=r^2,$$
$$\mathrm{Y}f'(x+x_1)+\mathrm{X}=0,$$

qui donne

$$\left\{f\left[\varphi\left(-\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}\right)\right]-y_1\right\}\mathrm{Y}+\left[\varphi\left(-\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}\right)-x_1\right]\mathrm{X}=r^2.$$

En faisant $\mathrm{X}=\infty$, $\lim\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=i$, on déduit de cette équation la condition pour que la polaire considérée passe par les points circulaires de l'infini, savoir :

$$iy_1+x_1=f[\varphi(i)]+\varphi(i).$$

Donc $x_1=x'$, $y_1=y'$, et le théorème est démontré.

* * *

Avant de terminer, je communiquerai encore un théorème sur un autre sujet.

Si une courbe glisse sur une droite fixe de manière qu'elle soit toujours tangente à cette droite en un même point de la droite, un point M du plan de la courbe décrit une ligne nommée *glissette de la courbe par rapport à la droite*. Cela posé, nous avons trouvé le théorème suivant :

La glissette du centre du cercle fixe d'une épicycloïde ou hypocycloïde quelconque est une ellipse.

Rapportons la courbe glissante à un système de coordonnées polaires (ρ, θ) ayant pour pôle le point décrivant M et pour axe une droite arbitraire du plan de cette courbe, et rapportons la glissette à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales ayant pour origine O, le point de contact de la courbe mobile avec la droite donnée, et pour axe des abscisses cette droite. En désignant par ν l'angle que la droite OM fait avec cet axe, et par x, y les coordonnées du point M, on a

$$x = \mathrm{OM}\cos\nu = \rho\cos\nu, \qquad y = \rho\sin\nu,$$

et par conséquent la glissette peut être représentée par les équations paramétriques

$$x = \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2\, d\theta^2 + d\rho^2}}, \qquad y = \frac{\rho^2\, d\theta}{\sqrt{\rho^2\, d\theta^2 + d\rho^2}}.$$

Si la courbe glissante est représentée par les équations paramétriques polaires

$$\rho = \varphi(u), \qquad \theta = \psi(u),$$

les équations précédentes prennent la forme

$$(1) \qquad x = \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2\theta'^2 + \rho'^2}}, \qquad y = \frac{\rho^2\theta'}{\sqrt{\rho^2\theta'^2 + \rho'^2}},$$

θ' et ρ' désignant les dérivées de θ et ρ par rapport à u.

Nous allons appliquer ces formules générales aux épicycloïdes et hypocycloïdes.

Les équations de ces courbes sont, R et r étant les rayons des cercles mobile et fixe,

$$x = (\mathrm{R} + r)\cos\alpha - r\cos\frac{\mathrm{R} + r}{r}\alpha,$$

$$y = (\mathrm{R} + r)\sin\alpha - r\sin\frac{\mathrm{R} + r}{r}\alpha.$$

Donc

$$(2) \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 = (\mathrm{R} + r)^2 + r^2 - 2(\mathrm{R} + r)r\cos\frac{\mathrm{R}}{r}\alpha.$$

Nous avons encore, en faisant $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$,

$$d\rho \cos\theta - \rho \sin\theta \, d\theta = (R + r)\left(\sin \frac{R + r}{r}\alpha - \sin\alpha\right) d\alpha,$$

$$d\rho \sin\theta + \rho \cos\theta \, d\theta = (R + r)\left(\cos\alpha - \cos\frac{R + r}{r}\alpha\right) d\alpha$$

et, par suite, en tenant compte de l'équation précédente,

$$d\rho^2 + \rho^2 \, d\theta^2 = 2(R + r)^2\left(1 - \cos\frac{R}{r}\alpha\right) d\alpha^2 = (R + r)\frac{\rho^2 - R^2}{r} d\alpha^2.$$

Mais l'équation (2) donne

$$\rho \, d\rho = (R + r) R \sin\frac{R}{r}\alpha \, d\alpha$$

et, par suite,

$$d\alpha^2 = \frac{4 r^2 \rho^2 \, d\rho^2}{R^2(\rho^2 - R^2)\left[(R + 2r)^2 - \rho^2\right]}.$$

Donc

$$d\rho^2 + \rho^2 \, d\theta^2 = \frac{4(R + r) r \rho^2 \, d\rho^2}{R^2\left[(R + 2r)^2 - \rho^2\right]}$$

et, par suite,

$$d\theta = \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho\sqrt{m^2\rho^2 - R^2}}, \qquad m = \frac{R}{R + 2r}.$$

Cette équation peut être intégrée par les méthodes classiques, et l'on trouve

$$\theta = \frac{1}{m}\left[\text{arc tang}\sqrt{\frac{m^2\rho^2 - R^2}{m^2(R^2 - \rho^2)}} - m \, \text{arc tang}\sqrt{\frac{m^2\rho^2 - R^2}{R^2 - \rho^2}}\right]$$

ou

$$\theta = \frac{1}{m}\left(\text{arc tang}\frac{u}{m} - m \, \text{arc tang}\, u\right),$$

en posant

$$u = \sqrt{\frac{m^2\rho^2 - R^2}{R^2 - \rho^2}}.$$

Donc la courbe peut être représentée par les équations paramétriques

$$\theta = \frac{1}{m}\left(\text{arc tang}\frac{u}{m} - m \, \text{arc tang}\, u\right),$$

$$\rho^2 = \frac{R^2(u^2 + 1)}{u^2 + m^2}.$$

En appliquant maintenant à ces équations les formules (1) et en

tenant compte des relations

$$\theta' = \frac{1 - m^2}{(u^2 + m^2)(u^2 + 1)}, \qquad \rho' = \frac{R^2(m^2 - 1)u}{\rho(u^2 + m^2)^2},$$

on obtient les équations

$$x = \frac{Ru}{\sqrt{u^2 + m^2}}, \qquad y = \frac{R}{\sqrt{u^2 + m^2}};$$

d'où il résulte, par l'élimination de u,

$$x^2 + m^2 y^2 = R^2.$$

Cette équation représente une ellipse, et le théorème énoncé est donc démontré.

Dans le même ordre d'idées, j'énoncerai, sans m'arrêter à sa démonstration, la proposition suivante :

La roulette ordinaire et la roulette à glissement proportionnel décrites par le centre du cercle fixe d'une épicycloïde ou hypercycloïde ordinaire, roulant sur une droite, sont formées par une suite d'arcs d'ellipse.

J'appelle *roulette à glissement proportionnel* la courbe décrite par un point du plan d'une courbe roulant et glissant sur une droite, de manière que le segment compris entre le point de contact M avec la droite et un point fixe O de cette droite, soit proportionnel à l'arc de cette courbe compris entre le point M et le point de la courbe qui coïncide avec O quand elle devient tangente à la droite en ce point.

On connaît cette propriété des roulettes ordinaires des épicycloïdes ou hypocycloïdes, mais je crois que la généralisation aux roulettes *à glissement proportionnel* n'a pas encore été signalée.

Sur les systèmes de réservoirs et divers problèmes d'Algèbre et d'Analyse corrélatifs;

PAR EDMOND MAILLET.

I. — Introduction.

J'ai étudié antérieurement [1] les systèmes de n réservoirs $S_1, \ldots, S_n$, en envisageant surtout les réservoirs de liquide dont la surface est libre, et dont les dispositifs de communication ne sont pas noyés, et supposant que chaque dispositif ne réunissait que deux réservoirs.

Mais d'abord, il pourra arriver pour les liquides que certains dispositifs soient noyés, c'est-à-dire que le débit du dispositif qui fait communiquer par exemple S_i et S_k dépende des niveaux z_i, z_k de ces deux réservoirs; d'autre part, des problèmes de même nature se rencontrent dans la théorie des gaz et dans celle de la chaleur, probablement ailleurs encore; enfin, certains dispositifs de communication peuvent être établis de façon que chacun réunisse un nombre quelconque de réservoirs, en sorte que S_i perd ou gagne par ce dispositif un débit dépendant des niveaux, pressions, etc., de ces réservoirs (exemple : conduites branchées ou maillées dans les distributions d'eau). On est ainsi conduit à envisager l'étude de ce problème général :

Soient n objets ou réservoirs $S_1, \ldots, S_n$ qui jouissent d'une propriété ou d'un état défini pour chacun par une certaine quantité caractéristique variable $z_1, \ldots, z_n$, qui s'influencent réciproquement, et dont chacun peut subir, en outre, des actions extérieures

(1) *Voir*, par exemple, *Comptes rendus*, 13 juillet et 23 novembre 1908; *Journ. de Math.*, 1909; *Journ. École Polyt.*, 1909.

fonctions des quantités z_i ou du temps t. Quelles sont les variations de $z_1, \ldots, z_n$?

Il s'agira généralement de n réservoirs d'énergie, qui échangent de l'énergie, et en perdent ou en gagnent au dehors, dans des conditions convenables.

D'autre part, les diverses questions que soulève cette étude conduisent à une série de problèmes d'Algèbre ou d'Analyse. Il convient d'abord de poser ces problèmes sous une forme aussi simple et aussi générale que possible pour l'analyste. Ainsi, dans le cas des liquides, les débits des dispositifs de communication peuvent avoir, d'après les formules usuelles, des expressions assez différentes, multiformes, qui pourraient conduire, pour un même système de réservoirs, à plusieurs types de systèmes d'équations différentielles et à une grande complication dans les recherches. De plus, les formules usuelles pourront être légèrement modifiées plus tard, et elles ne s'appliquent qu'à des types de dispositifs de formes assez régulières et spéciales. C'est là une difficulté qui relève surtout de l'Hydraulique théorique et expérimentale et de la Physique, qui se présente d'ailleurs souvent dans les problèmes que la nature offre à l'analyste, et qui peut, une fois résolue, n'être pas toujours appréciée à sa valeur. Enfin, on doit encore désirer donner aux équations fondamentales une forme assez générale pour que les propriétés qu'on en déduit aient, avec le moins de démonstrations possibles, des applications mécaniques et physiques aussi variées que possible.

J'ai réussi, pour des cas très étendus : 1° à établir les systèmes d'équations différentielles et implicites du problème général précité; 2° à montrer que, avec une alimentation limitée, les quantités $z_1, \ldots, z_n$ restent limitées si, bien entendu, les communications internes et externes sont convenablement disposées; 3° à étudier la stabilité du régime permanent, les petites perturbations périodiques et les régimes voisins de ce régime.

La base de mes recherches est le postulat [1] *suivant que j'ai*

---

[1] *Seconde Notice supplémentaire sur mes travaux scientifiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1909, p. 19. Je l'ai déjà indiqué sous une forme moins générale dans des écrits antérieurs (par exemple, *Journ. École Polyt.*, p. 52).

adopté : le débit d'un dispositif de communication de deux réservoirs S_1, S_2 (et de deux seulement) est habituellement, *sauf dans des domaines limités*, une fonction univalente [mais qui peut être multiforme [1]] de z_1 et z_2, croissante de z_1, décroissante (ou non croissante) de z_2, quand $z_1 > z_2$, z_1 et z_2 étant les quantités caractéristiques de S_1 et S_2. Ce postulat est d'accord avec les faits connus (Bazin, Boussinesq, Parenty, etc.), même quand le dispositif est un siphon, cas où le débit est bivalent dans un domaine limité; il pourrait conduire à des expériences de vérification.

Une formule de M. Bazin, relative aux déversoirs noyés, en hydraulique des liquides, semble être en contradiction partielle avec ce postulat. Or, il se trouve que les expériences corrélatives concordent au contraire avec lui, par suite, naturellement aussi la formule dans les limites où elle se trouve établie.

Plusieurs fois j'ai rencontré des problèmes d'Algèbre et d'Analyse que je n'ai pas complètement résolus, ou dont la portée peut être rendue sensiblement plus générale qu'il n'est nécessaire pour les conséquences que j'avais en vue. Certains de ceux dont j'ai détaillé ici la solution font l'objet d'une exposition spéciale qu'on peut lire sans étudier à fond le reste du Mémoire (§ IV au § VI). Une solution plus étendue de quelques-uns de ces problèmes posés au mathématicien pur serait très désirable : elle comporterait, comme cas particuliers, des applications aux systèmes de n réservoirs. Je signalerai principalement l'étude d'une équation algébrique (§ V), qui comprend l'équation dite *séculaire* [2].

---

(1) Cette fonction peut avoir jusqu'à cinq formes différentes aux environs d'un même point z_1, z_2.

(2) La plus grande partie de mon Mémoire a fait l'objet de deux Communications résumées à l'Académie des Sciences de Paris (*Comptes rendus*, 12 et 19 juillet 1909); *voir* encore *Intermédiaire des Math.*, 1909, p. 241, question 3623.

Incidemment, je mentionnerai que les fonctions asymptotiquement périodiques, rencontrées au cours de mes recherches d'hydraulique, ont fait aussi l'objet, pour le domaine réel et le domaine complexe, d'une Communication au *Congrès de l'Assoc. franç. pour l'avancement des Sciences*, tenu à Lille en 1909, et d'une Note dans le *Bull. Soc. math.*, t. XXXVIII, 1910, p. 263.

PREMIÈRE PARTIE.

II. — Généralités.

1. Réservoirs pouvant communiquer deux a deux. — Soit un système de n réservoirs $S_1, \ldots, S_n$ contenant un liquide, de l'eau, par exemple, dont la surface est libre, de niveaux $y_1, \ldots, y_n$ comptés à partir d'un plan horizontal de comparaison : ces réservoirs peuvent communiquer 2 à 2 (mais non 3 à 3, 4 à 4, ...), reçoivent de l'extérieur des débits $a_1, \ldots, a_n$ fonctions ou non du temps, et l'un au moins se déverse à l'extérieur. En ajoutant au besoin des réservoirs supplémentaires, on peut toujours supposer que le vidage se fait à l'extérieur par des déversoirs, orifices, etc., non noyés, ou encore, ce qui revient au même au point de vue de l'analyse, dans des réservoirs à niveau fixe assez bas qui n'appartiennent pas au système.

J'ai surtout envisagé antérieurement le cas où les déversoirs, orifices, etc., de communication ne sont pas noyés ([1]); on peut alors toujours supposer les réservoirs numérotés de façon que, au moins pendant une certaine période de temps, S_j alimente exclusivement $S_{j+1}, \ldots, S_n$, et que S_n a ses exutoires externes.

Ce cas est compris dans celui, plus général et compliqué, où l'on ne fait pas d'hypothèses sur les déversoirs, orifices, etc., dont le débit n'est plus, pour S_j, exclusivement fonction de y_j, ce qui rend les problèmes bien plus difficiles. En effet, la méthode que j'ai habituellement employée consistait à étudier le mouvement des eaux de 1, 2, ..., m réservoirs, en vérifiant les lois supposées pour un réservoir, admettant leur exactitude pour un système d'au plus $m-1$ réservoirs, puis l'établissant pour un système de m réservoirs. Cette méthode est évidemment en défaut dans le cas plus étendu précité.

Il y a pourtant un vif intérêt à aborder ce dernier : le problème

---

([1]) *Comptes rendus*, 23 juillet et 23 nov. 1908; *Journal de Math.*, 1909; *Journ. École Polyt.*, 1909, par exemple. *Errata* au *Journal de Math.*, 1909 : page 257, ligne 5 et page 259, lignes 11 et 17, *après* ajutages, *ajouter* non noyés; page 259, ligne 19, *au lieu de* u_i, *lire* z_i^2.

général de n réservoirs de liquide considéré ci-dessus n'est, en effet, qu'un cas particulier du problème type suivant :

2. Problème type. — *Soient n objets $S_1, \ldots, S_n$ jouissant d'une propriété ou d'un état défini pour chacun par une certaine quantité caractéristique variable $z_1, \ldots, z_n$; cette propriété pour chacun est influencée par la propriété analogue des autres, suivant une loi supposée connue : étudier les lois de variation de $z_1, \ldots, z_n$. Les n objets peuvent en outre subir, au sujet de cette propriété, des influences extérieures caractérisées pour S_i par une fonction a_i du temps et une fonction de z_i, ou même de plusieurs des quantités z.*

Les problèmes envisagés dans la suite, et qui rentrent dans le problème type qui vient d'être énoncé, sont relatifs au cas où l'on regarde $S_1, \ldots, S_n$ comme des réservoirs d'énergie, cette énergie étant susceptible de se transmettre d'un réservoir à l'autre ou au dehors, et les réservoirs pouvant en outre être alimentés en énergie.

Comme je l'ai déjà indiqué ailleurs [1], on peut, à ce point de vue, étudier, par exemple, en dehors du cas des liquides :

1° Dans la théorie de la chaleur, n corps conducteurs aux températures $z_1, \ldots, z_n$, et qui s'influencent réciproquement, en étant ou non en communication avec des sources de chaleur ;

2° Dans l'hydraulique des gaz, n réservoirs d'air ou de gaz comprimé ou raréfié, aux pressions $z_1, \ldots, z_n$, qui communiquent et sont ou non alimentés du dehors.

Je signalerai d'autres cas par la suite.

Mais, dans ces nouveaux problèmes, le débit transmis par le corps conducteur ou le réservoir de gaz S_i à S_j peut dépendre de z_i et de z_j, comme pour les réservoirs d'eau quand le dispositif de communication est noyé. On se trouvera donc, s'il en est ainsi, dans un cas tout à fait analogue au cas général des n réservoirs de liquide. Il importe d'es-

---

(1) *Bull. Soc. math.*, t. XXIII, 1905, p. 141.

Si l'on ne veut pas négliger, comme je continue à le faire, l'influence du temps de parcours des dispositifs de communication, les problèmes se compliquent encore; mais peut-être leur importance s'accroît-elle. On rencontre ainsi des problèmes relatifs aux distributions d'eau, aux rivières canalisées avec des barrages fixes, etc.

sayer d'obtenir, pour tous ces cas, des systèmes d'équations différentielles semblables, de façon qu'un exposé commun conduise simultanément au plus grand nombre possible de propriétés du mouvement.

Je conviendrai d'appeler chaque objet un *réservoir* et z_i la quantité *caractéristique* de l'état de l'objet S_i à l'instant t. Il existera une certaine fonction de z_i

$$\omega_i = F_i(z_i)$$

croissante, ou non décroissante (je dirai dans la suite *croissante*, en vue d'abréger), qui sera la *capacité* de S_i pour la valeur de z_i considérée, et dont je fixerai le sens exact plus loin.

Nous allons chercher à définir analytiquement :

1° L'influence réciproque de deux réservoirs S_i et S_j, due aux dispositifs de communication qui les relient directement sans être rattachés à d'autres réservoirs ou à l'extérieur;

2° Les influences extérieures s'exerçant sur un réservoir S_j sans intervention des autres réservoirs ;

3° Des cas étendus où les dispositifs de communication de deux réservoirs sont reliés en même temps à au moins un autre réservoir ou à l'extérieur. On ramènera ces cas aux deux précédents, grâce à l'introduction de réservoirs fictifs aux *nœuds* des dispositifs, c'est-à-dire aux points où se réunissent deux dispositifs.

3. Influence directe de deux réservoirs l'un sur l'autre. — Si S_i et S_j communiquent par un ou plusieurs dispositifs (déversoir, orifice ou tuyau, siphon, fil conducteur, etc.) qui ne sont rattachés à aucun autre des objets ou réservoirs ([1]), quand $z_i \geq z_j$, le *débit* par unité de temps de S_i vers S_j sera, dans le cas le plus général, à l'instant t, une fonction $\varphi_{ij}(z_i, z_j) \geq 0$, et que je supposerai provisoirement croissante de z_i, décroissante de z_j, et continue; ces hypothèses peuvent toutefois être en défaut dans certains domaines limités.

Quand $z_i < z_j$, le débit $\varphi_{ji} > 0$ a lieu de S_j vers S_i et est, en général, d'après l'hypothèse ci-dessus, fonction croissante de z_j, décroissante de z_i. Mais si l'on pose alors

$$\varphi_{ji} = -\varphi_{ij}(z_i, z_j),$$

([1]) C'est ce que j'ai supposé dans mes travaux antérieurs en y disant que les réservoirs communiquent deux à deux.

définissant ainsi φ_{ij} quand $z_i < z_j$, on voit qu'on peut toujours dire que, quel que soit le signe de $z_i - z_j$, S_j reçoit de S_i, à l'instant t, le débit par unité de temps $\varphi_{ij}(z_i, z_j)$, positif ou négatif, avec $\varphi_{ij} = 0$ pour $z_i = z_j$, et qui est toujours, en général, fonction croissante de z_i, décroissante de z_j. De même, S_j reçoit de S_i le débit $\varphi_{ji} = -\varphi_{ij}$ à l'instant t.

On doit, de plus, admettre que la fonction φ_{ij} : 1° ne dépend plus de z_i ou de z_j quand z_i ou z_j devient inférieur à une certaine limite commune z_{ij}; 2° s'annule quand les variables z_i et z_j s'abaissent toutes deux au-dessous de z_{ij}.

4. Influence directe de l'extérieur sur un réservoir. — Envisageons maintenant les influences extérieures au système et qui agissent sur S_i. Ce réservoir : 1° recevra de l'extérieur, par des procédés que nous n'avons pas besoin de définir, un certain *débit d'alimentation* $a_i(t)$ au moins égal à zéro (en général) et fonction du temps; 2° abandonnera à l'extérieur, par des dispositifs convenables (déversoirs, ajutages, fils conducteurs, etc.) qui ne sont reliés à aucun autre réservoir, un certain *débit*

$$-\varphi_{0i}(z_i),$$

quantité nulle ou positive par hypothèse; nous admettrons que $-\varphi_{0i}$ s'annule quand z_i s'abaisse au-dessous d'une certaine limite z_{0i} et est, en général, sauf dans des domaines limités, fonction continue et croissante de z_i.

5. Réservoirs pouvant communiquer 3 à 3, 4 à 4, ...; réservoirs fictifs auxiliaires. — Si le dispositif de communication de S_i et de S_j est rattaché à quelques autres réservoirs, un seul, S_k, par exemple, la question des échanges de S_i, S_j, S_k devient bien plus compliquée. On en a un exemple relativement simple dans l'hydraulique des liquides par le problème dit *des trois réservoirs* [1] S_i, S_j, S_k, d'où partent des tuyaux aboutissant à un *nœud* O (*fig.* 1) : on négligera ici l'influence de la longueur, supposée faible, des tuyaux OS_i, OS_j, OS_k.

---

[1] Flamant, *Hydraulique*, 3e édition, Paris: Beranger, 1909, p. 176. — Rabut, *Cours autographié d'Hydraulique de l'École des Ponts et Chaussées*, 1905-1906, p. 109 et 114.

Pour des sections données σ_i, σ_j, σ_k de ces tuyaux, si, par exemple,

$$z_i > z_j > z_k,$$

on sait que S_k reçoit de l'eau, que S_i en fournit; mais, suivant les cas, S_j peut en recevoir, par exemple si

$$\frac{z_j - z_k}{z_i - z_j}$$

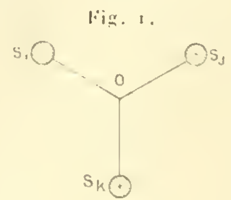
est assez petit; ou en fournir, par exemple si

$$\frac{z_i - z_j}{z_j - z_k}$$

est assez petit.

Une remarque analogue s'appliquera dans les autres cas (chaleur et gaz) signalés plus haut.

Fig. 1.



Avec la terminologie générale définie précédemment, le débit du nœud O vers le réservoir S_i, à l'instant t, est une fonction

$$\varphi_{\omega i}(z, z_i),$$

où z est une quantité analogue à z_i [niveau piézométrique ([1]), température, pression], caractéristique de l'état du nœud O. On a, pour déterminer z,

$$(1) \qquad \varphi_{\omega i} + \varphi_{\omega j} + \varphi_{\omega k} = 0,$$

et $\varphi_{\omega i}$, $\varphi_{\omega j}$, $\varphi_{\omega k}$ sont, en général, des fonctions croissantes de z et décroissantes de z_i, z_j ou z_k respectivement, ayant mêmes propriétés que les φ_{ij}.

Il y a des cas encore plus compliqués : ainsi, dans le dispositif de communication précédent, on peut remplacer le nœud O par un

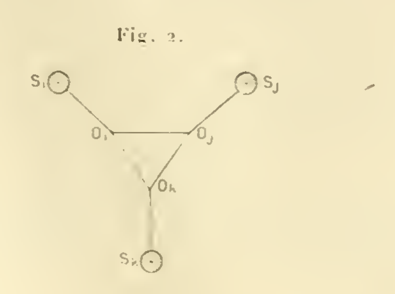
---

([1]) Il s'agit de la quantité $\zeta + \frac{p}{\varpi}$, que certains auteurs appellent aussi *charge* (ζ, niveau; p, pression; ϖ, poids spécifique).

triangle (une *maille*) $O_iO_jO_k$. Chaque nœud O_i, O_j, O_k donne lieu à une équation analogue à (1).

On ramènera ces cas compliqués au cas où les réservoirs peuvent communiquer 2 à 2, mais non 3 à 3, 4 à 4, ..., en supposant à chaque nœud O (ou O_i, O_j, O_k) un réservoir *fermé fictif*, pour lequel la

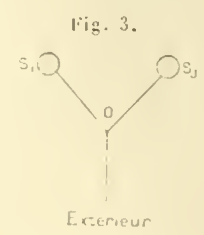
Fig. 2.



quantité analogue à z_i est z, et dont la capacité $\omega = F(z)$ est nulle, négligeable ou, plus généralement, constante. Les réservoirs S seront dits des réservoirs *réels*, pour éviter toute confusion.

Le cas où les dispositifs de communication de deux ou plusieurs réservoirs sont aussi reliés à l'extérieur, se traitera de la même

Fig. 3.



manière : on introduira toujours aux points de croisement de deux dispositifs (tuyaux, fils, etc.), un réservoir fictif donnant lieu à une équation analogue à (1), mais où figure une fonction

$$\varphi_{\omega 0} = - \varphi_{0\omega}.$$

Ceci posé, dans ce qui suit, je n'exclurai pas, *a priori*, contrairement à ce que j'ai fait dans mes travaux antérieurs, les cas où le dispositif de communication de deux réservoirs réels est relié à un autre réservoir réel ou à plusieurs autres, c'est-à-dire le cas où il y a des réservoirs fictifs. Je n'exclurai pas davantage le cas où les réservoirs

peuvent réagir 2 à 2 l'un sur l'autre, c'est-à-dire où les fonctions $\varphi_{ij}(z_i, z_j)$ dépendent de z_i et z_j à la fois. Je changerai dès lors de notation pour simplifier; S_i désignera, soit un réservoir réel, soit un réservoir fictif, et j'aurai à étudier un système de n réservoirs

$$S_1, \quad \ldots, \quad S_n$$

dont certains sont réels, les autres étant fictifs.

III. — Équations du problème. — Justification des hypothèses du paragraphe II.

6. Soit le réservoir S_i réel ou fictif : il reçoit, par unité de temps, le débit

$$Q_i = \varphi_{0i} + \varphi_{1i} + \ldots + \varphi_{i-1,i} + \varphi_{i+1,i} + \ldots + \varphi_{ni} + a_i,$$

a_i étant le débit d'alimentation qui vient de l'extérieur au temps t, avec $a_i(t) > 0$ en général; si l'on pose $\varphi_{ii} = 0$,

$$Q_i = \varphi_{0i} + \varphi_{1i} + \ldots + \varphi_{ni} + a_i.$$

Je me placerai dans le cas étendu où $Q_i\,dt$ est égal au produit de la perturbation dz_i apportée pendant le temps dt par les autres réservoirs et le milieu extérieur à l'état de S_i, et d'une certaine fonction $S_i(z_i) > 0$ de z_i. La capacité w_i est justement prise, *par définition*, de façon que

$$w'_i = \frac{dw_i}{dt} = S_i(z_i)\frac{dz_i}{dt},$$

c'est-à-dire que

$$(2) \qquad \frac{dw_i}{dt} = S_i\frac{dz_i}{dt} = Q_i = \varphi_{0i} + \ldots + \varphi_{ni} + a_i, \qquad a_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On dira que S_i est un réservoir fictif si l'on a, quels que soient t et z_i,

$$\frac{dw_i}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad S_i(z_i) = 0.$$

Le système (2) est alors, en général, un système mixte d'équations différentielles et implicites.

Pour plus de clarté, et aussi pour justifier suffisamment les hypothèses que nous avons faites au paragraphe II sur les fonctions $\varphi_{ij}(z_i, z_j)$, il sera bon de préciser un peu la signification et la forme

des quantités qui figurent dans les formules (2), lorsqu'on étudie un des cas indiqués dans le paragraphe précédent ou d'autres analogues, et relatifs à l'hydraulique des eaux, à celle des gaz et à la théorie de la chaleur. Il en résultera une idée plus nette et plus détaillée du caractère de généralité des équations (2) et de la variété de leurs applications.

7. Réservoirs d'eau. — Je me contente de rappeler les formules usuelles des réservoirs, des ajutages ou des siphons servant d'exutoires à un réservoir.

Déversoir non noyé à crête horizontale (¹). — Si z est la cote de la surface libre du réservoir, z_0 celle de la crête du déversoir, le débit Q a pour valeur

$$Q = m(z - z_0)^{\frac{3}{2}}, \tag{3}$$

où m est un coefficient positif constant ou lentement variable avec z; Q est nul pour $z \leq z_0$. On peut prendre aussi

$$m = \mu\left[1 + k\left(\frac{z - z_0}{z - z_0 + p}\right)^2\right], \tag{3 bis}$$

où μ et k sont peu variables avec z et positifs, et p est une constante > 0 et qui dépend du déversoir.

Déversoir noyé à crête horizontale (²). — Si z_1 est le niveau du réservoir d'aval, z celui du réservoir d'amont, z_0 celui de la crête du déversoir, on peut se servir de la formule de Lesbros ou de celle de Buat

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} Q = m_1(z - z_0)\sqrt{z - z_1} \\ \text{ou} \\ Q = m'_1\left(z - z_0 + \dfrac{z_1 - z_0}{2}\right)\sqrt{z - z_1}, \\ \text{avec} \qquad z \geq z_1 \geq z_0. \end{array}\right.$$

(¹) Flamant, *Hydraulique*, 3ᵉ édition, Paris, Béranger, 1909, p. 120. — Rabut, *Cours autographié d'Hydraulique de l'École des Ponts et Chaussées*, 1905-1906, p. 218. — *Voir* encore les travaux de M. Bazin, *Annales des Ponts et Chaussées* et de M. Boussinesq, *Comptes rendus*, ainsi que A. Boulanger, *Hydraulique générale*; Paris, O. Doin, 1909, t. II.

(²) Consulter les mêmes auteurs.

m_1 et m'_1 étant peu variables avec z et z_1; Q s'annule lorsque z et z_1 sont au plus égaux à z_0.

On peut aussi envisager les valeurs de Q données par M. Bazin (à ce sujet, *voir* ci-après).

Ajutages et orifices analogues (¹). — Quand leurs dimensions sont modérées, soit z_0 la cote du centre de gravité de l'orifice; le débit sera, z et z_1 étant les niveaux des réservoirs,

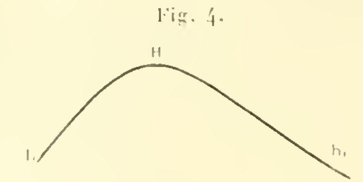
$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{ll} Q = m_2\sqrt{z - z_1}, & z \geqq z_1 \geqq z_0, \\ \text{ou} & \\ Q = m_3\sqrt{z - z_0}, & z \geqq z_0 \geqq z_1, \end{array}\right.$$

suivant que l'ajutage est noyé ou non: Q s'annule encore pour z et $z_1 \leqq 0$, et m_2, m_3 sont des coefficients lentement variables avec z et z_1.

On pourrait trouver des cas un peu différents si l'on supposait les orifices munis de clapets qui soient eux-mêmes soumis à l'action de ressorts.

Siphons (²). — Soient H la cote du sommet, h et h_1 les cotes des centres de gravité des orifices d'entrée et de sortie du siphon, orifices supposés petits. Pour simplifier, je suppose $H - h$, $H - h_1$ notablement inférieurs à la hauteur du liquide qui équivaut à la pression de l'atmosphère (ou du milieu extérieur).

Fig. 4.



Soient z le niveau de l'eau du réservoir où débouche l'orifice h, z_1 le niveau analogue pour le réservoir où débouche l'orifice h_1, h_2 la plus grande des quantités h et h_1, et $z \geqq z_1$. Le débit Q est nul (le cas de

(¹) Flamant, *Hydraulique*, p. 55. — Rabut, *Cours*, p. 213 et 221.

Si l'ajutage était suivi d'un tuyau de longueur appréciable, il faudrait prendre pour z_0 la cote du centre de gravité de l'orifice de sortie.

(²) Collignon, *Hydraulique*; Paris, Dunod, 1880, p. 264. On peut aussi se reporter à cet Ouvrage pour ce qui précède.

l'amorçage artificiel étant exclu) si, à aucun moment, on n'a eu $z \geqq H$. Si l'on vient à avoir $z \geqq H$ et si, ensuite, z en variant reste $\geqq h_2 + \varepsilon$ (ε petit),

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{lll} Q = \lambda\sqrt{z - z_1}, & z \geqq h_2 + \varepsilon, & z_1 \geqq h_1, \\ \text{ou} & & \\ Q = \lambda_1\sqrt{z - h_1}, & z \geqq h_2 + \varepsilon, & z_1 \leqq h_1. \end{array} \right.$$

Enfin, si z devient $\leqq h_2 + \varepsilon$, puis varie, on a $Q = 0$ tant que $z < H$.

Ici, λ et λ_1 sont des coefficients constants ou lentement variables avec z et z_1.

Observations générales. — Dans ces formules usuelles, Q est bien fonction croissante de z, et décroissante ou non croissante de z_1 : toutefois, une formule de M. Bazin [1] relative aux déversoirs noyés, et que nous ne reproduisons pas, ne satisfait pas complètement à ces conditions. Mais, comme l'indique lui-même M. Bazin, cette formule n'est vraie qu'entre certaines limites; si l'on se reporte au graphique expérimental dont cette formule est la représentation algébrique, on remarque immédiatement que, dans l'étendue des expériences exécutées, les conditions en question sont *entièrement remplies*.

D'une façon générale, les expériences mêmes de M. Bazin viennent à l'appui de mes hypothèses du paragraphe II.

Si l'on prend le Tableau de la page 700 des *Annales des Ponts et Chaussées* de décembre 1896 relatifs aux déversoirs noyés, on voit, en en parcourant les lignes, que, pour un même débit Q, le niveau d'amont z croît quand le niveau d'aval z_1 croît; quand on parcourt les colonnes, on constate que, pour une même valeur de z_1 et un même déversoir (A, B, C ou D d'après les notations de M. Bazin), z croît avec Q; on en conclut

$$\frac{\partial Q}{\partial z} > 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z_1} < 0.$$

De même, d'après les séries 70 à 85 de M. Bazin (*Ann. des Ponts et Chaussées*, février 1894), on peut vérifier rapidement que la charge H, sur la crête du déversoir de comparaison, par suite, le

(1) BABUT, *Cours*, p. 221. — H. BAZIN, *Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir*; Paris, Dunod, 1898, p. 103, formule (16), et graphique de la page 102 *bis*.

débit Q, croît avec z ($z = h$ charge d'amont) et est fonction décroissante de z_1 ($z_1 = h_1$ charge d'aval).

On pourra encore consulter les séries 1, 2, 3, etc., des *Annales des Ponts et Chaussées* d'octobre 1888 et les travaux théoriques de M. Boussinesq [1].

Les expressions de Q qu'on vient d'indiquer ou de rappeler sont, chacune, *univalentes;* mais, quand z et z_1 varient avec le temps, la valeur q qui exprime, à l'instant t, le débit, peut être égale tantôt à l'une tantôt à l'autre de ces expressions; q sera donc, en général, une fonction *multiforme*. D'autre part, q pourra être, quand z et z_1 restent entre certaines limites, une fonction *bivalente :* en dehors du cas évident des siphons, il semble résulter des études de M. Bazin, que, surtout aux environs des valeurs de z et z_1 pour lesquelles la formule qui exprime q change, l'expression Q à choisir pour q peut dépendre, non seulement de z et z_1, mais encore des circonstances antérieures du mouvement; aux environs de ces valeurs critiques, q pourrait être une fonction par exemple bivalente, et même discontinue de z et z_1; il paraît toutefois possible d'admettre que ceci n'a lieu qu'au voisinage de valeurs particulières de z et de z_1 ou, comme pour les siphons, dans un domaine limité. On aura à tenir compte de ces circonstances à l'occasion; mais, si

$$q = \varphi(z, z_1),$$

où φ est positif ou négatif, il semble qu'on puisse toujours admettre, dans la théorie, que

$$\varphi(+\infty, z_1) = +\infty, \qquad \varphi(z, +\infty) = -\infty.$$

J'ajoute une dernière remarque, qui a son intérêt : les formules ci-dessus sont relatives plutôt au cas où le régime est permanent, c'est-à-dire où z et z_1 sont constants; quand le régime n'est pas permanent, il pourrait convenir de regarder certains des coefficients qui entrent dans ces formules comme dépendant légèrement du temps t, mais de façon que les valeurs de ces coefficients diffèrent peu de celles qui correspondent au régime permanent pour les mêmes valeurs de z et de z_1, au moins quand les variations de z et z_1 sont assez lentes. Ceci

---

[1] *Comptes rendus* et FLAMANT, *Hydraulique*, p. 88 et suiv. — A. BOULANGER, *Hydraulique générale*, t. II.

conduirait à faire une hypothèse analogue sur les fonctions $\varphi_{ij}(z_i, z_j)$ considérées au paragraphe II; on pourra voir plus loin (§ VIII) que, dans certains cas au moins, les problèmes envisagés restent abordables, malgré la complication qu'introduit cette hypothèse ([1]).

Enfin, il suffira d'indiquer que, dans la formule (2), pour les réservoirs d'eau ou de liquide, lorsque S_i est un réservoir réel, w_i est, à une constante près, le volume du liquide de ce réservoir correspondant au niveau z_i, tandis que $S_i(z_i)$ est > 0 et représente la section horizontale du réservoir; quand S_k est un réservoir fictif, la quantité $S_k(z_k) = 0$.

8. Réservoirs de chaleur. — Soient

$$S_1, \quad \ldots, \quad S_n$$

n corps conducteurs (réservoirs fictifs ou non) à l'intérieur de chacun desquels se maintient une température uniforme (ou sensiblement)

$$z_1, \quad \ldots, \quad z_n,$$

isolés ou non de l'extérieur, et réunis par des fils conducteurs isolés et dont on néglige la longueur et le volume. On aura ici, φ_{ij} et φ_{0i} étant des quantités de chaleur par unité de temps,

$$(7) \qquad \varphi_{ij} = k_{ij}\,\omega_j(z_i - z_j), \qquad \varphi_{0i} = -h_i\sigma_i(z_i - z_0),$$

où

$$k_{ij}, \quad \omega_j, \quad h_i, \quad \sigma_i$$

sont des constantes et z_0 la température du milieu extérieur. D'autre part,

$$(8) \qquad \frac{dw_i}{dt} = C_i V_i \frac{dz_i}{dt}, \qquad S_i(z_i) = C_i V_i,$$

où V_i est le volume de S_i et C_i une constante. A une première approximation, les équations (2) du n° 6 sont linéaires et à coefficients constants, comme je l'ai déjà indiqué antérieurement ([2]) dans un cas

([1]) Ce procédé a une portée très générale. Il paraît susceptible d'être utilisé dans les applications théoriques de beaucoup de formules expérimentales connues, quand on suppose que celles-ci ne sont qu'approximatives (exemples possibles : formules relatives à la résistance au mouvement d'un corps dans un fluide, coefficients de frottement, etc.).

([2]) *Bull. Soc. math.*, t. XXIII, 1905, p. 142.

moins général; mais rien n'empêche de supposer que les paramètres k_{ij}, ..., S_i soient légèrement variables avec z_i et z_j ou avec z_i.

Ces considérations s'appliquent aussi aux cas où les dispositifs de communication sont branchés ou maillés, à condition d'introduire des réservoirs ou corps fictifs pour lesquels

$$\frac{dw_i}{dt} = 0.$$

On pourrait compliquer le problème en supposant que certains corps sont formés (à part leur enveloppe extérieure) de substances susceptibles de passer de l'état solide à l'état liquide, et réciproquement. Envisageant S_i, pendant les périodes où aucun changement d'état ne se produit dans S_i, on a encore la même équation (2) que précédemment pour S_i, la quantité caractéristique de l'état de S_i étant z_i; pendant les périodes où un changement d'état se produit dans S_i, la température z_i reste constante et égale à Z_i, mais le poids p_i de la substance fusible contenue dans S_i devient la quantité caractéristique de l'état de S_i, et

$$(8\ bis) \qquad \frac{dw_i}{dt} = \gamma_i \frac{dp_i}{dt}, \qquad 0 \leq p_i \leq P_i,$$

où γ_i est un paramètre, P_i le poids total de la substance fusible [1].

9. Réservoirs de gaz. — La variété des cas est considérable. On peut supposer que certains réservoirs échangent ou non de la chaleur avec le milieu extérieur; s'ils en échangent, on pourra étudier le cas où ils sont maintenus à une température fixe qui pourra ne pas être la même pour chacun d'eux, ou le cas où quelques-uns se refroidissent par simple rayonnement. Je me contenterai d'indiquer ici deux cas où les réservoirs sont supposés conserver une même température T_0, qui est aussi celle du milieu extérieur.

---

[1] Je ne me préoccupe pas ici de la question de la réalisation physique effective des conditions du problème. On aurait un cas plus compliqué, semble-t-il, si l'on supposait que les substances P_i peuvent passer de l'état liquide à l'état gazeux.

Cas où l'écoulement par les orifices est adiabatique. — La vitesse d'écoulement dans la section contractée pour un orifice reliant les réservoirs S_i et S_j, où les pressions sont p_i et p_j, avec $p_i > p_j$, est telle que ([1])

$$u^2 = C_1\left[1 - \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] \qquad (k = 1,41 \text{ environ}),$$

ici p est la pression dans la section contractée et C_1 une constante (comme les quantités C_2, C_3, ... qu'on va envisager). Le débit en poids est

$$\varphi_{ij} = C_2 u \delta,$$

où δ est la densité dans la section contractée; on a

$$\frac{p}{p_i} = \left(\frac{\delta}{\delta_i}\right)^k,$$

$$\varphi_{ij} = C_3 \delta_i \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{k-1}{k}}} = C_3 \delta_i \sqrt{\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{k+1}{k}}},$$

c'est-à-dire encore, puisque

$$\frac{\delta_i}{\delta_0} = \frac{p_i}{p_0},$$

δ_0 et p_0 étant la densité et la pression du milieu extérieur,

$$(9) \qquad \varphi_{ij} = C_4 p_i \sqrt{\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{k}{k-1}}}.$$

On sait ([2]) que cette formule s'applique avec

$$(9\ bis) \qquad p = p_j$$

([1]) RESAL, *Traité de Mécanique*, t. II, 1874, p. 336. — BOUSSINESQ, *Journal de Math.*, 1904, p. 80. — FLAMANT, *Hydraulique*. — *Voir* encore DE SAINT-VENANT et WANTZEL, *Journ. École Polyt.*, 27e Cahier, 1839, p. 85.

([2]) BOUSSINESQ, *loc. cit.*, où la quantité n est celle désignée ici par k. — *Voir* encore, dans le Tome CIII (1886) des *Comptes rendus*, les Communications de MM. Haton de la Goupillière, Hirn, Hugoniot, Parenty, et dans les *Annales des Mines* (1902) les articles de MM. Rateau et Parenty.

quand

$$\frac{p_j}{p_i} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 0,528\ldots.$$

Lorsque $\frac{p_j}{p_i}$ est $< 0,528\ldots$, il semble qu'on puisse admettre, d'après de Saint-Venant et Wantzel, Hugoniot, Rateau, etc., que

$$\frac{p}{p_i} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 0,528\ldots.$$

La valeur de φ_{ij} s'obtient donc en remplaçant, dans la formule (9) ci-dessus, le rapport $\frac{p}{p_i}$ par la constante 0,528..., en sorte que

$$(10) \qquad \varphi_{ij} = C_5 p_i \qquad \text{pour} \qquad \frac{p_j}{p_i} \leqq \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Il n'est pas inutile de rappeler que cette valeur de $\frac{p}{p_i}$ est celle qui rend maximum le radical qui figure dans la formule (9), par suite aussi le débit pour une valeur donnée de p_i.

Ainsi, dans le premier cas [formules (9) et (9 *bis*)], φ_{ij} est fonction de p_i et p_j, croissante de p_i, décroissante de p_j, comme on le vérifie; dans le deuxième cas [formule (10)], φ_{ij} est fonction de p_i seul, et fonction croissante ([1]). Le premier cas présente une certaine analogie avec celui d'un orifice noyé pour les liquides, le second avec celui d'un orifice non noyé.

D'autre part, le poids du gaz du réservoir S_i, dont le volume est V_i, est

$$V_i \delta_i = V_i p_i \frac{\delta_0}{p_0} = w_i$$

et

$$(11) \qquad \frac{dw_i}{dt} = V_i \frac{\delta_0}{p_0} \frac{dp_i}{dt} = a_i + \varphi_{0i} + \varphi_{1i} + \ldots + \varphi_{ni}.$$

On posera

$$S_i = V_i \frac{\delta_0}{p_0}$$

([1]) J'ai négligé la variation du coefficient de contraction; il semble (Resal, *loc. cit.*) que, si l'on en tient compte, les conclusions soient vraies *a fortiori*. En admettant d'après d'autres auteurs que ce coefficient décroisse *lentement et régulièrement* quand la charge croît, les conclusions subsistent encore, comme on peut le vérifier.

et, pour les réservoirs fictifs,

$$V_i = 0;$$

le système d'équations obtenu sera de la forme (2). Il est assez remarquable que ces équations sont linéaires, par suite assez facilement intégrables, dans les périodes où les rapports $\frac{p_j}{p_i}$ sont tous $< 0,528\ldots$, s'il y a de pareilles périodes. Il en sera ainsi dans le cas de n réservoirs réels $S_1, \ldots, S_n$, si l'on prend, par exemple, à l'origine des temps

$$\frac{p_i}{p_{i+1}} < 0,528\ldots \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Cas où l'écoulement par les orifices est isotherme. — La vitesse u d'écoulement par un orifice reliant S_i à S_j $(p_i > p_j)$ est telle que [1]

$$u^2 = C'_1 \log \frac{p_i}{p},$$

où le logarithme est népérien ; le débit en poids est

$$\varphi_{ij} = C'_2 u \delta,$$

avec

$$\frac{p}{\delta} = \frac{p_i}{\delta_i} = \frac{p_0}{\delta_0}$$

et

$$(12) \qquad \varphi_{ij} = C'_3 p \sqrt{\log \frac{p_i}{p}} \qquad (C'_1, C'_2, C'_3 = \text{const.});$$

φ_{ij} est fonction croissante de p_i ; mais φ_{ij} est fonction décroissante de p quand

$$p > \frac{p_i}{\sqrt{e}} = 0,6065\ldots p_i,$$

croissante dans le cas contraire ; lorsque

$$(12\ bis) \qquad p_j > \frac{p_i}{\sqrt{e}},$$

on pourra prendre $p = p_j$, par analogie avec ce qu'on a vu pour l'écoulement adiabatique, et φ_{ij} satisfait alors aux hypothèses du paragraphe II entre certaines limites ; lorsque (12 *bis*) n'a plus lieu, je crois que les données manquent pour déterminer p ; l'écoulement isothermique est d'ailleurs peut-être difficile à réaliser.

[1] FLAMANT, *Hydraulique*, p. 541.

10. *Réservoirs de liquide et de gaz à température constante* T_0 (à titre d'exemple). — Certains réservoirs sont supposés ne pas communiquer avec l'atmosphère, et contenir du gaz et de l'eau; les réservoirs communiquent par des orifices toujours noyés par l'eau, de façon que le gaz de chacun des réservoirs fermés ait un simple rôle régulateur et conserve un poids constant.

Avec ces hypothèses, soient S_m un réservoir d'eau et de gaz, qui ne communique pas avec l'atmosphère, p_m^0 la pression du gaz quand le liquide est à la cote initiale z_m^0,

$$W_m(z_m^0) = W_m^0$$

le volume du gaz pour cette cote,

$$w_m(z_m^0) = w_m^0$$

le volume correspondant du liquide, $W_m(z)$ et $w_m(z)$ les volumes analogues correspondant à la cote z; on a

$$W_m(z_m) + w_m(z_m) = W_m^0 + w_m^0 = C_m = \text{const.};$$

la pression p_m est telle que

$$p_m W_m = p_m^0 W_m^0;$$

le débit liquide de S_i vers S_j est, ϖ désignant le poids spécifique du liquide,

$$(13)\quad \begin{cases} \varphi_{ij} = \mu\sqrt{p_i - p_j + \varpi(z_i - z_j)} & \text{quand} \quad p_i + \varpi z_i \geq p_j + \varpi z_j, \\ \text{et} & \\ \varphi_{ij} = -\mu'\sqrt{p_j - p_i + \varpi(z_j - z_i)} & \text{quand} \quad p_j + \varpi z_j \geq p_i + \varpi z_i; \end{cases}$$

dans ces formules, p_i est égal à p_0 quand S_i est un réservoir à surface libre, et à

$$p_i^0 \frac{C_i - w_i^0}{C_i - w_i} = \frac{\lambda_i}{C_i - w_i} \qquad (\lambda_i \text{ const.}).$$

quand S_i ne communique pas avec l'atmosphère; de même pour p_j. Le débit φ_{ij} est encore fonction croissante de z_i, décroissante de z_j. On a alors

$$(14)\qquad \frac{dw_i}{dt} = a_i + \varphi_{0i} + \varphi_{1i} + \ldots + \varphi_{ni},$$

où φ_{0i} est du type (15) ci-après.

On pourrait évidemment envisager des cas analogues plus compliqués.

Si, au lieu d'admettre que le gaz est maintenu à la température constante T_0, on suppose sa détente adiabatique, les résultats seront de même nature ; on aura alors

$$p_m W_m^k = p_m^0 (W_m^0)^k ;$$

si S_i contient du liquide et du gaz,

$$p_i = \left(\frac{C_i - w_i^0}{C_i - w_i}\right)^k p_i^0 = \frac{\lambda'_i}{(C_i - w_i)^k} \qquad (\lambda'_i \text{ const.}).$$

Les deux cas ci-dessus se ramènent à d'autres cas antérieurement considérés ; je pose, pour les deux cas,

$$p_i + \varpi z_i = \varpi Z_i = \psi_i(z_i).$$

d'où

$$z_i = \varpi_i(Z_i), \qquad \varpi'_i = \frac{\varpi}{\psi'_i} > 0;$$

(14) devient

(14 *bis*)
$$S_i \varpi'_i \frac{dZ_i}{dt} = a_i + \varphi_{0i} + \ldots + \varphi_{ni},$$

où

(15)
$$\begin{cases} \varphi_{ij} = \mu \sqrt{\varpi}\sqrt{Z_i - Z_j} \qquad \text{ou} \qquad -\mu' \sqrt{\varpi}\sqrt{Z_j - Z_i}, \\ \varphi_{0i} = -\mu'' \sqrt{\varpi}\sqrt{Z_i - Z_{i0}} \qquad (Z_{i0} = \text{const.}). \end{cases}$$

Ces formules sont du type (5) ; mais les quantités $S_i(z_i)$ se trouvent remplacées par les quantités $S_i \varpi'_i$ [1].

IV. — Propriété des systèmes d'équations (2).

11. Je vais maintenant envisager le système (2) en employant, mais seulement pour plus de commodité, car cela ne serait pas indispensable, la terminologie générale introduite au paragraphe II, et qui comporte interprétation mécanique ou physique de a_i (débit d'alimentation), φ_{ij} (débit de S_i à S_j), w_i (capacité de S_i pour la valeur de z_i considérée). Ce paragraphe est donc une pure étude d'analyse, avec interprétation mécanique ou physique. J'admettrai qu'on ait

[1] Quand on fera intervenir en Hydraulique des eaux des réservoirs fictifs, soit ici, soit ailleurs, on pourra admettre que les expressions φ_{ω_i}, φ_{ω_0}, ... envisagées au n° **5** sont sensiblement de la forme (15) ; si S_i est fictif, Z_i est alors un niveau piézométrique, p_i n'étant plus déterminé comme dans (13).

vérifié par un procédé quelconque l'existence de la solution considérée.

Soit donc le système d'équations

$$(2) \qquad w_i = S_i z_i + \varphi_{0i} + \varphi_{1i} + \ldots + \varphi_{ni} + a_i.$$

Je ferai les hypothèses suivantes, qualifiées d'*hypothèses A :*

1° $$\varphi_{ii} = 0, \qquad \varphi_{ij} = -\varphi_{ji};$$

si φ_{ij}, avec $i > 0$, n'est pas identiquement nul, sa valeur absolue est limitée *supérieurement* quand z_i et z_j le sont ; on a

$$\varphi_{ij} = +\infty \qquad \text{pour} \qquad z_i = +\infty,$$
$$\varphi_{ij} = -\infty \qquad \text{pour} \qquad z_j = +\infty;$$

la première égalité veut dire ici que, z_j étant au plus égal au nombre b_j donné, on peut toujours trouver un nombre b_i assez grand pour que, quand $z_i > b_i$, on ait, *quel que soit* z_i,

$$\varphi_{ij} > c_i,$$

c_i étant un nombre donné arbitrairement grand ; inversement, si, pour une valeur de z_j au plus égale au nombre donné b_j, on a

$$\varphi_{ij} > c_i,$$

où c'_i est un nombre suffisamment grand, on a aussi

$$z_i > b'_i,$$

où b'_i est un nombre donné arbitrairement grand : la deuxième égalité a une signification analogue.

2° Un réservoir au moins a un exutoire externe, autrement dit, un des φ_{0i} n'est pas identiquement nul quel que soit z_i ; quand φ_{0i} n'est pas identiquement nul, il est nul ou négatif : alors, sa valeur absolue est limitée supérieurement quand z_i l'est, et

$$\varphi_{0i} = -\infty \qquad \text{pour} \qquad z_i = +\infty,$$

cette égalité ayant une signification analogue à celle des deux précédentes.

3° *a*. Ou bien

$$S_i(z_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad w_i = \text{const.};$$

b. Ou bien

$$S_i > 0 \qquad \text{pour} \qquad z_i > \lambda_i \qquad (\lambda_i \text{ const.});$$
$$S_i = w_i = 0 \qquad \text{pour} \qquad z_i < \lambda_i,$$
$$w_i(z_i) = +\infty \qquad \text{pour} \qquad z_i = +\infty;$$

S_i et w_i sont finies quand z_i l'est.

4° a_i est positif ou négatif, mais c'est une fonction de t limitée supérieurement en valeur absolue.

5° Les fonctions φ_{ij}, φ_{0j} ne sont pas forcément continues, ni univalentes, du moins dans certains domaines bornés ; mais il en est autrement pour les valeurs des z_i ou z_j qui dépassent certaines limites.

Tel est l'ensemble des *hypothèses A*, qui comprennent celles du paragraphe II.

Je vais d'abord classer les réservoirs d'après la répartition des dispositifs de communication, autrement dit des indices des fonctions φ_{ij} qui ne sont pas identiquement nulles.

Soit

$$u_1 = w_1 + w_2 + \ldots + w_{n_1}$$

la *capacité totale* de l'ensemble s_1 des réservoirs

$$S_1, \quad \ldots, \quad S_{n_1},$$

qui ont un exutoire externe (autrement dit, lorsque $i \leq n_1$, φ_{0i} n'est pas identiquement nul quel que soit z_i, φ_{0i} l'est pour $i > n_1$) ; soit

$$u_2 = w_{n_1+1} + \ldots + w_{n_1+n_2}$$

la capacité totale de l'ensemble s_2 des autres réservoirs

$$S_{n_1+1} = S_1'^2, \quad \ldots, \quad S_{n_1+n_2} = S_{n_2}'^2,$$

dont chacun peut communiquer, au moins quand la quantité caractéristique z corrélative est assez grande, avec un des réservoirs de l'ensemble s_1, mais non avec l'extérieur (autrement dit φ_{ij}, pour chaque valeur de i égale à $n_1 + 1$, ..., ou n_2, et une valeur de j correspondante égale à 1, ..., ou n_1, n'est pas identiquement nul) ; et ainsi de suite, jusqu'à l'ensemble s_m, dont la capacité totale est u_m. Si S_i est un réservoir de l'ensemble s_k, il communique avec un réservoir de l'ensemble s_{k-1} (avec l'extérieur quand $k = 1$) dès que z_i est assez grand, et il ne peut communiquer qu'avec des réservoirs des ensembles s_{k-1}, s_k et s_{k+1} (avec l'extérieur, s_1 et s_2 si $k = 1$, avec s_{m-1} et s_m si $k = m$) ; φ_{ij} ne peut être $\neq 0$ que si S_j appartient à s_{k-1}, s_k ou s_{k+1}

[à s_1 ou s_2 quand [1] $h = 1$, à s_{m-1} ou s_m quand $h = m$]. On admet que l'ensemble $s_1, \ldots, s_m$ contient tous les réservoirs; autrement dit, on admet qu'on peut passer par les dispositifs de communication d'un réservoir quelconque à l'extérieur; ceci est évidemment essentiel quand on veut montrer que les z_i restent limités.

On aura ultérieurement à envisager un mode de groupement analogue des réservoirs (§ VII, n° **16**).

Avec ces conventions, les équations (2) donnent, puisque

$$\varphi_{ij} = -\varphi_{ji},$$

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{du_1}{dt} = a_1 + \ldots + a_{n_1} + \varphi_{01} + \ldots + \varphi_{0n_1} + \sum\limits_{21} \varphi_{ij}, \\ \dfrac{du_2}{dt} = a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2} + \sum\limits_{12} \varphi_{ij} + \sum\limits_{32} \varphi_{ij}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du_l}{dt} = \sum\limits_{l} a + \sum\limits_{l-1,l} \varphi_{ij} + \sum\limits_{l+1,l} \varphi_{ij}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du_m}{dt} = \sum\limits_{m} a + \sum\limits_{m-1,m} \varphi_{ij}; \end{array}\right.$$

dans ces formules, $\sum\limits_{l} a$ est, à l'instant t, la somme des débits externes d'alimentation reçus par s_l, $\sum\limits_{l-1,l} \varphi_{ij}$ la somme des débits positifs ou négatifs qui vont de s_{l-1} à s_l, $\sum\limits_{l+1,l} \varphi_{ij}$ la somme des débits qui vont de s_{l+1} à s_l. On a

$$(16\ bis)\qquad \sum_{l+1,l} + \sum_{l,l+1} = 0, \qquad \sum_{m+1,m} = 0.$$

La seconde des équations (16), par exemple, s'obtient en remarquant que, dans le second membre, les débits échangés par les réservoirs de s_2 disparaissent.

---

[1] φ_{i0} n'est pas identiquement nul; mais il suffit de considérer $\varphi_{0i} = -\varphi_{i0}$.

Je pose encore

(17) $U_1 = u_1 + u_2 + \ldots + u_m, \quad \ldots, \quad U_l = u_l + u_{l+1} + \ldots + u_m, \quad \ldots, \quad U_m = u_m.$

On a, d'après (16) et (16 *bis*),

$$(18)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dU_1}{dt} = a_1 \quad + \ldots + a_n + \varphi_{01} + \ldots + \varphi_{0n_1}, \\ \dfrac{dU_2}{dt} = a_{n_1+1} + \ldots + a_n + \sum_{12} \varphi_{ij}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dU_l}{dt} = \sum_l{}' a + \sum_{l-1,l} \varphi_{ij}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

où $\sum_l{}' a$ est la somme des a_i des groupes s_l, s_{l+1}, ..., c'est-à-dire des débits externes d'alimentation reçus par les réservoirs de ces groupes.

Ceci posé, je me restreindrai au cas, déjà compliqué, *où les réservoirs de s_l sont à la fois tous fictifs ou tous réels*, c'est-à-dire que, au point de vue de l'analyse, si, quel que soit p, dans le groupe s_p, ϖ'_i est ou non identiquement nul, quel que soit le système des valeurs initiales des z, les ϖ'_j du même groupe s_p le sont aussi.

Je dis que les z_i restent limités.

La démonstration est simple quand $m = 1$, c'est-à-dire quand tous les réservoirs peuvent communiquer avec l'extérieur. Mais il n'en est pas de même lorsque m est quelconque.

Par hypothèse, $|a_1|$, ..., $|a_n|$ ont des limites supérieures.

Si les réservoirs de s_1 sont réels, on peut trouver une quantité A_1 telle que, si l'on vient à avoir $u_1 > A_1$, on ait sûrement

$$(19)\qquad \frac{dU_1}{dt} = a_1 + \ldots + a_n + \varphi_{01} + \ldots + \varphi_{0n_1} < -\varepsilon$$

(ε fixe positif arbitraire). En effet, si A_1 est assez grand, φ_{01}, ..., φ_{0n_1} étant nuls ou négatifs, on est sûr, d'après les hypothèses A (3°) relatives aux ϖ_i, que l'une des quantités caractéristiques z_1, ..., z_{n_1} est assez grande pour que cette inégalité ait lieu, puisque

$$\varpi_i(\infty) = +\infty.$$

Si les réservoirs de s_1 sont fictifs, on posera $u_1 = A_1$ (A_1 constante arbitraire); l'inégalité (19) aura encore lieu quand une quelconque des quantités $z_1, \ldots, z_{n_1}$, soit z_{i_1}, devient $\geqq \zeta_1$, ζ_1 étant un nombre convenablement choisi, fixe et assez grand.

De même, je suppose qu'on ait

$$u_1 \geqq A_1 \quad \text{ou} \quad z_{i_1} \geqq \zeta_1 \quad (i_1 = 1, 2, \ldots, n_1),$$

suivant que s_1 est réel ou fictif; quand u_2 dépasse une certaine limite A_2 qui dépend de A_1 ou de ζ_1, si s_2 est réel, ou quand une quelconque des quantités $z_{i_2}(i_2 = n_1 + 1, \ldots$, ou $n_1 + n_2)$ dépasse une certaine limite ζ_2, si s_2 est fictif, on a

$$(19\ bis) \qquad \frac{dU_2}{dt} \leqq a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2} + \sum_{12} \varphi_{ij} \leqq -\varepsilon.$$

En effet, ceux des φ_{ij} qui seraient positifs ont, d'après les hypothèses A (1°) une limite supérieure qui dépend de A_1 ou de ζ_1; si A_2 est assez grand, ou ζ_2, il y a toujours parmi les réservoirs s_2 un réservoir dont la quantité caractéristique z_{i_2} est assez élevée pour que le second membre de (19 *bis*) soit au plus égal à $-\varepsilon$; et ainsi de suite.

Quand on a

$$u_{l-1} \geqq A_{l-1} \quad \text{ou} \quad z_{i_{l-1}} \leqq \zeta_{l-1},$$

suivant que s_{l-1} est réel ou fictif, $z_{i_{l-1}}$ prenant les valeurs des diverses quantités caractéristiques de s_{l-1}, on peut trouver une quantité A_l que ne peut dépasser u_l si s_l est réel, ou une quantité ζ_l que ne peut dépasser aucune des quantités z_{i_l} relatives à s_l si s_l est fictif, sans que

$$(19\ ter) \qquad \frac{dU_l}{dt} \leqq -\varepsilon;$$

etc.

Ceci posé, on pourra choisir en outre $A_1, A_2, \ldots, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$, de façon que, à l'origine des temps $t = 0$, on ait pour les valeurs initiales $u_1^0, u_2^0, \ldots, z_{i_1}^0 (i_1 = 1, 2, \ldots, n_1), z_i^0, \ldots$, de $u_1, u_2, \ldots, z_{i_1}, z_i, \ldots$

$$(20) \qquad \begin{array}{llllll} u_1^0 \leqq A_1 & \text{ou} & z_{i_1}^0 \leqq \zeta_1 & \text{avec} & u_1 = A_1, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ u_m^0 \leqq A_m & \text{ou} & z_{i_m}^0 \leqq \zeta_m & \text{avec} & u_m = A_m. \end{array}$$

Il y a donc certainement un instant ou une phase du mouvement

où, quand on pose

$$B_l = A_l + \ldots + A_m,$$

on a

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{lllll} u_1 \geqq A_1 & \text{ou} & z_{i_1} \geqq \zeta_1 & \text{avec} & u_1 = A_1, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ u_m \geqq A_m & \text{ou} & z_{i_m} \geqq \zeta_m & \text{avec} & u_m = A_m, \\ & U_1 \geqq B_1, & \ldots, & U_m \geqq B_m. & \end{array}\right.$$

Je dis qu'on aura toujours

$$(22)\qquad U_i \geqq B_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

En effet, ceci a lieu quand on a l'inégalité $u_r \geqq A_r$ ou $z_{i_r} \geqq \zeta_r$, quel que soit r. Je suppose au contraire que, par moments, cette dernière inégalité puisse être en défaut pour certaines valeurs de r, par exemple à partir de l'instant t_1 exclus, et j'envisage une phase du mouvement, entre les instants t_1 et t_2, assez courte pour que, dans cette phase, on ait constamment, z_{i_r} étant une certaine quantité caractéristique d'un réservoir de s_r,

$$(22\ bis)\quad \left\{\begin{array}{llll} u_k < A_k, & u_{k_1} < A_{k_1}, & \ldots, & k < k_1 < \ldots, \\ z_{i_q} < \zeta_q & \text{avec} & u_q = A_q, & \\ z_{i_{q_1}} < \zeta_{q_1}, & \text{avec} & u_{q_1} = A_{q_1}, & \ldots \\ & (q < q_1 < \ldots); & & \end{array}\right.$$

ici, $q, q_1, \ldots$ se rapportent à des réservoirs fictifs et sont différents de $k, k_1, \ldots$ qui se rapportent à des réservoirs réels; les u_i autres que $u_k, u_{k_1}, \ldots$ sont tous tels que $u_i \geqq A_i$, et les z_{i_r} des réservoirs des systèmes fictifs s_r autres que $s_q, s_{q_1}, \ldots$ sont tous tels que $z_{i_r} \geqq \zeta_r$.

Si $q < k$,

$$(22\ ter)\qquad \frac{dU_q}{dt} = -\varepsilon,$$

d'après (19 *ter*), pour tout instant $t + \tau$ dans l'intervalle de t_1 à t_2, et, par suite, l étant un quelconque des entiers au plus égaux à q,

$$(22_4)\quad \left\{\begin{array}{l} U_q \leqq B_q - \varepsilon\tau < B_q, \qquad U_l = u_l + u_{l+1} + \ldots + U_q < B_l, \\ U_q = u_q + U_{q+1} < B_q = u_q + B_{q+1}, \end{array}\right.$$

puisque $u_q = A_q$, les réservoirs de s_q étant tous fictifs.

Si $k < q$, on a de même, l désignant un quelconque des entiers $\leqq k$.

$$(22_5)\qquad \frac{dU_k}{dt} \leqq -\varepsilon, \qquad U_k \leqq B_k, \qquad U_l \leqq B_l, \qquad U_{k+1} \leqq B_k - u_k < B_{k+1},$$

dans l'intervalle de t_1 à t_2.

Je puis donc supposer que les inégalités

$$U_1 \leqq B_1, \qquad \ldots, \qquad U_\nu \leqq B_\nu$$

aient été établies pour l'intervalle de t_1 à t_2 jusqu'à un certain indice ν par la considération de $s_1, \ldots, s_{\nu-1}$, et j'envisage le premier des systèmes de réservoirs $s_\nu, s_{\nu+1}, \ldots$, savoir s_μ, pour lequel on a dans cet intervalle

$$z_{t_\mu} \geqq \zeta_\mu \qquad \text{si } s_\mu \text{ est fictif,}$$

ou

$$u_\mu \geqq A_\mu \qquad \text{si } s_\mu \text{ est réel.}$$

Il pourra se faire qu'il n'y ait pas de pareil système s_μ ; alors

$$u_{\nu+1} \leqq A_{\nu+1}, \qquad \ldots, \qquad u_m \leqq A_m,$$

d'où

$$U_{\nu+1} \leqq B_{\nu+1}, \qquad \ldots, \qquad U_m \leqq B_m.$$

S'il y a un pareil système s_μ, et s'il est fictif, ou bien $\mu = \nu$, ou bien $\mu > \nu$. Quand $\mu = \nu$,

$$U_\nu \leqq B_\nu, \qquad U_{\nu+1} = U_\nu - u_\nu \leqq B_\nu - A_\nu = B_{\nu+1};$$

quand $\mu > \nu$,

$$\frac{dU_\mu}{dt} \leqq -\varepsilon, \qquad U_\mu \leqq B_\mu - \varepsilon\tau \leqq B_\mu,$$

$$U_{\mu+1} \leqq B_\mu - A_\mu = B_{\mu+1},$$

$$U_l = u_l + u_{l+1} + \ldots + U_\mu \leqq B_l \qquad (l = \nu, \nu+1, \ldots, \mu-1),$$

car

$$u_l \leqq A_l, \qquad u_{l+1} \leqq A_{l+1}, \qquad \ldots, \qquad u_{\mu-1} \leqq A_{\mu-1}.$$

S'il y a un pareil système s_μ et s'il est réel, ou bien $\mu = \nu$, ou bien $\mu > \nu$. Le même raisonnement a lieu, car $u_\mu \geqq A_\mu$.

Finalement on est conduit à une contradiction, et l'on a bien dans l'intervalle de t_1 à t_2, par suite dans tout intervalle, d'après un raisonnement identique, les inégalités (22). Il résulte alors des égalités (17) et des hypothèses A (3°) que les quantités caractéristiques des réservoirs *réels* sont limitées supérieurement.

On en conclut la même propriété pour les quantités caractéristiques

des réservoirs *fictifs*, même alimentés (c'est-à-dire même quand les a_i correspondants ne sont pas nuls).

En effet, si

$$s_k, \quad s_{k+1}, \quad \ldots, \quad s_{p-1}$$

sont des systèmes de réservoirs fictifs d'indices consécutifs, d'après (16),

$$(23) \quad \begin{cases} \sum_{k} a + \sum_{k-1,k} \varphi_{ij} + \sum_{k+1,k} \varphi_{ij} = 0, \\ \sum_{k+1} a + \sum_{k,k+1} \varphi_{ij} + \sum_{k+2,k+1} \varphi_{ij} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{p-1} a + \sum_{p-2,p-1} \varphi_{ij} + \sum_{p,p-1} \varphi_{ij} = 0; \end{cases}$$

en additionnant,

$$(24) \quad \sum_{k} a + \ldots + \sum_{p-1} a + \sum_{k-1,k} \varphi_{ij} + \sum_{p,p-1} \varphi_{ij} = 0.$$

On pourra avoir dans cette formule $k = 1$, si s_1 est fictif, ou $p - 1 = m$, si s_m est fictif; dans ce dernier cas, $\sum_{m+1,m} \varphi_{ij} = 0$. Dès lors, on choisira k et p de façon que s_k ne soit pas précédé d'un système fictif, ni s_{p-1} suivi d'un système fictif : ceci fait, puisque les z_i des systèmes réels sont limités supérieurement, comme on l'a vu tout à l'heure, ceux des φ_{ij} de (24) qui sont positifs ont une limite supérieure; il en sera par suite de même de la valeur absolue de ceux des φ_{ij} qui sont négatifs. Donc, les z_{i_k} de s_k et les $z_{i_{p-1}}$ de s_{p-1} (si $p - 1 < m$) sont limités supérieurement. Il en résulte successivement, d'après (23), que les $z_{i_{k+1}}$ de s_{k+1}, les $z_{i_{k+2}}$ de s_{k+2}, ... sont limités supérieurement.

On a ainsi démontré complètement que les z_i sont limités, au moins quand chacun des ensembles s_l ne contient que des réservoirs tous fictifs ou tous réels, et même donné un moyen de trouver une limite supérieure des z_i, en tenant compte de (20).

Dans le cas du régime permanent, où le système des équations (16) prend la forme (23), le raisonnement se simplifie et se réduit à celui qu'on vient de faire sur ces équations (23).

En définitive, on aboutit au théorème suivant que j'énonce au point de vue de la théorie des équations différentielles :

Théorème I. — *Soit le système mixte d'équations implicites et différentielles*

$$(2) \qquad S_i(z_i)\frac{dz_i}{dt} - \frac{dw_i}{dt} = \varphi_{0i} + \varphi_{1i} + \ldots + \varphi_{ni} + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où S_i, w_i, φ_{ji}, a_i satisfont aux hypothèses A, et où t est le temps.

Soit encore s_1 l'ensemble de celles de ces équations, les n_1 premières par exemple, pour lesquelles φ_{0i} n'est pas identiquement nul; soit s_2 l'ensemble de celles des autres équations, les n_2 suivantes par exemple, pour lesquelles φ_{ji} n'est pas identiquement nul quand $i > 0$, $1 \leq j \leq n_1$, etc. [1]. *J'admets que cette classification comprenne toutes les équations (2), et que les quantités $S_i(z_i)$ d'un même ensemble s_k soient toutes à la fois identiquement nulles ou non.*

Dans ces conditions, pour toute solution $z_1, \ldots, z_n$ de ce système, dont les valeurs initiales sont finies, $z_1, \ldots, z_n$ restent limités supérieurement quand t croît indéfiniment.

Au point de vue de la Mécanique et de la Physique, le résultat ci-dessus donne le corollaire suivant :

Corollaire. — *Tout étant posé comme ci-dessus, si le système d'équations (2) détermine les variations des quantités caractéristiques $z_1, \ldots, z_n$ d'un système de réservoirs, de façon que les réservoirs S_i d'un même ensemble s_k soient à la fois tous réels ou tous fictifs, ces quantités caractéristiques restent limitées supérieurement.*

Remarque I. — Voici une extension de ce qui précède. Au lieu du système (16), je considère le système

$$(25) \qquad \frac{du_r}{dt} = \sum_r a + \Phi_{r-1,r} + \Phi_{r+1,r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

qu'on en déduit en remplaçant dans (16) $\sum_{r-1,r}$ et $\sum_{r+1,r}$ par $\Phi_{r-1,r}$ et $\Phi_{r+1,r}$.

Celles des hypothèses A qui sont relatives aux φ_{ij} sont alors remplacées par les suivantes :

$$\Phi_{r-1,r} = -\Phi_{r,r-1}, \qquad \Phi_{m,m+1} = \Phi_{m+1,m} = 0.$$

---

[1] Au besoin, pour plus de détails, *voir* p. 193.

$\Phi_{r-1,r}$ est pour $r > 1$ une fonction croissante des z_i de s_{r-1}, décroissante des z_i de s_r, finie quand ces z_i sont limités supérieurement, égale à $+\infty$ quand un des z_i de s_{r-1} est égal à $+\infty$, égale à $-\infty$ quand un des z_i de s_r est égal à $+\infty$. Les propriétés de Φ_{01} sont analogues, Φ_{01} ne dépendant alors que des z_i de s_1. Enfin, les Φ_{01}, $\Phi_{r-1,r}$ sont des fonctions continues de z_i lorsque z_i dépasse une certaine limite finie.

On peut appeler hypothèses B les hypothèses A ainsi modifiées. On en conclut :

Soit le système d'équations différentielles et implicites

$$S_i \frac{dz_i}{dt} = \frac{dw_i}{dt} = a_i + \Phi_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où S_i, w_i, a_i satisfont aux hypothèses A (ou B); je suppose qu'on puisse grouper ces équations, désignées par $S_1, \ldots, S_n$, en ensembles $s_1, s_2, \ldots, s_m$ tels que l'addition membre à membre des équations de chaque ensemble donne un résultat de la forme (25), *les w_i d'un même ensemble étant tous constants ou tous tels que $S_i(z_i) > 0$ si z_i dépasse une certaine limite et $w_i(\infty) = +\infty$: on peut affirmer que, pour une solution de valeurs initiales finies, les z_i restent tous limités supérieurement.*

En effet, les raisonnements qui nous ont servi à établir le théorème précédent s'appliquent identiquement.

DEUXIÈME PARTIE.

V. — Sur les déterminants, l'équation dite « séculaire » et des équations analogues.

12. Soient $n(n+1)$ quantités B_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, n; k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ satisfaisant aux conditions suivantes [1] :

$$(1) \qquad \begin{cases} B_{ik} \leq 0, & \text{lorsque } i \neq k, \\ B_{i0} + B_{i1} + \ldots + B_{ii} + \ldots + B_{in} = 0; \end{cases}$$

---

[1] Si l'on a des quantités B_{ik} $(i, k > 0)$ telles que $B_{ik} \leq 0$ pour $i \neq k$,

$$B_{i1} + \ldots + B_{in} \geq 0,$$

on peut toujours déterminer des quantités $B_{i0} \leq 0$ de façon que les conditions (1) aient lieu pour ces B_{ik} et les B_{i0}.

d'où $B_{ii} \geq 0$. Soient encore des quantités

$$B_1, \quad \ldots \quad B_n \geq 0,$$

et le déterminant

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \\ B_{12} & B_{22} & \ldots & B_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{1n} & B_{2n} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix}.$$

Je vais établir le théorème suivant :

THÉORÈME I. — $(-1)^{n-1}\Delta$ *est au moins égal à* 0, *et peut se développer sous forme d'une somme de termes tous positifs, de façon que chacun d'eux soit un produit positif de facteurs dont l'un est un* B_j, *et chacun des autres, au signe près, ou un* B_{ik} $(i \neq k$ *ou non*$)$, *ou une somme de* B_{ik} *d'une même colonne différents, et dont l'un est alors* B_{ii} *et donne son signe au facteur. Chaque terme qui contient* B_j, *avec* $i > 1$, *est de la forme*

$$B_j B_{1k} \ldots \qquad (k > 1),$$

les facteurs non écrits ne contenant aucun terme de la première colonne.

En effet, je pose

$$(3) \quad \begin{cases} B_{i0} + B_{i1} + \ldots + B_{in} = -C_{i0} = 0, \\ -(B_{i0} + \ldots + B_{i,m-1}) = B_{im} + B_{i,m+1} + \ldots + B_{in} = -C_{im} \quad (i \text{ et } m \geq 1); \end{cases}$$

d'où, d'après (1),

$$(4) \qquad C_{im} \leq 0, \qquad \text{si } m \leq i, \qquad C_{im} \geq 0, \qquad \text{si } m > i.$$

Pour $n = 1$, $\Delta = B_1 \geq 0$; pour $n = 2$,

$$\Delta = B_1 B_{22} - B_2 B_{12} \geq 0;$$

pour $n = 3$,

$$\Delta = B_1 \begin{vmatrix} B_{22} & B_{32} \\ B_{23} & B_{33} \end{vmatrix} - B_2 \begin{vmatrix} B_{12} & B_{32} \\ B_{13} & B_{33} \end{vmatrix} + B_3 \begin{vmatrix} B_{12} & B_{22} \\ B_{13} & B_{23} \end{vmatrix},$$

et, puisque

$$\begin{vmatrix} B_{22} & B_{32} \\ B_{23} & B_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{22} + B_{23} & B_{32} + B_{33} \\ B_{23} & B_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} C_{22} & C_{32} \\ B_{23} & B_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = -B_1 C_{22} B_{33} + B_1 C_{32} B_{23} - B_2 B_{12} B_{33} + B_2 B_{13} B_{32} + B_3 B_{12} B_{23} - B_3 B_{13} B_{22}.$$

Les six termes du second membre sont positifs et de la forme annoncée.

Je suppose le théorème établi pour les déterminants à $n-1$ lignes et colonnes au plus.

Soit Δ_{ik} le mineur obtenu en supprimant dans Δ la $i^{\text{ième}}$ colonne et la $k^{\text{ième}}$ ligne. On a

$$(5) \qquad \Delta = B_1\Delta_{11} - B_2\Delta_{21} + B_3\Delta_{31} - \ldots.$$

En ce qui concerne Δ_{11}, d'après (3) et (4),

$$-\Delta_{11} = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{32} & \ldots & C_{n2} \\ B_{23} & B_{33} & \ldots & B_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{2n} & B_{3n} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix},$$

et $-\Delta_{11}$ est de la forme Δ, mais avec $n-1$ lignes et colonnes. D'après l'hypothèse, on a

$$(-1)^{n-1}\Delta_{11} \geqq 0.$$

et le premier membre de cette inégalité peut se développer sous forme d'une somme de termes tous positifs; de même pour $(-1)^{n-1}B_1\Delta_{11}$, dont chaque terme est alors de la forme indiquée dans l'énoncé

On a maintenant

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} B_{12} & B_{32} & \ldots & B_{n2} \\ B_{13} & B_{33} & \ldots & B_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{1n} & B_{3n} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix},$$

et Δ_{21} est de la forme Δ, mais avec $n-1$ lignes et colonnes: $(-1)^{n-2}B_2\Delta_{21}$ est une somme de termes positifs dont chacun a la forme indiquée dans l'énoncé et contient une des quantités $B_{12}, \ldots, B_{1n}$ en facteur.

Enfin, quand $k > 2$,

$$\Delta_{k1} = \begin{vmatrix} B_{12} & B_{22} & \ldots & B_{k-1,2} & B_{k+1,2} & \ldots & B_{n2} \\ B_{13} & B_{23} & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ B_{1n} & B_{2n} & \ldots & B_{k-1,n} & B_{k+1,n} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix}.$$

Faisant passer la ligne qui contient B_{1k} à la première place, on obtient un déterminant $(-1)^{k-2}\Delta_{k1}$ de la forme Δ, mais avec $n-1$

lignes et colonnes, dont le produit par $(-1)^{n-2}$ est positif. Le terme correspondant du développement (5) de Δ est $(-1)^{k-1}B_k\Delta_{k1}$, et son produit par $(-1)^{n-1}$ peut se mettre sous forme d'une somme de termes tous positifs, dont chacun a la forme indiquée dans l'énoncé, et contient en facteur une des quantités $B_{12}, \ldots, B_{1n}$.

C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Si λ est une limite inférieure de celles des quantités B_i, B_{ik} ($k \geq 0$, $i \geq 1$) qui ne sont pas nulles, et si $\Delta \neq 0$, on a*

$$(-1)^{n-1}\Delta \geq \lambda^n.$$

Un des termes du développement de $(-1)^{n-1}\Delta$ indiqué au théorème I est en effet $\neq 0$, et, par suite, $\geq \lambda^n$, puisque tout facteur différent de zéro d'un de ces termes est au moins égal à λ en valeur absolue, d'après (1).

Corollaire II. — *Le déterminant*

$$(6) \qquad -D = -\begin{vmatrix} B_{11} & B_{21} & \ldots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \ldots & B_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{1n} & B_{2n} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

peut se mettre sous la forme Δ, en sorte que

$$(-1)^n D \geq 0.$$

En effet, d'après (3) et (4),

$$(6\ bis) \qquad -D = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{21} & \ldots & C_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \ldots & B_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{1n} & B_{2n} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix},$$

qui est de la forme Δ.

Théorème II. — 1° *Si, les conditions* (1) *ayant lieu, les quantités C_{ii} sont toutes > 0, on a*

$$(7) \qquad (-1)^n D \geq C_{11}C_{22}\ldots C_{nn} > 0;$$

2° *En particulier, les conditions* (1) *ayant lieu, si $\lambda > 0$ est une*

limite inférieure de celles des quantités $B_{ik}(k \neq i,\ k \geqq 0,\ i \geqq 1)$ *qui ne sont pas nulles, et si, pour chaque valeur de* i, *il y a une valeur de* $k < i$ *telle que* $B_{ik} > 0$, *on a*

$$(8) \qquad (-1)^n D \geqq \lambda^n.$$

En effet, dans ce dernier cas, d'après (1), (3) et (4),

$$(8\ bis) \qquad C_{ii} = B_{i0} + B_{i1} + \ldots + B_{i,i-1} \geqq \lambda;$$

(8) sera une conséquence de (7), qu'il suffit d'établir.

L'inégalité (7) est évidente pour $n = 1$; je la suppose vraie pour les déterminants (6) à au plus $n - 1$ lignes et colonnes. D'après (5), (6 *bis*) et la démonstration du théorème I,

$$-D = C_{11}D_{11} - C_{21}D_{21} + \ldots,$$
$$(-1)^{n-1}D_{11}C_{11}, \quad (-1)^{n-2}C_{21}D_{21}, \quad \ldots$$

sont positifs, et

$$(9) \qquad (-1)^n D \geqq (-1)^{n-1}C_{11}D_{11}.$$

Il suffit de vérifier que

$$(10) \qquad (-1)^{n-1}D_{11} \geqq C_{22}\ldots C_{nn};$$

or, le déterminant D_{11} est de la même forme que D, mais avec $n - 1$ lignes et colonnes seulement; d'après l'hypothèse (10) a lieu, par suite (7). C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Tout étant posé comme aux théorèmes I et II, si* $B_1 > 0$, *on a*

$$(-1)^{n-1}\Delta \geqq B_1 C_{22}\ldots C_{nn} > 0.$$

Cette inégalité résulte de (5), (7) et (10), Δ_{11} étant de la forme (6) de D.

Corollaire II. — *Tout étant posé comme au théorème II, chaque mineur* d *de* D *dont la diagonale principale ne contient que des* B_{ii} *est* $\neq 0$.

En effet, soient c_{ii} les quantités analogues aux C_{ii} pour d : $-c_{ii}$ sera formé, par exemple, de B_{kk} et de termes qui entrent dans C_{kk},

d'après (3), et l'on aura

$$-c_{ii} \geqq -C_{kk}, \qquad 0 < C_{kk} - c_{ii}.$$

Le déterminant d étant de la forme D, d'après le théorème II, d est différent de zéro.

Corollaire III. — *Soit l'équation en x*

$$(11) \qquad D(x) = \begin{vmatrix} B_{11} - \sigma_1 x & B_{21} & \dots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} - \sigma_2 x & \dots & B_{n2} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots & B_{nn} - \sigma_n x \end{vmatrix} = 0,$$

avec

$$(12) \qquad \sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \dots \quad \text{et} \quad \sigma_n \geqq 0,$$

et qui n'est pas identique : 1° *Quand les* B_{ik} *satisfont aux conditions* (1), (11) *n'a aucune racine réelle* > 0 ; 2° *Quand les* B_{ik} *satisfont en outre aux conditions du théorème II, cette équation n'a aucune racine réelle* $\geqq 0$: *dans ce dernier cas, si m des quantités* $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ *exactement sont* $\neq 0$, *l'équation est effectivement de degré m.*

En effet : 1° soit $x > 0$; d'après le corollaire II du théorème I, $-D(x)$ peut se mettre sous la forme Δ ; d'après le théorème I, $(-1)^n D(x)$, qui n'est pas identiquement nul, peut se développer sous la forme d'une somme de termes tous positifs, dont un au moins dépend de x, est $\geqq 0$ pour $x = 0$ et croît avec x ; donc $(-1)^n D(x) > 0$ lorsque x est plus grand que zéro ;

2° Dans ce cas, on est sûr que $D(x)$ n'est pas identiquement nul, car

$$(-1)^n D(0) > 0,$$

d'après le théorème II ; soient

$$\sigma_{i_1}, \quad \dots, \quad \sigma_{i_m}$$

ceux des σ_i qui sont $\neq 0$: le coefficient de

$$\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m} x^m,$$

dans le développement de $D(x)$ est, au signe près, un déterminant d de la forme indiquée au corollaire II du théorème II, et ce coefficient est $\neq 0$.

LEMME I. — *L'équation*

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\sigma_1 x & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\sigma_2 x & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}-\sigma_n x \end{vmatrix} = 0,$$

où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont ≥ 0, et $a_{ki} = a_{ik}$, a toutes ses racines réelles.

Ce résultat est bien connu quand $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont tous égaux à 1. Or, il suffit de se reporter à la démonstration qui figure dans l'*Algèbre supérieure* (¹) de M. H. Weber pour voir que celle-ci subsiste *à peu près identiquement* quand $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont quelconques > 0 (²).

Il ne reste donc à traiter que le cas où quelques-uns d'entre eux seraient nuls; on pourra toujours admettre que ce sont $\sigma_{m+1}, \dots, \sigma_m$. Partant du cas où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont tous > 0, on fait tendre $\sigma_{m+1}, \dots, \sigma_n$ vers 0 : $n-m$ racines au moins croissent indéfiniment en valeur absolue, et, à la limite, les autres racines sont réelles.

On peut aussi dans ce cas observer que la démonstration de M. H. Weber s'applique encore *presque identiquement*.

LEMME II. — *L'équation*

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} b_{11}-\sigma_1 x & b_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{12} & b_{22}-\sigma_2 x & b_{32} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{23} & b_{33}-\sigma_3 x & b_{43} & \dots & . \\ . & \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & \dots & \dots & b_{nn}-\sigma_n x \end{vmatrix} = 0,$$

où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont ≥ 0, $b_{i,i+1}$ et $b_{i+1,i} > 0$, $b_{ik} = 0$ quand $|i-k| > 1$, a toutes ses racines réelles.

En effet, je multiplie les termes des diverses colonnes par les quantités positives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, et je pose

$$b_{ik}\mu_i = a_{ik}, \qquad \sigma_i\mu_i = \sigma_i, \qquad \mu_i > 0;$$

(¹) *Traduction J. Griess*, Paris, Gauthier-Villars, 1898, p. 321 et suiv., ou texte allemand, *Algebra*, 1, 2ᵗᵉ Auflage, p. 307.

(²) Au sujet de ce cas *voir* Pierina QUINTILI, *Giorn. di Mat.* (A. Capelli), t. XLVII, janv.-fév. 1909, p. 21-24.

l'équation devient

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\sigma'_1 x & a_{21} & 0 & . \\ a_{12} & a_{22}-\sigma'_2 x & a_{32} & \dots \\ 0 & a_{23} & a_{33}-\sigma'_3 x & \dots \\ . & \dots & \dots\dots\dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Si les $a_{i,i-1}$, $a_{i-1,i}$ sont simultanément nuls ou $\neq 0$, je puis disposer des $\mu_i > 0$ de façon que

$$a_{12} = a_{21}, \qquad a_{23} = a_{32}, \qquad \dots,$$

car il suffit de poser

$$\mu_1 b_{12} = \mu_2 b_{21}, \qquad \mu_2 b_{23} = \mu_3 b_{32}, \qquad \dots, \qquad \mu_{n-1} b_{n-1,n} = \mu_n b_{n,n-1};$$

le lemme I s'applique, et (14) a toutes ses racines réelles.

Si des deux quantités $b_{i,i-1}$, $b_{i-1,i}$ l'une est nulle et l'autre différente du zéro ; soit, par exemple,

$$b_{23} b_{32} = 0, \qquad b_{32} + b_{23} \neq 0;$$

le déterminant du premier membre de (14) est égal au produit de deux déterminants de même forme

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\sigma_1 x & b_{21} \\ b_{12} & b_{22}-\sigma_2 x \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} b_{33}-\sigma_3 x & b_{43} & 0 & \dots \\ b_{34} & b_{44}-\sigma_4 x & b_{54} & \dots \\ 0 & b_{45} & b_{55}-\sigma_5 x & \dots \\ . & \dots & \dots\dots\dots & \dots \end{vmatrix},$$

pour lesquels on peut supposer la propriété établie, car celle-ci est évidemment vraie pour $n = 1$ ou 2.

Théorème III. — *Les* B_{ik} *satisfaisant aux conditions* (1), *avec* $B_{ik} = B_{ki}$, *l'équation* (11), *supposée non identique, a toutes ses racines réelles et* ≤ 0. *Quand les* B_{ik} *satisfont en outre aux conditions du théorème II, l'équation* (11) *est effectivement de degré* m *si* m *des quantités* σ_i *exactement sont* $\neq 0$, *et ses* m *racines sont* < 0.

D'après le corollaire III du théorème II, il suffit de montrer que l'équation (11) a toutes ses racines réelles : c'est ce qui résulte du lemme I.

Corollaire. — *J'admets que les* B_{ik} *satisfassent aux conditions* (1) *et à celles du théorème II, avec* $B_{ik} = B_{ki}$ [1], *et, quand* B_{ik} *est* $\neq 0$

[1] Plus simplement et plus généralement, les résultats du corollaire subsistent quand, supposant d'abord ces conditions remplies, on fait ensuite varier assez peu d'une manière quelconque les coefficients B.

$(i \neq k, i, k = 1)$, je remplace dans (11) $B_{ki} (k > i)$ *par* $B_{ik} + \varepsilon_{ik}$, *avec* $|\varepsilon_{ik}|$ *assez petit par rapport à* λ : *on peut toujours prendre les* $|\varepsilon_{ik}|$ *assez petits pour que cette nouvelle équation ait les parties réelles de ses racines toutes négatives* < 0. *Si même l'équation* (11) *avec* $\varepsilon_{ik} = 0$ *a toutes ses racines distinctes, la nouvelle équation a toutes ses racines réelles, distinctes et* < 0, *quand les* $|\varepsilon_{ik}|$ *sont assez petits.*

En effet, soit

$$E = 0$$

la nouvelle équation : ses racines sont de la forme $x_1 + y_1\sqrt{-1}$; quand les $|\varepsilon_{ik}|$ tendent vers zéro, $x_1 + y_1\sqrt{-1}$ a pour limite une racine de (11), et y_1 tend vers zéro, s'il n'est pas nul, en sorte que x_1 est négatif quand les $|\varepsilon_{ik}|$ sont assez petits, d'après le théorème III ; y_1 ne peut d'ailleurs être $\neq 0$ que si $E = 0$ a deux racines $x_1 \pm y_1\sqrt{-1}$ ayant même limite, c'est-à dire si (11) a une racine double.

C. Q. F. D.

Remarque. — On peut observer au sujet de cette démonstration que, si l'on fait varier d'une manière continue à partir de zéro les ε_{ik} sans les assujettir à conserver des modules très petits, l'équation $E = 0$ ne pourra cesser d'avoir négatives les parties réelles de ses racines sans que l'une des quantités x_1 s'annule. Si donc l'on pouvait démontrer que l'équation $E = 0$ n'a pas de racine imaginaire pure tant que les B_{ik} satisfont aux conditions (1) et à celles du théorème II, on aurait par cela même démontré que cette équation a les parties imaginaires de ses racines toutes négatives.

Je me contenterai d'indiquer, sans développer les calculs, que ce procédé réussit lorsque $n = 3$: dans ce cas donc, les racines de $E = 0$ ont toujours leurs parties réelles négatives, et sont toutes réelles ou, évidemment, toutes distinctes.

Théorème IV. — *Soit l'équation en* x

$$(14\ bis) \quad \begin{vmatrix} B_{11} - \sigma_1 x & B_{21} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ B_{12} & B_{22} - \sigma_2 x & B_{32} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & B_{23} & B_{33} - \sigma_3 x & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{n-1,n} & B_{nn} - \sigma_n x \end{vmatrix} = 0,$$

où $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont $\geqq 0$, et $B_{ik} = 0$ quand $|i - k| > 1$ (i, k égaux à 1, 2, …, n). Lorsque les B_{ik} satisfont aux conditions (1), (14 *bis*) *a toutes ses racines réelles et $\leqq 0$; elles sont même < 0 lorsque les B_{ik} satisfont en outre aux conditions du théorème* II, *et, dans ce dernier cas, si m des quantités σ_i exactement sont $\neq 0$ l'équation est effectivement de degré m.*

En effet, d'après le corollaire III du théorème II, il suffit de montrer que l'équation (14 *bis*) a toutes ses racines réelles. C'est ce qui résulte du lemme II, qui est applicable, puisque, d'après (1), $B_{ik} \geqq 0$ ($i \neq k$).

C. Q. F. D.

Remarque. — On pourrait aussi démontrer directement, sans l'intermédiaire des lemmes I et II, que (14 *bis*) a toutes ses racines réelles. Soit X_k le déterminant obtenu en supprimant, dans le déterminant (14 *bis*) ou X, les k premières lignes et colonnes. On remarquera qu'on a pour $X, X_1, X_2, \ldots$, une suite d'égalités

$$X = (B_{11} - \sigma_1 x) X_1 - B_{12} B_{21} X_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1} = B_{nn} - \sigma_n x, \quad X_n = 1,$$

et que les polynomes

$$X, \quad X_1, \quad \ldots, \quad X_n$$

forment une suite ayant des propriétés analogues aux suites de Sturm quand $\sigma, \ldots, \sigma_n$ sont tous différents de zéro et de même signe; alors X a toutes ses racines réelles parce que la différence entre le nombre des variations de cette suite pour $x = +\infty$ et $x = -\infty$ est égal à n. Le cas où certains des $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont nuls s'en déduit comme cas limite.

On peut encore observer que le théorème IV comporte un corollaire analogue à celui du théorème III : si dans (11) on suppose d'abord que les B_{ik} satisfassent aux conditions (1) et à celles du théorème II, qu'on les fasse alors varier assez peu, et que les B_{ik}, pour lesquels $|k - i| > 1$ ($i, k \geqq 1$), soient non plus nuls, mais suffisamment petits, l'équation (11) correspondante a encore les parties réelles de ses racines négatives.

VI. — Sur certains systèmes d'équations implicites.

15. Soit un système de n équations implicites

$$(15) \qquad f_k(z_1, \ldots, z_n) + a_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

où les inconnues réelles sont $z_1, \ldots, z_n$, et où les a_k sont des paramètres réels. Les fonctions f_k sont supposées univalentes, continues et ayant des dérivées, au moins dans le domaine δ où on les considère. Soit

$$\mathrm{B}_{ik} = \frac{\partial f_k}{\partial z_i}; \tag{16}$$

on a le théorème suivant :

Théorème. — *Soit, pour un système a_i^0 de valeurs des a_i,*

$$z_1^0, \quad \ldots, \quad z_n^0,$$

une solution des équations (15). *Les* B_{ik} *satisfaisant aux conditions du deuxième alinéa du théorème II du paragraphe* V, *la valeur correspondante du jacobien* D *des* f_k *est différente de zéro, et les équations* (15) *définissent, pour les valeurs des* a_i *voisines des* a_i^0, n *fonctions* $z_1, \ldots, z_n$ *des* a_i *telles que*

$$\mathrm{E}_{ik} = \frac{\partial z_k}{\partial a_i} \geqq 0.$$

Plus exactement, soit, pour le système z_i^0 *de valeurs des* z_i, $\lambda_1 > 0$ *une limite supérieure,* $\lambda > 0$ *une limite inférieure de celles des quantités* $|\mathrm{B}_{ik}|$ *qui ne sont pas nulles : on a*

$$\mathrm{E}_{kk} \geqq \lambda_1^{-1},$$

et quand $i \neq k$,

$$\mathrm{E}_{ik} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{E}_{ik} \geqq \frac{\lambda}{\lambda_1^2},$$

cette dernière inégalité ayant forcément lieu pour les valeurs de i *et de* k *telles que* $\mathrm{B}_{ik} > 0$.

En effet, D est différent de zéro, et même, d'après (8) (§ V),

$$(-1)^n \mathrm{D} \geqq \lambda^n.$$

Il est bon d'indiquer incidemment à quoi équivalent, pour les fonctions f_k, les conditions imposées aux B_{ik}. La condition énoncée au deuxième alinéa du théorème II, qu'il y a un $\mathrm{B}_{ik} > 0$, pour chaque valeur de i et une valeur de $k < i$, exprime que, pour ces valeurs de

i et k, on a

$$\frac{\partial f_k}{\partial z_i} > 0;$$

de même, $B_{ii} < 0$ [équations (1), n° 12] exprime que

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_i} < 0.$$

Par conséquent, les conditions relatives aux B_{ik} équivalent pour la fonction f_i, dans le domaine considéré, aux suivantes : f_i est fonction décroissante de z_i et non décroissante des autres quantités z_k; pour chaque valeur de i, il y a une valeur de $k < i$ telle que f_k soit fonction effectivement croissante de z_i; enfin, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$B_{i1} + \ldots + B_{in} = \frac{\partial(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)}{\partial z_i} \leqq 0.$$

Ceci posé, on a

(17) $$df_k + da_k = B_{1k}\, dz_1 + \ldots + B_{nk}\, dz_n + da_k = 0,$$

$$D\, dz_k = -\begin{vmatrix} B_{11} & \ldots & B_{k-1,1} & da_1 & B_{k+1,1} & \ldots & B_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ B_{1n} & \ldots & B_{k-1,n} & da_n & B_{k+1,n} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix}.$$

Amenant, dans le déterminant du second membre, les $k^{\text{ièmes}}$ lignes et colonnes à la première place, on a

$$D\, dz_k = -D_k,$$

où

$$D_k = \begin{vmatrix} da_k & B_{1k} & B_{2k} & \ldots & B_{k-1,k} & B_{k+1,k} & \ldots & B_{nk} \\ da_1 & B_{11} & B_{21} & \ldots & B_{k-1,1} & B_{k+1,1} & \ldots & B_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ da_n & B_{1n} & B_{2n} & \ldots & B_{k-1,n} & B_{k+1,n} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant, quand on suppose les da_i positifs, est du type (2) du n° **12**, et alors, d'après le théorème I, $(-1)^{n-1} D_k$ est $\geqq 0$ et de la forme

(18) $$(-1)^{n-1} D_k = E'_{1k}\, da_1 + \ldots + E'_{nk}\, da_n,$$

où $E'_{ik} \geqq 0$, puisque le premier membre de (18) est positif quand $da_i \geqq 0$, les autres da_k étant nuls. Soit

(19) $$E'_{ik} = (-1)^n D E_{ik}, \qquad \text{d'où} \qquad E_{ik} \geqq 0;$$

(corollaire II du théorème I, n° **12**);

on a

$$(-1)^n D\, dz_k = (-1)^{n-1} D_k,$$

$$dz_k = E_{1k}\, da_1 + \ldots + E_{nk}\, da_n$$

et

(20) $$\frac{\partial z_k}{\partial a_i} = E_{ik} \geqq 0.$$

On peut même préciser un peu plus. On a, d'après le théorème I, puisque D se déduit de D_k en y remplaçant da_i par B_{ki},

$$(-1)^{n-1} D = E'_{1k} B_{k1} + \ldots + E'_{nk} B_{kn} = (-1)^n D (E_{1k} B_{k1} + \ldots + E_{nk} B_{kn}),$$
$$-1 = E_{1k} B_{k1} + \ldots + E_{nk} B_{kn};$$

le second membre ne comprend que le terme $E_{kk} B_{kk}$ qui puisse être négatif, en sorte que

(21) $$-B_{kk} E_{kk} \geqq 1, \qquad E_{kk} \geqq \frac{1}{\lambda_1};$$

ces inégalités résulteraient aussi de la considération de l'égalité

$$\frac{\partial f_k}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial a_i} + \ldots + \frac{\partial f_k}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial a_i} = \eta_{ki},$$

où $\eta_{ki} = 0$, si $k \neq i$, et $\eta_{kk} = -1$, égalité qui s'écrit aussi

$$B_{1k} E_{i1} + \ldots + B_{nk} E_{in} = \eta_{ki};$$

il suffit en effet d'y faire $i = k$.

Quand $i \neq k$, le seul terme du premier membre qui puisse être négatif est

$$B_{kk} E_{ik};$$

si donc un des termes

$$B_{mk} E_{im} \qquad (m \neq k),$$

est différent de zéro, on devra avoir $E_{ik} \neq 0$, $E'_{ik} \neq 0$, et inversement. Par conséquent, lorsque $B_{ik} > 0$, puisque E_{ii} est > 0, d'après (21), on a

$$|B_{kk} E_{ik}| \geqq B_{ik} E_{ii} \geqq \frac{\lambda}{\lambda_1},$$

$$E_{ik} \geqq \frac{\lambda}{\lambda_1^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

VII. — Alimentation permanente et régime permanent des systèmes de réservoirs.

14. Alimentation permanente. — Je reprends les équations (2) du paragraphe III, *en admettant, comme dans tout ce qui suit, que les φ_{ij} satisfassent, non aux hypothèses A du paragraphe IV, mais aux hypothèses plus restrictives des paragraphes II et III;* ces dernières paraissent suffire, comme je l'ai expliqué au paragraphe II, pour l'étude des systèmes de réservoirs naturels ou, plus généralement, des systèmes envisagés dans le paragraphe VII.

Le seul cas où un régime permanent, pour lequel $z_1, \ldots, z_n$ soient constants, est possible, c'est celui où les a_i sont constants, sans être tous nuls, bien entendu, s'il y a mouvement. C'est là une condition nécessaire, et les équations du régime permanent sont

$$(22) \qquad \varphi_{0i} + \varphi_{1i} + \ldots + \varphi_{ni} + a_i = f_i + a_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mais, *a priori*, on ne peut affirmer qu'il y aura un régime permanent pour un système donné de valeurs des a_i, c'est-à-dire qu'on n'est pas certain que le système (22) ait alors une solution. Ainsi, une fontaine intermittente, dont l'alimentation est constante, a un régime périodique. On pourrait donc examiner, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des constantes données, positives, nulles ou même négatives : 1° dans quels cas il y a un régime permanent, c'est-à-dire pour quelles valeurs de $a_1, \ldots, a_n$ les équations (22) ont une solution ; 2° dans quels cas il y a un régime périodique, qui dépendra alors des équations (2) du paragraphe **5**; 3° les autres cas, s'il y en a, qui dépendront de ces mêmes équations (2).

Je commence par indiquer un exemple de chacun de ces trois cas.

Premier cas. — *Régime permanent.* — Il suffira de considérer un seul réservoir, qui donne lieu à l'équation

$$\varphi_{01} + a_1 = 0.$$

Si φ_{01} est une fonction continue de z_1 égale à zéro pour une certaine valeur de z_1 et les valeurs plus petites, et à $-\infty$ lorsque $z_1 = +\infty$,

cette équation a toujours au moins une racine pour chaque valeur de $a_1 > 0$ (exemple en hydraulique des liquides : cas où le réservoir S_1 possède un déversoir externe non noyé à l'aval); il y a un régime permanent au moins pour chaque valeur de a_1; il n'y en a qu'un si φ_{01} est fonction constamment décroissante de z_1.

Un exemple plus étendu en hydraulique des eaux est fourni par un système de n réservoirs à surface libre et à exutoires non noyés à l'aval, dans des conditions étudiées par moi antérieurement [1].

Deuxième cas. — *Régime périodique avec alimentation permanente.* — Soit, en hydraulique des liquides, $-\varphi_{01}$ une fonction de z_1 qui exprime sous certaines conditions le débit d'un siphon non noyé à l'aval [2] (§ III, n° 7), ou une fonction de même nature, c'est-à-dire ici une fonction qui peut prendre les deux valeurs

$$\psi_1(z_1) > 0 \quad \text{et} \quad 0$$

quand z_1 varie entre h_1 et H_1, la valeur

$$\psi_1(z_1) = 0$$

quand $z_1 < h_1$, la valeur

$$\psi_1(z_1) \neq 0,$$

quand $z_1 > H_1$. La fonction $\psi_1(z_1)$ est discontinue pour $z_1 = h_1$, $\psi_1(h_1 + \varepsilon)$ étant $> \theta_1 > 0$ (θ_1 nombre fixe) si petit que soit le nombre positif ε, et $\psi_1(h_1 - \varepsilon)$ étant nul; de plus, $\psi(z_1)$ est fonction croissante de z_1 pour $z_1 > h_1$.

Alors $\varphi_{01} + a_1$ est d'une des formes

$$a_1 - \psi_1(z_1) \quad \text{ou} \quad a_1;$$

pour une valeur de $a_1 > 0$, le régime permanent n'est possible que si l'on peut avoir

$$a_1 = \psi_1(z_1);$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est

$$a_1 \geq \psi_1(h_1 + \varepsilon);$$

---

(1) *Voir* par exemple *Journ. École Pol.*, 1909, p. 52.

(2) On suppose l'orifice d'aval, de cote h_2', plus bas que celui d'amont, de cote h_1, c'est-à-dire que, dans la seconde formule (6) du n° 7, il faut remplacer z par z_1, z_1 par z_2, h par h_1, h_1 par h_2', et h_2 par $h_1 > h_2$.

si elle est remplie, il existe un régime permanent (¹): sinon, il n'y en a pas.

Soit une valeur a_1 inférieure à

$$\lim \psi_1(h_1+\varepsilon)_{\varepsilon=0}:$$
$$\frac{dw_1}{dt} = a_1 - \psi_1(z_1) \qquad \text{ou} \qquad \frac{dw_1}{dt} = a_1,$$

d'après les équations (2) du paragraphe III.

$S_1(z_1)$ étant, comme ci-dessus d'ailleurs, supposé fini et > 0 quand z_1 est fini et au moins égal à h_1, et la valeur initiale de z_1 étant comprise entre h_1 et H_1, lorsque la deuxième équation s'applique, z_1 finit par atteindre la valeur H_1; à partir de ce moment, il convient d'envisager la première équation (le siphon s'amorce alors, car on est dans le cas des liquides), et z_1 décroît: mais on a

$$a_1 - \psi_1(z_1) < -\alpha_1 \qquad (\alpha_1 = \text{const.} > 0);$$

z_1 reprend donc la valeur h_1 au bout d'un temps fini, et, à partir de ce moment, il faut envisager la deuxième équation (le siphon se désamorce). Le mouvement est évidemment périodique, et sa période est

$$P_1 = \int_{h_1}^{H_1} \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{\psi_1(z_1) - a_1}\right] S_1\, dz_1.$$

Plus généralement, soit un système de n réservoirs dont un seul, S_1, possède un exutoire externe, en sorte que

$$\varphi_{02} = \ldots = \varphi_{0n} = 0;$$

si φ_{01} est la même fonction bivalente que tout à l'heure, et si

$$U_1 = w_1 + \ldots + w_n,$$

on a [équations (18) du paragraphe IV]

$$\frac{dU_1}{dt} = \varphi_{01} + a_1 + \ldots + a_n;$$

quand

$$0 < a_1 + \ldots + a_n < \lim \psi_1(h_1+\varepsilon)_{\varepsilon=0},$$

(¹) Le régime est alors asymptotiquement permanent pour une valeur initiale quelconque de z_1 (*Journ. École Pol.*, p. 43 et 52-56).

le régime permanent est impossible : U_1 est alternativement croissant et décroissant.

Troisième cas. — *Régimes avec alimentation permanente et qui ne sont ni permanents ni périodiques.*

On en a un exemple immédiat en considérant deux réservoirs S_1, S_2 analogues au réservoir S_1 envisagé dans le deuxième cas, avec des périodes P_1, P_2, et qui se déversent exclusivement par des siphons non noyés à l'aval dans un troisième réservoir S_3 pour lequel a_3 est constant, et φ_{03} univalent. On a

$$\frac{dw_3}{dt} = \varphi_{03} + \varphi_{13} + \varphi_{23} + a_3 = \varphi_{03} + A_3(t),$$

où φ_{13}, φ_{23} ne dépendent pas de z_3.

Si P_1 et P_2 sont incommensurables entre eux, on peut montrer que z_3 n'est pas périodique. Je ne reproduis pas ici la démonstration.

Au contraire, si P_1 et P_2 sont commensurables entre eux, z_1 et z_2 ont une période commune P

$$\frac{dw_3}{dt} = \varphi_{03} + A_3(t),$$

où $A_3(t)$ est périodique, de période P; on sait que (¹) z_3 est asymptotiquement périodique. Soit, en particulier, $P = P_1 = P_2$; le mouvement pourra présenter une circonstance curieuse : si $a_1 + a_2$ est relativement assez petit, la période P, d'après son expression calculée plus haut (deuxième cas), sera grande; pendant la majeure partie de cette période, c'est-à-dire pendant le remplissage de S_1 et S_2, $A_3(t) = a_3$, et le mouvement de S_3 semblera durant ce temps asymptotiquement permanent, ce phénomène pouvant présenter une ou deux phases.

Bien que, dans le troisième cas étudié ci-dessus, la solution z_1, z_2, z_3 n'ait, en général, aucune période, on sait qu'on peut affirmer l'existence d'un système ζ_1, ζ_2, ζ_3 tel que les conditions

$$|z_1 - \zeta_1| < \varepsilon, \qquad |z_2 - \zeta_2| < \varepsilon, \qquad |z_3 - \zeta_3| < \varepsilon.$$

(¹) *Journ. École Polyt.*, 1909, p. 28 et 45.

(ε nombre positif arbitrairement petit) seront remplis une infinité de fois ([1]).

J'ai insisté sur ces exemples relativement simples : ils montrent la variété des cas que l'on peut rencontrer dans l'étude des réservoirs avec alimentation permanente, et ils ne sont peut-être pas sans intérêt au point de vue de l'hydraulique souterraine.

Dans ce qui suit, je n'envisagerai plus que des fonctions φ_{0i}, φ_{ki} *univalentes*, au moins dans les domaines étudiés.

15. Propriétés des équations différentielles et implicites du mouvement quelconque d'un système de réservoirs. — Je reprends le système d'équations (2) du paragraphe III,

$$w'_i = S_i z'_i - \varphi_{0i} + \varphi_{1i} + \ldots + \varphi_{ni} + a_i = f_i + a_i,$$

relatives au mouvement quelconque d'un système de réservoirs; je vais signaler certaines propriétés des quantités

$$B_{ik} = \frac{\partial f_k}{\partial z_i}$$

qui comportent des applications dans la suite. On a

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &B_{ki} = \frac{\partial f_i}{\partial z_k} = \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial z_k} = -\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial z_k} \geqq 0 \\ &B_{ik} = \frac{\partial f_k}{\partial z_i} = \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial z_i} = -\frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial z_i} \geqq 0 \end{aligned}\right. \qquad (i \neq k),$$

$$B_{ii} = \frac{\partial f_i}{\partial z_i} = \frac{\partial(\varphi_{0i} + \ldots + \varphi_{ni})}{\partial z_i} = -(B_{i0} + B_{i1} + \ldots + B_{i,i-1} + B_{i,i+1} + \ldots + B_{in});$$

$$B_{ii} \leqq 0 \text{ et, par définition, } B_{i0} = -\frac{\partial \varphi_{0i}}{\partial z_i} \geqq 0.$$

Le jacobien ou déterminant fonctionnel des f_i est un déterminant du type considéré au corollaire II du théorème I du paragraphe V, et les B_{ik} satisfont aux conditions (1) de ce paragraphe.

On peut en outre ajouter, aux hypothèses des paragraphes II et III sur les φ_{0i}, φ_{ki}, les hypothèses suivantes, habituellement vraies. Le domaine où varient z_1, z_2, ..., z_n peut se subdiviser en domaines

---

([1]) *Cf.* H. Poincaré, *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III. Paris, Gauthier-Villars, 1899.

partiels δ limités par certaines multiplicités ou surfaces dans l'espace à n dimensions

$$\psi(z_1, \ldots, z_n) = 0;$$

ces équations, dans des cas très usuels, seront de la forme

$$z_i = \lambda z_k \quad \text{avec } \lambda \text{ constant, ou} \quad z_i = \text{const.};$$

ainsi, dans le cas d'un réservoir unique d'eau, muni de petits orifices aux cotes $\mu_1, \mu_2, \ldots$, ces équations seront

$$z_1 = \mu_1 \quad \text{ou} \quad z_1 = \mu_2, \quad \text{ou} \quad \ldots.$$

Soit δ un de ces domaines partiels, les frontières du domaine, formées par certaines de ces surfaces, étant exclues : les fonctions φ_{0i}, φ_{ki}, quand elles ne sont pas identiquement nulles dans le domaine δ, y seront supposées *partout* différentes de zéro, univalentes, finies et continues; leurs dérivées par rapport aux variables qui entrent effectivement dans ces fonctions sont différentes de zéro dans δ, et finies.

Ainsi, en hydraulique des eaux, si l'un des dispositifs de communication de S_i et de S_k est un ajutage ordinaire à la cote c, on a pour ce dispositif l'une des cinq formes suivantes, où les coefficients $m_1, \ldots, m_4$, ainsi que le coefficient m' indiqué ensuite, sont des quantités constantes ou lentement variables avec z_i et z_k :

$$(24) \quad \begin{cases} \varphi_{ik} = m_1 \sqrt{z_i - z_k} & (z_i \geq z_k \geq c), \\ \varphi_{ik} = - m_2 \sqrt{z_k - z_i} & (z_k \geq z_i \geq c), \\ \varphi_{ik} = m_3 \sqrt{z_i - c} & (z_i \geq c \geq z_k), \\ \varphi_{ik} = - m_4 \sqrt{z_k - c} & (z_k \geq c \geq z_i), \\ \varphi_{ik} = 0 & (c \geq z_i, \ c \geq z_k). \end{cases}$$

De même, pour un ajutage externe de S_i, à la cote c',

$$(25) \quad \begin{cases} \varphi_{0i} = - m' \sqrt{z_i - c'} & (z_i \geq c'), \\ \varphi_{0i} = 0 & (z_i \leq c'). \end{cases}$$

Les fonctions φ_{ik}, φ_{0i} sont, on le voit, *univalentes*, *mais multiformes* (comparer avec la fin du n° **7**).

En réalité, les formules (24) ci-dessus, par exemple, ne seraient suffisamment exactes que si l'ajutage avait une section infiniment

petite; dans le cas d'une section finie de petites dimensions, c est la cote du centre de gravité de la section, et les formules (24) ne s'appliquent que quand $|z_i - c|$ ou $|z_k - c|$ sont supérieurs à une petite quantité positive ε. La fonction φ_{ik} est encore multiforme, mais il y a une région déterminée par une quelconque des inégalités

$$|z_i - c| \leqq \varepsilon, \qquad |z_k - c| \leqq \varepsilon,$$

où la valeur de cette fonction est mal connue.

On pourra négliger ε, et les quantités analogues pour un dispositif quelconque, ou encore, plus rigoureusement, exclure du domaine δ non seulement la frontière, mais encore le voisinage immédiat de la frontière.

Finalement, en tenant compte aussi des paragraphes II et III, on fera, au sujet des quantités (23), les hypothèses suivantes, que j'appellerai *hypothèses C*, et qui seront valables dans le domaine δ :

(26)

1° Lorsque φ_{ik} n'est pas identiquement nul dans δ, l'une des deux quantités

$$B_{ik} \text{ ou } B_{ki} \text{ est } > 0 :$$

si, par exemple, φ_{ki} dépend effectivement de z_k,

$$B_{ki} > 0 \qquad \text{d'où} \qquad B_{kk} < 0;$$

2° Lorsque φ_{0i} n'est pas identiquement nul dans δ,

$$B_{i0} > 0 \qquad \text{d'où} \qquad B_{ii} < 0;$$

par exemple, si S_i a un dispositif externe à une cote $c \leqq z_i$,

$$B_{i1} + \ldots + B_{ii} + \ldots + B_{in} = -B_{i0} < 0;$$

3° Si un dispositif de communication de S_i avec un autre réservoir, ou avec l'extérieur, fonctionne de façon que l'une au moins des fonctions $\varphi_{0i}, \varphi_{1i}, \ldots, \varphi_{ni}$ ne soit pas identiquement nulle et dépende de z_i dans δ,

$$B_{ii} < 0.$$

Il y a intérêt à observer qu'on pourra, à l'occasion, faire sur les B_{i0}, B_{ik} des hypothèses encore plus précises.

Ainsi, en hydraulique des eaux, je suppose que les dispositifs de communication de S_i et S_k soient des ajutages noyés; on pourra

prendre sensiblement, dans beaucoup de cas [n° **7**, formule (5) et (6); n° **8**, formule (7); n° **10**, formule (15)],

$$B_{ki} = \frac{\partial f_i}{\partial z_k} = \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial z_k} = - \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial z_i} = \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial z_i} = \frac{\partial f_k}{\partial z_i} = B_{ik}, \tag{27}$$

où $i \neq k$; le jacobien des f_i est alors un déterminant symétrique; les fonctions f_i sont les dérivées partielles d'une même fonction

$$F(z_1, \ldots, z_n),$$

par rapport à $z_1, \ldots, z_n$, et les équations différentielles et implicites (2) du paragraphe III deviennent

$$w'_i = S_i z'_i = \frac{\partial F}{\partial z_i} + a_i. \tag{28}$$

Si le dispositif de communication de S_i et S_k est un déversoir noyé, et si [n° **7**, formule (4)]

$$\varphi_{ki} = m(z_k - c)\sqrt{z_k - z_i} \qquad (z_k > z_i > c).$$

on a

$$\frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial z_k} + \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial z_i} = B_{ki} - B_{ik} > 0. \tag{29}$$

16. Sur le cas général du régime permanent. — Les équations du régime permanent sont de la forme

$$f_i + a_i = 0, \tag{30}$$

avec a_i constant ≥ 0, et analogues aux équations (15) du paragraphe VI; un des a_i est > 0.

J'admets que le système de valeurs a_i^0 des a_i considéré soit tel que les équations ci-dessus aient une solution $z_1^0, \ldots, z_n^0$ située à l'intérieur d'un des domaines δ définis tout à l'heure à propos de (23), c'est-à-dire que $z_1^0, \ldots, z_n^0$ ne satisfassent à aucune des conditions $\psi(z_1, \ldots, z_n) = 0$.

Je classe alors les réservoirs d'une manière analogue à celle du théorème I du paragraphe IV, en envisageant non plus les communications possibles, mais les communications *effectives*. Soit le groupe s_1 des réservoirs

$$S_1, \quad \ldots, \quad S_{n_1},$$

qui se déversent *effectivement* à l'extérieur par un dispositif (orifice, déversoir, etc.) qui fonctionne, c'est-à-dire que, pour les valeurs z_i^0

des z_i, on a

$$\varphi_{01}, \quad \ldots, \quad \varphi_{0n_1} \quad \text{tous} < 0;$$

On a $n_1 > 0$, puisque les a_i^0 sont $\geqq 0$ et non tous nuls, et que, le régime étant permanent, il faut qu'un des dispositifs externes fonctionne. Soit ensuite le groupe s_2 de ceux

$$S_{n_1+1}, \quad \ldots, \quad S_{n_2}$$

des autres réservoirs qui alimentent *effectivement* un au moins des réservoirs de s_1 : les réservoirs de s_2 n'ont aucun dispositif externe fonctionnant, et, de plus, par hypothèse, chacun d'eux fournit un débit positif plus grand que zéro à l'un des s_1. Soit encore le groupe s_3 de ceux

$$S_{n_2+1}, \quad \ldots, \quad S_{n_3}$$

des autres réservoirs qui alimentent *effectivement* un au moins des réservoirs de s_2, etc. J'admettrai que, pour le système des valeurs de

$$z_1, \quad \ldots, \quad z_n, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n$$

considérées, chaque réservoir du système fait partie d'un de ces groupes; il en sera forcément ainsi dans le cas où les a_i^0 sont tous > 0.

D'après (26), c'est-à-dire d'après les hypothèses C, on a pour les réservoirs de s_1

$$B_{10}, \quad \ldots, \quad B_{n_1 0} > 0;$$

pour chaque valeur de k égale à $n_1 + 1$, ..., n_2, il y a au moins une valeur de $i \leqq n_1$, et telle que

$$B_{ki} > 0,$$

puisque chaque réservoir de s_2 alimente effectivement un au moins des s_1; pour chaque valeur de k égale à $n_2 + 1$, ..., n_3, il y a une valeur de i telle que

$$n_1 + 1 \leqq i \leqq n_2 \quad \text{et} \quad B_{ki} > 0,$$

puisque chaque réservoir de s_3 alimente au moins un des s_2, etc.

Les B_{ki}, puisque, d'après (23) ou (26), $B_{kk} < 0$ pour chaque valeur de k, satisfont donc aux conditions (1) du paragraphe V, et, en outre, aux conditions de l'alinéa 2 du théorème II de ce paragraphe. Ce théorème II et ses conséquences s'appliquent ainsi au jacobien du

système (30), et ce jacobien est différent de zéro, et du signe de $(-1)^n$. En particulier, on peut se servir ici du théorème du paragraphe VI : à chaque système de valeurs des a_i tel que les $|a_i - a_i^0|$ soient assez petits correspond une solution $z_1, \ldots, z_n$ de (30) telle que les $|z_i - z_i^0|$ soient petits, et que $z_1, \ldots, z_n$ ne satisfassent à aucune des conditions $\psi(z_1, \ldots, z_n) = 0$. J'envisage une de ces solutions et je suppose que a_k éprouve un accroissement infiniment petit positif; on a

$$E_{ik} = \frac{\partial z_k}{\partial a_i} \geqq 0, \qquad E_{kk} \geqq \lambda_1^{-1} > 0, \qquad k \neq i \qquad \text{ou} \qquad k = i,$$

et

$$E_{ki} = \frac{\partial z_i}{\partial a_k} > 0, \qquad \text{si} \qquad B_{ki} = \frac{\partial f_i}{\partial z_k} > 0, \qquad \text{avec } k \neq i;$$

$dz_1, \ldots, dz_n$ ne peuvent être négatifs.

D'autre part, pour chaque valeur de k, d'après (26), on a

$$B_{ki} = \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial z_k} > 0, \qquad k \neq i,$$

lorsque S_k alimente effectivement S_i, ou lorsque S_i alimente effectivement S_k par un dispositif de communication dont le débit dépend de z_k (on pourra dire, par extension, que ce dispositif est alors *noyé*). Enfin, soit S_j un réservoir quelconque autre que S_k et l'équation

$$df_j = B_{1j}\, dz_1 + \ldots + B_{nj}\, dz_n = 0.$$

où

$$dz_1, \qquad \ldots, \qquad dz_n \geqq 0;$$

d'après ce qui précède,

$$B_{jj} < 0;$$

on ne peut donc avoir $dz_j = 0$ que si celles des quantités dz_l pour lesquelles B_{lj} est $\neq 0$ sont nulles; mais $B_{lj} = \frac{\partial \varphi_{lj}}{\partial z_l}$ est $\neq 0$, d'abord quand S_l est un réservoir qui alimente effectivement S_j, ensuite quand S_l est un réservoir que S_j alimente par un dispositif de communication noyé. Ces résultats montrent complètement quelle sera l'influence sur les quantités caractéristiques d'une petite variation de la quantité a_k. Dès lors, on obtient ces propriétés :

Quand on fait croître légèrement le débit permanent d'alimen-

tation a_k d'un réservoir S_k au voisinage de la valeur a_k^0, les valeurs $z_1, \ldots, z_n$ de la solution permanente qui correspond à $a_1, \ldots, a_n$, et est voisine de la solution $z_1^0, \ldots, z_n^0$, ne peuvent décroître; z_k croît effectivement; on en conclut de proche en proche quels sont les réservoirs dont les quantités caractéristiques croissent effectivement en observant que, si z_i ($i \neq k$ ou non) croît effectivement, les quantités caractéristiques des réservoirs que S_i alimente, ou qui alimentent S_i par un dispositif noyé, croissent effectivement.

Une partie de ces résultats, dans les cas particuliers usuels, pourra paraître plus ou moins intuitive à l'hydraulicien, après réflexion toutefois, eu égard à la complexité du problème; mais ce sera moyennant plus d'hypothèses qu'on n'en fait ici.

17. Cas particuliers du régime permanent. — Je me contenterai à ce sujet d'indiquer sommairement quelques exemples, en rappelant que je suppose les fonctions φ_{ik} univalentes.

Premier cas. — J'admets que S_n communique avec S_{n-1} seul, ..., S_k avec S_{k-1} et S_{k+1} seuls, ..., et que S_1 se déverse à l'extérieur. On a pour le régime permanent

$$w'_n = \varphi_{n-1,n} + a_n = 0, \quad \ldots \quad w'_k = \varphi_{k-1,k} + \varphi_{k+1,k} + a_k = 0, \quad \ldots,$$
$$w'_1 = \varphi_{01} + \varphi_{21} + a_1 = 0.$$

Si l'on pose encore

$$U_k = w_k + w_{k+1} + \ldots + w_n,$$

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} U'_n = a_n + \varphi_{n-1,n} = 0, \quad \ldots, \quad U'_k = a_k + \ldots + a_n + \varphi_{k-1,k} = 0, \quad \ldots, \\ U'_1 = a_1 + \ldots + a_n + \varphi_{01} = 0. \end{array} \right.$$

Quand

$$a_k + \ldots + a_n \geq 0,$$

quel que soit k, le système (31) a toujours une solution acceptable; on détermine de proche en proche $z_1, \ldots, z_n$.

Deuxième cas. — On peut aussi traiter complètement le cas de deux réservoirs ($n = 2$). Pour tout système de valeurs de $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 + a_2 > 0$, il y a toujours un régime permanent.

TROISIÈME CAS. — Je suppose que S_k alimente exclusivement un ou plusieurs des réservoirs $S_{k-1}, \ldots, S_1$, *aucun des dispositifs de communication n'étant noyé :* alors $\varphi_{ki} = -\varphi_{ik}$ est ≥ 0 et ne dépend que de z_k, lorsque $k > i$. On a les équations

$$\Phi_k + \varphi_{k+1,k} + \ldots + \varphi_{nk} + a_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad a_k \geq 0,$$

où

$$\Phi_k = \varphi_{0k} + \varphi_{1k} + \ldots + \varphi_{k-1,k}$$

ne dépend que de z_k. Ces équations déterminent de proche en proche

$$z_n, \quad z_{n-1}, \quad \ldots, \quad z_1,$$

et la solution est toujours acceptable quand $z_1, \ldots, z_n$ satisfont à certaines inégalités. Par exemple, celles-ci seront, grâce au besoin à une numérotation convenable des réservoirs : 1° pour les liquides, sous des conditions évidentes pour les dispositifs,

$$z_n > z_{n-1} > \ldots > z_1 ;$$

2° pour n réservoirs de gaz maintenus à la température T_0 du milieu intérieur, la détente par les orifices étant adiabatique (§ III, n° 9)

$$\frac{z_j}{z_i} \leq \left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{\mu}{\mu - 1}}, \qquad \text{avec } \mu = 1,41\ldots$$

pour toute valeur de $j < i$; l'égalité (10) du paragraphe III s'appliquant, les équations du mouvement permanent sont linéaires par rapport aux pressions z_i.

VIII. — Des régimes voisins du régime permanent. Stabilité de ce régime. — Alimentation périodique.

18. Je vais m'appuyer dans ce qui suit sur quelques théorèmes relatifs [1] aux systèmes d'équations différentielles et implicites signalés par moi dans les *Comptes rendus* du 19 juillet 1909 (p. 198), et dont je ne donne pas la démonstration ici. Ce sont les théorèmes mentionnés

---

[1] Il sera bon de se reporter à ce sujet au Tome III du *Traité d'Analyse* de M. E. Picard, et à la traduction d'un Mémoire russe de M. P. Bohl parue dans le *Bull. Soc. math.*, t. XXXVIII, 1910, p. 5 et suiv.

sous les nos I, II et III de cette Communication, et dont les deux premiers peuvent être complétés comme il est dit ci-après :

1° La propriété des solutions des systèmes d'équations différentielles et implicites considérées indiquée sous le n° I s'étend aux solutions des systèmes analogues obtenus en ajoutant aux X_i, où $F_i = 0$, quel que soit i, de petites fonctions $\psi_i(t)$, de modules assez petits pour $t \geq 0$, et qui tendent vers 0, quand t croît indéfiniment.

Si les fonctions $\psi_i(t)$ ne tendent pas toutes vers 0 lorsque t croît indéfiniment, mais conservent des modules suffisamment petits lorsque $t \geq 0$, on conclut seulement que les x_k et les x'_k ont leurs modules toujours inférieurs à une quantité arbitrairement petite pour $t \geq 0$.

2° La propriété des systèmes d'équations différentielles et implicites considérées indiquée sous le n° II peut se préciser ainsi : pour chaque valeur réelle de μ de module assez petit, chacun de ces systèmes possède une solution périodique unique de période ω, quand l'équation caractéristique $\delta = 0$ n'a aucune racine de la forme

$$\frac{2\lambda\pi i}{\omega},$$

où λ est un entier quelconque, positif, nul ou négatif. Cette solution périodique est développable en séries ordonnées suivant les puissances de μ et à coefficients périodiques de période ω.

Je désignerai par (I, *C. R.*), (II, *C. R.*), (III, *C. R.*) les théorèmes en question ainsi complétés.

19. Ceci posé, soit encore le système mixte d'équations différentielles et implicites (2) du paragraphe III,

$$(32) \qquad w'_i = S_i z'_i = \varphi_{0i} + \varphi_{1i} + \ldots + \varphi_{ni} + a_i = f_i + a_i,$$

relatives au mouvement d'un système de réservoirs, et où les φ_{0i}, φ_{ki} sont univalentes dans le domaine considéré δ_1, qui appartient à un des domaines définis à propos de (23) (n° **15**).

Soient

$$z_i = \zeta_i \qquad (\zeta_i \text{ const.})$$

une solution permanente correspondant à un régime permanent a_i^0 ;

$$z_i = \zeta_i + \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

une solution quelconque, avec $|\eta_i|$ assez petit, et qui correspond à une petite variation δa_i de l'alimentation, δa_i pouvant être fonction du temps; on suppose la solution ζ_i comprise dans δ_1.

Je désigne par σ_i la valeur de S_i quand $z_i = \zeta_i$; on aura, d'après (23), les relations [1]

$$(\sigma_i + S_i'\eta_i + \ldots)\eta_i' = \delta a_i + B_{1i}\eta_1 + \ldots + B_{ni}\eta_n + \ldots,$$

où les B_{ki} satisfont à (26) (hypothèses C). En outre, je conserve ici les hypothèses et la classification des réservoirs du n° **16** du paragraphe VII : les B_{ki}, d'après (23) et (26), satisfont aux conditions (1) du paragraphe V, et, aussi, aux conditions de l'alinéa 2 du théorème II de ce même paragraphe; ce dernier théorème et ses conséquences s'appliquent ainsi au déterminant des B_{ki}, c'est-à-dire au jacobien des f_i pour

$$\eta_1 = \ldots = \eta_n = 0;$$

ce jacobien est différent de zéro et du signe de $(-1)^n$.

Les équations différentielles et implicites précédentes donneront, en résolvant par rapport aux η_i' le nouveau système,

$$(33) \qquad \sigma_i\eta_i' = \delta a_i + B_{1i}\eta_1 + \ldots + B_{ni}\eta_n + V_i,$$

où les V_i sont des séries en $\delta a_i, \eta_1, \ldots, \eta_n$ ne contenant que des termes qui sont du deuxième degré au moins par rapport à ces $n+1$ quantités, et renferment chacun un ou plusieurs des $\eta_1, \ldots, \eta_n$.

Dès lors, si l'on suppose que les δa_i sont des fonctions de t limitées supérieurement et inférieurement, par exemple des fonctions périodiques, le système (33) a des analogies avec les systèmes considérés dans ma Communication précitée des *Comptes rendus*. L'équation caractéristique est

$$\delta = \begin{vmatrix} B_{11} - \sigma_1 x & \ldots & B_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ B_{1n} & \ldots & B_{nn} - \sigma_n x \end{vmatrix} = 0.$$

du type des équations (11) du corollaire III du théorème II du paragraphe V : le deuxième alinéa de ce corollaire s'applique. On en conclut ces conséquences, en n'envisageant que des valeurs de $t > 0$:

[1] Bien entendu, on suppose les développements en série possibles, au moins quand les $|\eta_i|$ sont assez petits.

1° Soit

$$\delta a_1 = \delta a_2 = \ldots = \delta a_n = 0.$$

Les équations (33) sont celles des petites perturbations du régime permanent. Les seconds membres de ces équations ne renferment plus les δa_i. D'après (I, *C. R.*), chaque fois que l'équation caractéristique a ses racines toutes réelles < 0, ou toutes distinctes avec partie réelle < 0, les η_i tendent vers 0 quand t croît indéfiniment, et le régime permanent est stable, pourvu que les valeurs initiales des $\eta_i = z_i - \zeta_i$ aient leurs modules assez petits : le régime est alors asymptotiquement permanent.

2° Si les δa_i sont des fonctions de t de modules suffisamment petits quel que soit $t > 0$, et qui tendent vers 0 quand t croît indéfiniment, on peut les représenter par

$$\delta a_i = \mu \psi_i(t),$$

où μ est un paramètre, et où le module de $\psi_i(t)$ est limité et tend vers 0 quand t croît indéfiniment; si $|\mu|$ et les $|\delta a_i|$ sont assez petits, sous les mêmes conditions relatives à l'équation caractéristique $\delta = 0$, d'après (I, *C. R.*), le régime est encore asymptotiquement permanent : une alimentation assez peu différente d'une alimentation permanente, et asymptotiquement permanente, assure un régime asymptotiquement permanent.

Si les δa_i, tout en ayant leurs modules assez petits, plus petits que α par exemple, ne tendent pas forcément vers 0 avec t^{-1}, d'après (I, *C. R.*), on conclura seulement : une alimentation sensiblement permanente assure un régime sensiblement permanent. De plus, la rapidité de variation des z_k peut être rendue aussi petite qu'on veut pourvu que α soit pris assez petit.

3° Soit

$$\delta a_i = \mu f_i(t),$$

où les $f_i(t)$ sont périodiques et de même période ω, et limités supérieurement et inférieurement, et où μ est un paramètre.

D'après (III, *C. R.*), chaque fois que l'équation caractéristique $\delta = 0$ a ses racines toutes réelles < 0, ou toutes distinctes avec partie réelle < 0, pour chaque valeur de μ de module assez petit, il existe un régime périodique de période ω, et toutes les solutions réelles de (33)

dont les valeurs initiales ont des modules assez petits sont asymptotiquement périodiques de période ω, et asymptotiques à la solution périodique.

On peut encore, d'après (II, *C. R.*), affirmer l'existence d'une solution périodique de période ω quand l'équation $\delta = 0$ n'a aucune racine qui soit une imaginaire pure.

Il y a intérêt à observer que les conclusions 1° et 2° ci-dessus restent vraies si l'on suppose que les coefficients, à partir de B_{ii}, des développements des seconds membres de (33) dépendent légèrement de t, d'après (I, *C. R.*) : il suffira de mettre chaque coefficient sous la forme $a + \mu\chi(t)$, où a est une constante, $\chi(t)$ une fonction à module limité, et de supposer $|\mu|$ assez petit.

20. L'application des remarques précédentes 1°, 2° et 3° est subordonnée seulement à la vérification de la nature des racines de l'équation caractéristique du système (33), généralement à la vérification de ce fait que cette équation $\delta = 0$ a ses racines toutes réelles < 0, ou toutes distinctes avec partie réelle < 0. Je vais indiquer quelques cas où l'on est certain que ces dernières conditions ont lieu, en me basant principalement sur le paragraphe V, et supposant encore, ce qui est permis, que les dispositifs de communication satisfassent aux conditions du n° **16**, c'est-à-dire que, pour chaque valeur de k, il y ait une valeur de $i < k$ telle que B_{ik} soit > 0.

Premier cas. — *Cas de deux ou trois réservoirs.* — Le système (33) devient, pour deux réservoirs par exemple,

$$\sigma_1\eta_1' = \delta a_1 + B_{11}\eta_1 + B_{21}\eta_2 + V_1, \qquad \sigma_2\eta_2' = \delta a_2 + B_{12}\eta_1 + B_{22}\eta_2 + V_2;$$

l'équation caractéristique

$$\delta = \begin{vmatrix} B_{11} - \sigma_1 x & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} - \sigma_2 x \end{vmatrix} = 0,$$

est du type considéré au théorème IV du paragraphe V. Les B_{ki} satisfont, d'après (26) (n° **15**), aux conditions de l'alinéa 2 du théorème II du même paragraphe, en sorte que les racines de $\delta = 0$ sont réelles et < 0.

La démonstration pour trois réservoirs résulte de la remarque qui suit le corollaire du théorème III du paragraphe V.

DEUXIÈME CAS. — *Cas particulier de n réservoirs.* — Le cas précédent de deux réservoirs est renfermé dans le suivant : S_n communique effectivement avec S_{n-1} seul, ..., S_k avec S_{k-1} et S_{k+1} seuls, ..., S_1 avec S_2 ; de plus, chacun des réservoirs peut avoir un exutoire externe qui fonctionne. Les équations (33) deviennent, puisqu'ici les B_{ki} et φ_{ki} sont nuls pour $|i-k|>1$, sauf peut-être B_{k0} et φ_{0k}:

$$(34)\qquad \begin{cases} \sigma_k\eta'_k = \delta a_k + B_{k-1,k}\eta_{k-1} + B_{k,k}\eta_k + B_{k+1,k}\eta_{k+1} + V_k, \\ B_{01}=0, \qquad B_{n+1,n}=0. \end{cases}$$

Le théorème IV du paragraphe V s'applique encore ; d'après (26) (n° **15**), les racines de $\delta=0$ sont réelles et <0.

TROISIÈME CAS. — J'envisage, en partie pour mémoire, le système de réservoirs déjà considéré au n° **17** (troisième cas) du paragraphe VII. D'après les égalités (23) (n° **15**) de ce paragraphe, on a

$$B_{ik}=\frac{\partial\varphi_{ik}}{\partial z_i}=0.$$

quand $k>i$; d'après (26), n° **15**, l'équation caractéristique se réduit à

$$(B_{11}-\sigma_1 x)\ldots(B_{nn}-\sigma_n x)=0$$

et a toutes ses racines négatives <0.

QUATRIÈME CAS. — *Cas général des réservoirs d'eau, d'eau et gaz, de chaleur, sous certaines conditions pour les dispositifs de communication.*

Si l'on se reporte, dans le paragraphe III, aux équations (5) et (6) du n° **7** relatives au débit d'un ajutage noyé ou d'un siphon noyé, (7) du n° **8** relative au débit de chaleur d'un fil conducteur reliant deux réservoirs, (15) du n° **10** relative au débit d'eau d'un orifice noyé reliant deux réservoirs d'eau et gaz, on voit que ce débit peut toujours se mettre sous la forme

$$\varphi_{ki}=F(z_k-z_i).$$

si l'on choisit convenablement les quantités caractéristiques dans le cas des équations (15) du n° **10** ; c'est-à-dire qu'ici pour ces dernières équations, changeant la notation, on écrit z_k, z_i au lieu de Z_k, Z_i [1].

---

[1] Ces dernières quantités sont alors des niveaux piézométriques. On peut

On a alors, d'après (23) (n° **15**), si φ_{ki} n'est pas identiquement nul, et si l'on suppose *tous* les dispositifs de communication des réservoirs entre eux noyés,

$$\frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial z_k} = \mathrm{B}_{ki} = -\frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial z_i} = \mathrm{B}_{ik}.$$

Suivant les cas,

$$\varphi_{ki} = m(z_k - z_i), \qquad \text{ou} \qquad \varphi_{ki} = m_1\sqrt{\pm(z_k - z_i)}.$$

m et m_1 étant constants si l'on veut; mais il sera plus exact de supposer que m et m_1 sont des fonctions très lentement variables de z_k et de z_i, ou même, avec certaines conditions, de t (*voir* la fin des n^{os} **7** et **19**).

Avec ces hypothèses, dans les équations (33) correspondant aux systèmes considérés ici,

$$\mathrm{B}_{ki} = \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial \zeta_k} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}_{ik} = -\frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial \zeta_i}$$

sont tels que leur rapport

$$\frac{\mathrm{B}_{ki}}{\mathrm{B}_{ik}} = 1 + \varepsilon_{ik}$$

diffère peu de l'unité.

D'autre part, quand au contraire φ_{ki} est identiquement nul dans le domaine envisagé, on a

$$\mathrm{B}_{ki} = \mathrm{B}_{ik} = 0.$$

Si chacun des B_{ki} (k et $i > 0$) satisfait à une de ces deux conditions, et si les $|\varepsilon_{ik}|$ sont assez petits, on peut appliquer le théorème III du paragraphe V et son corollaire. Quand les $|\varepsilon_{ik}|$ sont tous nuls, l'équation caractéristique $\delta = 0$ a ses racines réelles < 0, d'après ce qu'on a supposé au n° **19** (p. 227). Quand ils ne sont pas tous nuls, s'ils sont assez petits par rapport à la plus petite de celles des quantités $|\mathrm{B}_{mn}|$ qui sont différentes de zéro, les racines de l'équation caractéristique ont leurs parties réelles < 0; en général [1] même, ces racines seront réelles, distinctes et plus petites que zéro, et les résultats du n° **19** sont applicables.

évidemment admettre dans le quatrième cas l'intervention des réservoirs fictifs, d'après le n° **8** et la note (1) de la fin du n° **10**.

[1] C'est là une réserve qu'exige l'emploi du corollaire du théorème III du paragraphe V.

Sur les mineurs de la fonction déterminante de Fredholm et sur les systèmes d'équations intégrales linéaires;

Par Ch. **PLATRIER**.

INTRODUCTION.

L'équation intégrale linéaire

$$a(x)\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^{\beta} b(x,s)\,\varphi(s)\,ds = c(x), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue; $a(x)$, $b(x,s)$, $c(x)$ des fonctions bornées et intégrables dans le domaine $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $\alpha \leqq s \leqq \beta$; α, β, λ des constantes, se rencontre fréquemment, en Mécanique et en Physique mathématique, sous une forme plus ou moins explicite.

C'est Abel qui, pour la première fois, en 1826, posa et résolut une équation particulière de ce type. Mais trois quarts de siècle devaient s'écouler avant que le problème en question fût nettement posé.

En 1894, M. J. Le Roux ([1]) proposait de trouver une fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à l'équation

$$\int_{\alpha}^{x} b(x,s)\,\varphi(s)\,ds = c(x) \tag{2}$$

et résolvait cette question par la méthode des approximations successives.

([1]) J. Le Roux, Thèse : *Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes*, p. 19.

Le problème de M. Le Roux était repris par M. V. Volterra [1] en 1896. L'équation (2) est d'ailleurs devenue classique sous le nom d'*équation de Volterra*.

C'est seulement en 1903 que M. Ivar Fredholm [2], dans son remarquable Mémoire *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, étudia l'équation (1) pour $a(x) = 1$, équation à laquelle il fut conduit par l'étude du problème de Dirichlet, lorsqu'on cherche à représenter le potentiel inconnu par le potentiel de double couche.

Les résultats essentiels de M. Fredholm eurent un universel retentissement. M. Picard en a fait cet incomparable éloge : « Ils avaient la beauté des choses simples et définitives [3]. »

M. Fredholm a induit, de la solution d'un système d'équations linéaires en nombre fini, la solution du problème transcendant traduit par l'équation (1). Il a ensuite, par une méthode synthétique, vérifié l'exactitude de son induction dans le cas des équations de seconde espèce, c'est-à-dire quand $a(x)$ peut être supposé égal à l'unité.

M. Fredholm met ainsi en évidence le rôle que joue dans la résolution de (1) une certaine fonction entière $D(\lambda)$, qu'il appelle *fonction déterminante* par analogie avec le déterminant des coefficients d'un système d'équations linéaires en nombre fini. Il définit ensuite les mineurs de la déterminante et associe à la fonction dite *noyau* $b(x, s)$, une fonction $b(x, s, \lambda)$, méromorphe en λ, dite *résolvante*, dont la connaissance permet de résoudre l'équation (1) quand $a(x) = 1$.

Aussitôt après l'apparition du Mémoire de M. Fredholm, un grand nombre de géomètres apportèrent leur contribution à l'étude de l'équation (1). Les travaux sur ce sujet se sont succédé depuis sans interruption.

Nous citerons seulement ceux dont nous utiliserons les résultats dans la suite :

M. D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linea-*

---

[1] V. Volterra, *Sulla inverzione degli integrali definiti* (*Atti della reale Accademia delle Scienze di Torino*, 8 mars, 26 avril 1896, p. 311, 400, 557, 693).

[2] I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (*Acta mathematica*, t. XXVII, 1903).

[3] T. Lalesco, *Introduction à la théorie des intégrales* (Préface de M. E. Picard, 1912).

ren Integralgleichungen (*Göttings Nachrichten*, 1, 2, 3, 4, 5, 6 Mitteilung), a montré la légitimité de la hardie induction de Fredholm, étudié spécialement le noyau $b(x, s)$, symétrique en x et s, et mis en évidence l'analogie entre l'étude des noyaux et l'étude des formes bilinéaires et quadratiques.

MM. E. Goursat, *Recherches sur les équations intégrales linéaires* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1908); Bryon Heywood, *Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm* (Thèse), et T. Lalesco, *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXXIX, 1911, p. 95), ont fait l'étude détaillée des noyaux et des résolvantes. M. Goursat, notamment, a mis en évidence la notion de fonction principale et les propriétés caractéristiques de ces fonctions.

M. E. Picard, *Sur les équations intégrales de troisième espèce* (*Annales de l'École Normale*, 1911), a établi d'importants théorèmes généraux concernant les équations intégrales de troisième espèce, c'est-à-dire celles pour lesquelles $a(x)$ est nul pour des valeurs particulières de x comprises entre α et β.

H. Poincaré, dans ses *Remarques diverses sur l'équation de Fredholm* (*Acta mathematica*, t. XXXIII, 1909), s'est occupé en particulier de mettre en évidence quelles différences il y a, en ce qui concerne les équations intégrales linéaires de première espèce, entre le cas où les limites α, β sont infinies et celui où elles sont finies; à ce propos, il a étudié (p. 81) certaines équations intégrales linéaires de seconde espèce à limites infinies, dont M. E. Picard, *Sur une équation fonctionnelle du type de Fredholm* (*Comptes rendus*, 13 octobre 1910), a signalé d'importantes particularités.

Le présent travail comprend deux Parties.

Dans la première Partie, nous nous sommes proposé de compléter l'étude de la déterminante et de la résolvante d'un noyau donné par l'étude des propriétés des mineurs de la déterminante. Nous avons exprimé algébriquement un mineur d'ordre quelconque en fonction de la déterminante et de la résolvante et mis en évidence le rôle des diviseurs élémentaires de la déterminante; l'analogie entre l'étude des formes bilinéaires et l'étude des noyaux trouve une nouvelle confirmation dans l'interprétation des exposants de ces diviseurs élémentaires.

La seconde Partie a pour objet l'étude des systèmes d'équations intégrales linéaires

$$(3)\quad \sum_{\nu=1}^{\nu=m}\left[a_{\mu\nu}(x)\,\varphi_\nu(x)-\lambda\int_\alpha^\beta b_{\mu\nu}(x,s)\,\varphi_\nu(s)\,ds\right]=c_\mu(x)\qquad(\mu=1,2,\ldots,m),$$

où $\varphi_\nu(x)$ sont des fonctions inconnues; $a_{\mu\nu}(x)$, $b_{\mu\nu}(x,s)$, $c_\mu(x)$ des fonctions bornées et intégrables dans le domaine $\alpha\leqq x\leqq\beta$, $\alpha\leqq s\leqq\beta$; α, β, λ des constantes et m un entier positif.

Nous étudierons spécialement les systèmes de deuxième et de troisième espèce, c'est-à-dire ceux pour lesquels le déterminant

$$(4)\qquad A(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1m}(x)\\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ a_{m1}(x) & \ldots & a_{mm}(x)\end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul dans l'intervalle $\alpha\leqq x\leqq\beta$.

Dans le cas où $A(x)$ ne s'annule pas entre α et β et peut être supposé égal à l'unité, le système (3) est dit de seconde espèce. M. Fredholm a montré, dans son Mémoire fondamental, qu'on peut le ramener à une équation unique. Cette remarque, jointe à l'expression algébrique des mineurs en fonction de la déterminante et de la résolvante, nous permettra de discuter complètement l'existence des solutions du système de seconde espèce et de donner ces solutions le cas échéant.

La résolution des systèmes de seconde espèce sans second membre trouve une application naturelle dans la recherche des fonctions principales d'un noyau, telles qu'elles ont été définies par M. Goursat. Dans le quatrième Chapitre, nous donnerons l'expression générale de ces fonctions.

La méthode suivie par Fredholm pour réduire un système de seconde espèce à une équation unique s'applique aux systèmes de troisième espèce et conduit à faire, corrélativement à l'étude de ces systèmes, celle de l'équation intégrale linéaire de troisième espèce du type (1). Supposant que les limites α, β comprennent le point $x=a$, nous nous occuperons spécialement du cas où $a(x)=(x-a)^p$, en nous plaçant au point de vue de M. E. Picard [1]. Nous rattacherons

[1] E. Picard, *Annales de l'École Normale*, 1911. Mémoire déjà cité.

à ce cas l'étude, dans le domaine complexe, d'une classe particulière d'équations intégrales de deuxième espèce du type

$$(z-a)^p[\varphi(z)-c(z)] = \lambda \int_{\Lambda} b(z,t)\varphi(t)\,dt,$$

où p est entier et Λ un contour complexe ne passant pas par le point a; cette classe a déjà été considérée par M. T. Lalesco ([1]), quand $p=1$.

Nous terminerons cette seconde Partie par deux Notes. Dans une première, nous appliquerons les résultats précédents à certaines équations intégro-différentielles, notamment à une classe étudiée par M. Boutnisky ([2]). Dans une seconde, nous achèverons succinctement la discussion du système (3), en résumant les principales particularités qui se présentent quand $A(x)$ est identiquement nul.

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE.

FONCTION DÉTERMINANTE ET FONCTION RÉSOLVANTE D'UN NOYAU DONNÉ. LEURS PRINCIPALES PROPRIÉTÉS.

Afin de ne pas renvoyer à des Ouvrages écrits avec des notations variées et à des points de vue différents, nous résumerons tout d'abord les résultats antérieurs essentiels concernant la fonction déterminante et la fonction résolvante d'un noyau $H(x, y)$.

1. Nous supposerons que l'on a choisi les limites d'intégration α et β égales respectivement à 0 et 1, et nous désignerons par $D(\lambda)$ et

---

([1]) T. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, 1912. Ouvrage déjà cité.

([2]) Boutnisky, *Sur une classe d'équations intégrales* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1908).

$D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\lambda\Bigg)$ les séries entières en λ,

$$(5)\qquad D(\lambda) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^{\varpi}}{\varpi!} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \ldots \int_0^1 ds_{\varpi}\, H\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \end{pmatrix},$$

$$(6)\qquad D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, x_q \end{matrix}\middle| \lambda\right) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^{\omega}}{\varpi!} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \ldots \int_0^1 ds_{\varpi}\, H\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q; s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ y_1, y_2, \ldots, y_q; s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \end{pmatrix},$$

$H\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \end{pmatrix}$ représentant le déterminant

$$\begin{vmatrix} H(s_1, t_1) & H(s_1, t_2) & \ldots & H(s_1, t_n) \\ H(s_2, t_2) & H(s_2, t_2) & \ldots & H(s_2, t_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ H(s_n, t_1) & H(s_n, t_2) & \ldots & H(s_n, t_n) \end{vmatrix}.$$

$D(\lambda)$ est la *fonction déterminante* relative au noyau $H(x, y)$ supposé fini et intégrable en x et y dans le domaine $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| \lambda\right)$ est le *mineur d'ordre q* de cette fonction déterminante.

D'une part, Fredholm a montré que la fonction déterminante $D(\lambda)$ et son mineur du premier ordre $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right)$ satisfont aux relations caractéristiques

$$(7)\qquad \begin{cases} D(0) = 1, & (7') \\ -\dfrac{dD(\lambda)}{d\lambda} = \displaystyle\int_0^1 D\left(\begin{matrix} s \\ s \end{matrix}\middle| \lambda\right) ds, & (7'') \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right) - H(x, y)D(\lambda) = \lambda \displaystyle\int_0^1 H(x, s)\, D\left(\begin{matrix} s \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right) ds, & (8') \\ \qquad = \lambda \displaystyle\int_0^1 H(s, y)\, D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle| \lambda\right) ds. & (8'') \end{cases}$$

D'autre part, Fredholm a établi :

1° Que si $D(\lambda) \neq 0$, ce que nous exprimerons en disant que λ n'est

pas un nombre fondamental, l'équation intégrale linéaire

$$(9) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 H(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x),$$

où $f(x)$ est donnée, finie et intégrable dans le domaine $0 \leq x \leq 1$, λ un paramètre donné et $\varphi(x)$ inconnue, admet une solution unique

$$(10) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \mathcal{H}(x, s, \lambda)\, f(s)\, ds.$$

$\mathcal{H}(x, y, \lambda)$ étant la fraction

$$(11) \qquad \mathcal{H}(x, y, \lambda) = \frac{D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda \Big)}{D(\lambda)}.$$

Il résulte des relations (8) que la fonction $\mathcal{H}(x, y, \lambda)$, dite *résolvante* du noyau $H(x, y)$, satisfait aux deux relations

$$(12) \qquad \begin{cases} -H(x, y) + \mathcal{H}(x, y, \lambda) = \lambda \displaystyle\int_0^1 H(x, s)\, \mathcal{H}(s, y, \lambda)\, ds, & (12') \\ \qquad = \lambda \displaystyle\int_0^1 H(s, y)\, \mathcal{H}(x, s, \lambda)\, ds. & (12'') \end{cases}$$

2° Que si, pour $\lambda = c$, $D(\lambda)$ est nul ainsi que tous ses mineurs d'ordre $q-1$, son mineur d'ordre q étant différent de zéro, ce que nous exprimerons en disant que c est *nombre fondamental de genre* q, les équations intégrales linéaires homogènes

$$(13) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 H(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0,$$

$$(14) \qquad \psi(y) - \lambda \int_0^1 H(s, y)\, \psi(s)\, ds = 0,$$

dites *associées*, admettent respectivement les q solutions indépendantes

$$(15) \quad \varphi(x) = \Phi_\theta(x) = \frac{D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{\theta-1}, x, x_{\theta+1}, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_q \end{matrix} \middle| c\right)}{D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_q \end{matrix} \middle| c\right)} \quad (\theta = 1, 2, \ldots, q)$$

et

$$(16)\quad \psi(x) = \Psi_\theta(y) = \frac{D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_{\theta-1}, y, y_{\theta+1}, \ldots, y_q \end{pmatrix} c}{D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_q \end{pmatrix} c} \quad (\theta = 1, 2, \ldots, q).$$

Les q solutions $\Phi_\theta(x)$ sont linéairement indépendantes, et il n'y a pas d'autre solution indépendante des q précédentes pour l'équation (13) et la valeur c de λ. Ces solutions sont appelées *solutions fondamentales* relatives au point c.

3° Que, pour $\lambda = c$, nombre fondamental de genre q, l'équation (9) n'a pas, en général, de solution; les conditions nécessaires et suffisantes pour que des solutions existent sont les q conditions

$$(17)\qquad \int_0^1 \Psi_\theta(s) f(s)\, ds = 0 \qquad (\theta = 1, 2, \ldots, q).$$

Ces conditions supposées remplies, toutes les solutions de l'équation (9) pour $\lambda = c$ sont définies par l'égalité

$$(18)\qquad \varphi(x) = f(x) + c\int_0^1 K(x, s) f(s)\, ds + \sum_{\theta=1}^{\theta=q} a_\theta \Phi_\theta(x),$$

où $K(x, y)$ désigne la fonction

$$(19)\qquad K(x, y) = \frac{D\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y, y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix} c}{D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots\ldots, y_q \end{pmatrix} c}$$

et où les a_θ sont q constantes arbitraires.

2. L'étude des noyaux $H(x, y)$ et de leurs résolvantes a été faite par MM. Goursat [1] et Bryon Heywood [1], et complétée par M. Lalesco [1]. Rappelons les principaux résultats de cette étude.

Deux noyaux, $H(x, y)$ et $K(x, y)$, sont dits *orthogonaux* s'ils satisfont aux deux conditions

$$(20)\qquad \int_0^1 H(x, s)\, K(s, y)\, ds = \int_0^1 H(s, y)\, K(x, s)\, ds = 0.$$

[1] Mémoires déjà cités.

Première proposition. — Si un noyau $H(x,y)$ donné est la somme de plusieurs noyaux composants orthogonaux deux à deux : 1° la fonction déterminante du noyau $H(x,y)$ est le produit des fonctions déterminantes des noyaux composants; 2° la fonction résolvante du noyau $H(x,y)$ est la somme des fonctions résolvantes des noyaux composants.

Deuxième proposition. — Désignons par $h_c(x,y,\lambda)$ la partie de la fonction méromorphe $\mathcal{H}(x,y,\lambda)$, résolvante du noyau $H(x,y)$, qui devient infinie pour $\lambda = c$, et soient c_1 et c_2 deux nombres fondamentaux du noyau $H(x,y)$. On peut poser

$$\mathcal{H}(x,y,\lambda) = h_{c_1}(x,y,\lambda) + h_{c_2}(x,y,\lambda) + h(x,y,\lambda).$$

Les noyaux $h_{c_1}(x,y,0)$, $h_{c_2}(x,y,0)$, $h(x,y,0)$ sont orthogonaux entre eux deux à deux et admettent comme résolvantes respectives $h_{c_1}(x,y,\lambda)$, $h_{c_2}(x,y,\lambda)$, $h(x,y,\lambda)$.

Les deux propositions ci-dessus montrent qu'on peut étudier séparément la partie du noyau $h_c(x,y,0)$ et la partie de la résolvante $h_c(x,y,\lambda)$, relatives au nombre fondamental c.

Soit c un nombre fondamental de genre q annulant p fois $D(\lambda)$. $h_c(x,y,\lambda)$ peut être considérée comme la somme de q fonctions

$$(21)\qquad h_c^{(\theta)}(x,y,\lambda) = \frac{\varphi_{n_\theta}^{(\theta)}(x,y)}{(c-\lambda)^{n_\theta}} + \frac{\varphi_{n_\theta-1}^{(\theta)}(x,y)}{(c-\lambda)^{n_\theta-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1^{(\theta)}(x,y)}{c-\lambda} \qquad (\theta = 1, 2, \ldots, q),$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n_\theta}$ étant définies à l'aide des constantes arbitraires $a_i^{(\theta)}$ par les relations

$$(22)\qquad \begin{cases} \varphi_1^{(\theta)}(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n_\theta} \alpha_i^{(\theta)}(x)\,\beta_i^{(\theta)}(y), \\ \varphi_2^{(\theta)}(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n_\theta-1} a_i^{(\theta)}\,\alpha_i^{(\theta)}(x)\,\beta_{i+1}^{(\theta)}(y), \\ \varphi_3^{(\theta)}(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n_\theta-2} a_i^{(\theta)}\,a_{i+1}^{(\theta)}\,\alpha_i^{(\theta)}(x)\,\beta_{i+2}^{(\theta)}(y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n_\theta}^{(\theta)}(x,y) = a_1^{(\theta)}\,a_2^{(\theta)}\ldots a_{n_\theta-1}^{(\theta)}\,\alpha_1^{(\theta)}(x)\,\beta_{n_\theta}^{(\theta)}(y). \end{cases}$$

$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = p$ et les $2p$ fonctions $\alpha_i^{(\theta)}(x)$ et $\beta_i^{(\theta)}(y)$ qui existent, quel que soit le choix des constantes $a_i^{(\theta)}$, forment un système de fonctions biorthogonales.

$h_c^{(\theta)}(x, y, o)$ est dit *noyau canonique* d'ordre n_θ, $k_c^{\theta}(x, y, \lambda)$ *résolvante canonique* d'ordre n_θ correspondant à ce noyau.

De plus, la fonction déterminante du noyau $h_c^{(\theta)}(x, y, o)$ est $\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^{n_\theta}$.

Dans la première Partie de la présente étude, nous définirons les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_\theta$.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LES MINEURS DE LA FONCTION DÉTERMINANTE DE FREDHOLM.

CHAPITRE I.

EXPRESSION ALGÉBRIQUE DES MINEURS DE LA DÉTERMINANTE EN FONCTION DE LA DÉTERMINANTE ET DE LA RÉSOLVANTE.

5. Nous établirons tout d'abord une formule importante de la théorie des déterminants, formule qui sera une généralisation de la formule bien connue

$$P \frac{\partial^2 P}{\partial a_{r_1 s_1} \partial a_{r_2 s_2}} = \frac{\partial P}{\partial a_{r_1 s_1}} \frac{\partial P}{\partial a_{r_2 s_2}} - \frac{\partial P}{\partial a_{r_1 s_2}} \frac{\partial P}{\partial a_{r_2 s_1}}, \tag{23}$$

où P désigne le déterminant

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et r_1, r_2; s_1, s_2, deux combinaisons simples 2 à 2 des nombres 1, 2, ..., n.

La généralisation que nous avons en vue est la suivante : désignons par $P_{r_1, r_2, \ldots, r_q}^{s_1, s_2, \ldots, s_q}$ le déterminant obtenu en supprimant dans P les lignes r_1,

$r_2, \ldots, r_q$ et les colonnes $s_1, s_2, \ldots, s_q$; nous nous proposons d'établir la formule

$$(24)\quad \mathrm{P}\left[\mathrm{P}_{r_1, r_2, \ldots, r_q}^{s_1, s_2, \ldots, s_q}\right]^{q-1} = \begin{vmatrix} \mathrm{P}_{r_q, r_{q-1}, \ldots, r_2}^{s_q, s_{q-1}, \ldots, s_2} & \mathrm{P}_{r_q, r_{q-1}, \ldots, r_2}^{s_1, s_q, s_{q-1}, \ldots, s_3} & \ldots & \mathrm{P}_{r_q, r_{q-1}, \ldots, r_2}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \ldots, s_1} \\ \mathrm{P}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \ldots, r_3}^{s_q, s_{q-1}, \ldots, s_2} & \mathrm{P}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \ldots, r_3}^{s_1, s_q, s_{q-1}, \ldots, s_3} & \ldots & \mathrm{P}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \ldots, r_3}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \ldots, s_1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mathrm{P}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \ldots, r_1}^{s_q, s_{q-1}, \ldots, s_2} & \mathrm{P}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \ldots, r_1}^{s_1, s_q, s_{q-1}, \ldots, s_3} & \ldots & \mathrm{P}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \ldots, r_1}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \ldots, s_1} \end{vmatrix},$$

$r_1, r_2, \ldots, r_q$; $s_1, s_2, \ldots, s_q$ désignant deux combinaisons simples q à q des nombres 1, 2, ..., n.

La formule (23) peut s'écrire

$$(25)\qquad \mathrm{P} \times \mathrm{P}_{s_1, s_2}^{r_1, r_2} = \begin{vmatrix} \mathrm{P}_{r_2}^{s_2} & \mathrm{P}_{r_2}^{s_1} \\ \mathrm{P}_{r_1}^{s_2} & \mathrm{P}_{r_1}^{s_1} \end{vmatrix}$$

et n'est autre que la formule (24) dans le cas de $q = 1$.

Supposons donc la formule (24) vraie jusqu'à une certaine valeur de q et démontrons qu'elle est encore vraie pour la valeur $q + 1$.

Pour cela, prenons la dérivée des deux membres de (24) par rapport à $a_{r_{q+1} s_{q+1}}$, en supposant r_{q+1} différent des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_q$ et s_{q+1} différent des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_q$.

Nous obtenons, en multipliant les deux membres par $(-1)^{r_{q+1}+s_{q+1}}$,

$$\mathrm{P}(q-1)\left[\mathrm{P}_{r_1, r_2, \ldots, r_q}^{s_1, s_2, \ldots, s_q}\right]^{q-2} \mathrm{P}_{r_1, r_2, \ldots, r_{q+1}}^{s_1, s_2, \ldots, s_{q+1}} + \mathrm{P}_{r_{q+1}}^{s_{q+1}}\left[\mathrm{P}_{r_1, r_2, \ldots, r_q}^{s_1, s_2, \ldots, s_q}\right]^{q-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=q} \begin{vmatrix} \mathrm{P}_{r_q, r_{q-1}, \ldots, r_2}^{s_q, s_{q-1}, \ldots, s_2} & \ldots & \mathrm{P}_{r_q, r_{q-1}, \ldots, r_2}^{s_{i-2}, s_{i-3}, \ldots, s_1, s_q, \ldots, s_i} & \mathrm{P}_{r_{q+1}, r_q, r_{q-1}, \ldots, r_2}^{s_{i-1}, s_{i-2}, \ldots, s_1, s_{q+1}, s_q, \ldots, s_{i+1}} & \mathrm{P}_{r_q, r_{q-1}, \ldots, r_2}^{s_i, s_{i-1}, \ldots, s_1, s_q, \ldots, s_{i+2}} & \ldots & \mathrm{P}_{r_q, r_{q-1}, \ldots, r_2}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \ldots, s_1} \\ \mathrm{P}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \ldots, r_3}^{s_q, s_{q-1}, \ldots, s_2} & \ldots & \mathrm{P}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \ldots, r_3}^{s_{i-2}, s_{i-3}, \ldots, s_1, s_q, \ldots, s_i} & \mathrm{P}_{r_1, r_{q+1}, r_q, \ldots, r_3}^{s_{i-1}, s_{i-2}, \ldots, s_1, s_{q+1}, s_q, \ldots, s_{i+1}} & \mathrm{P}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \ldots, r_3}^{s_i, s_{i-1}, \ldots, s_1, s_q, \ldots, s_{i+2}} & \ldots & \mathrm{P}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \ldots, r_3}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \ldots, s_1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mathrm{P}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \ldots, r_1}^{s_q, s_{q-1}, \ldots, s_2} & \ldots & \mathrm{P}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \ldots, r_1}^{s_{i-2}, s_{i-3}, \ldots, s_1, s_q, \ldots, s_i} & \mathrm{P}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \ldots, r_1, r_{q+1}}^{s_{i-1}, s_{i-2}, \ldots, s_1, s_{q+1}, s_q, \ldots, s_{i+1}} & \mathrm{P}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \ldots, r_1}^{s_i, s_{i-1}, \ldots, s_1, s_q, \ldots, s_{i+2}} & \ldots & \mathrm{P}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \ldots, r_1}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \ldots, s_1} \end{vmatrix}.$$

D'une part, remarquons qu'en vertu de (24) on a

$$\mathrm{P}_{r_{q+1}}^{s_{q+1}}\left[\mathrm{P}_{r_1, r_2, \ldots, r_{q+1}}^{s_1, s_2, \ldots, s_{q+1}}\right]^{q-1} = \begin{vmatrix} \mathrm{P}_{r_{q+1}, r_q, \ldots, r_2}^{s_{q+1}, s_q, \ldots, s_2} & \ldots & \mathrm{P}_{r_{q+1}, r_q, \ldots, r_2}^{s_q, s_{q-1}, \ldots, s_1, s_{q+1}} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mathrm{P}_{r_q, r_{q-1}, \ldots, r_1, r_{q+1}}^{s_{q+1}, s_q, \ldots, s_2} & \ldots & \mathrm{P}_{r_q, r_{q-1}, \ldots, r_1, r_{q+1}}^{s_q, s_{q-1}, \ldots, s_1, s_{q+1}} \end{vmatrix}.$$

D'autre part, multiplions le terme général du second membre de (26) par $\left|\mathrm{P}_{s_1, s_2, \ldots, s_{q+1}}^{r_1, r_2, \ldots, r_{q+1}}\right|^{q-1}$. Pour cela, multiplions les $(i-1)$ premières colonnes et les $q-j$ dernières par ce déterminant à la première puissance en tenant compte de la formule (25).

Soit j le rang d'une des colonnes considérées, elle peut être rem-

placée par la colonne suivante :

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{P}^{s_{j-1},s_{j-2},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots\ldots\ldots,r_2}\,\mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_q,\ldots\ldots,r_2,r_1}-\mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_q,\ldots\ldots\ldots\ldots,r_2,r_1}\,\mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2},\\
\mathrm{P}^{s_{j-1},s_{j-2},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_1,r_{q+1},r_q,\ldots\ldots\ldots\ldots,r_3}\,\mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_1,r_q,\ldots\ldots,r_2}-\mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_1,r_q,\ldots\ldots\ldots,r_2}\,\mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_1,r_{q+1},\ldots\ldots,r_3},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{P}^{s_{j-1},s_{j-2},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots\ldots\ldots,r_1,r_{q+1}}\,\mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_q}-\mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots\ldots,r_1,r_q}\,\mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}}.
\end{array}\right.$$

Le déterminant du terme général du second membre de (26) ainsi multiplié peut alors être remplacé par 2^{q-1} déterminants partiels et tous ceux de ces déterminants partiels qui contiennent deux colonnes provenant des termes soustractifs des sommes (27) sont nuls comme ayant deux colonnes proportionnelles.

Le déterminant du terme général du second membre de (26) multiplié par $\left[\mathrm{P}^{s_1,s_2,\ldots,s_{q+1}}_{r_1,r_2,\ldots,r_{q+1}}\right]^{q-1}$ est donc finalement égal à la somme des q termes suivants :

1° Le produit

$$\left[\mathrm{P}^{s_1,s_2,\ldots,s_q}_{r_1,r_2,\ldots,r_q}\right]^{q-1}\begin{vmatrix}
\mathrm{P}^{s_{q+1},s_q,\ldots,s_2}_{r_{q+1},r_q,\ldots,r_2} & \ldots & \mathrm{P}^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2}\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathrm{P}^{s_{q+1},s_q,\ldots,s_2}_{r_{q-1},\ldots,r_1,r_{q+1}} & \ldots & \mathrm{P}^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}}
\end{vmatrix}.$$

2° Les $(q-1)$ produits

$$-\mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_q,r_{q-1},\ldots\ldots\ldots,r_1}\left[\mathrm{P}^{s_1,s_2,\ldots,s_q}_{r_1,r_2,\ldots,r_q}\right]^{q-2}\mathrm{A}_j$$

obtenus en faisant varier j de 1 à $i-1$ et de $i+1$ à q et où A_j représente le déterminant

$$\begin{vmatrix}
\mathrm{P}^{s_{q+1},s_q,\ldots,s_2}_{r_{q+1},r_q,\ldots,r_2} & \ldots & \mathrm{P}^{s_{j-2},\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_j}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2} & \mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2} & \mathrm{P}^{s_j,\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_{j+2}}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2} & \ldots & \mathrm{P}^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2}\\
\mathrm{P}^{s_{q+1},s_q,\ldots,s_2}_{r_1,r_{q+1},r_q,\ldots,r_3} & \ldots & \mathrm{P}^{s_{j-2},\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_j}_{r_1,r_{q+1},r_q,\ldots,r_3} & \mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_1,r_{q+1},r_q,\ldots,r_3} & \mathrm{P}^{s_j,\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_{j+2}}_{r_1,r_{q+1},r_q,\ldots,r_3} & \ldots & \mathrm{P}^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_1,r_{q+1},r_q,\ldots,r_3}\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathrm{P}^{s_{q+1},s_q,\ldots,s_2}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}} & \ldots & \mathrm{P}^{s_{j-2},\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_j}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}} & \mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}} & \mathrm{P}^{s_j,\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_{j+2}}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}} & \ldots & \mathrm{P}^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}}
\end{vmatrix}.$$

En vertu des remarques ci-dessus, la formule (26) peut s'écrire, après multiplication des deux membres par $\dfrac{\left[\mathrm{P}^{s_1,s_2,\ldots,s_{q+1}}_{r_1,r_2,\ldots,r_{q+1}}\right]^{q-1}}{(q-1)\left[\mathrm{P}^{s_1,s_2,\ldots,s_q}_{r_1,r_2,\ldots,r_q}\right]^{q-2}}$,

$$\mathrm{P}\left[\mathrm{P}^{s_1,s_2,\ldots,s_{q+1}}_{r_1,r_2,\ldots,r_{q+1}}\right]^{q+1}=\mathrm{P}^{s_1,s_2,\ldots,s_q}_{r_1,r_2,\ldots,r_q}\begin{vmatrix}
\mathrm{P}^{s_{q+1},s_q,\ldots\ldots,s_2}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2} & \ldots & \mathrm{P}^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathrm{P}^{s_{q+1},s_q,\ldots\ldots,s_2}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}} & \ldots & \mathrm{P}^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}}
\end{vmatrix}$$

$$-\sum_{j=1}^{j=q}\left[\mathrm{P}^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_{j+1}}_{r_q,r_{q-1},\ldots\ldots\ldots,r_1}\right]\mathrm{A}_j.$$

Cette égalité n'est autre que l'égalité déduite de (24) en remplaçant q par $q+1$ et développant le déterminant du second membre par rapport à sa dernière ligne.

L'égalité (24) est donc générale. C. Q. F. D.

4. Nous nous proposons d'appliquer la formule précédente à la fonction déterminante $D(\lambda)$ d'un noyau $H(x, y)$ et à ses mineurs.

Auparavant, nous reprendrons la démonstration d'un théorème dû à Hilbert [1].

Supposons $|H(xy)|$ moindre que M et considérons les déterminants :

$$\Delta_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{3}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{n}{n}\right) \\ \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right) & 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{2}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{n}{n}\right) \\ \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{3}{n},\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{3}{n},\frac{2}{n}\right) & 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{3}{n},\frac{3}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{3}{n},\frac{n}{n}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{2}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{3}{n}\right) & \cdots & 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{n}{n}\right) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$$

$$= \begin{vmatrix} H(x_1,y_1) & H(x_1,y_2) & \cdots & H(x_1,y_q) & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_1,\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_1,\frac{2}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_1,\frac{n}{n}\right) \\ H(x_2,y_1) & H(x_2,y_2) & \cdots & H(x_2,y_q) & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_2,\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_2,\frac{2}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_2,\frac{n}{n}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H(x_q,y_1) & H(x_q,y_2) & \cdots & H(x_q,y_q) & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_q,\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_q,\frac{2}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_q,\frac{n}{n}\right) \\ H\left(\frac{1}{n},y_1\right) & H\left(\frac{1}{n},y_2\right) & \cdots & H\left(\frac{1}{n},y_q\right) & 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{n}{n}\right) \\ H\left(\frac{2}{n},y_1\right) & H\left(\frac{2}{n},y_2\right) & \cdots & H\left(\frac{2}{n},y_q\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right) & 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{2}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{n}{n}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H\left(\frac{n}{n},y_1\right) & H\left(\frac{n}{n},y_2\right) & \cdots & H\left(\frac{n}{n},y_q\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{2}{n}\right) & \cdots & 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{n}{n}\right) \end{vmatrix}.$$

[1] HILBERT, *Mémoire* déjà cité (Erste Mitteilung).

THÉORÈME. — *Lorsque n entier croît indéfiniment $\Delta_n(\lambda)$ et*

$$\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$$

tendent respectivement vers $D(\lambda)$ *et*

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right).$$

Développons en effet les déterminants $\Delta_n(\lambda)$ et $\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ par rapport aux puissances croissantes de λ; on obtient

$$\Delta_n(\lambda) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=n}\left(\frac{-\lambda}{n}\right)^{\varpi}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\varpi}^{1 \text{ à } n}\frac{1}{\varpi!}\begin{vmatrix} H\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}\right) & \cdots & H\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ H\left(\frac{i_2}{n}, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(\frac{i_2}{n}, \frac{i_2}{n}\right) & \cdots & H\left(\frac{i_2}{n}, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H\left(\frac{i_\varpi}{n}, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, \frac{i_2}{n}\right) & \cdots & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, \frac{i_\varpi}{n}\right) \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$$

$$= \sum_{\varpi=0}^{\varpi=n}\left(\frac{-\lambda}{n}\right)^{\varpi}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\varpi}^{1 \text{ à } n}\frac{1}{\varpi!}\begin{vmatrix} H(x_1, y_1) & H(x_1, y_2) & \cdots & H(x_1, y_q) & H\left(x_1, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(x_1, \frac{i_2}{n}\right) & \cdots & H\left(x_1, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ H(x_2, y_1) & H(x_2, y_2) & \cdots & H(x_2, y_q) & H\left(x_2, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(x_2, \frac{i_2}{n}\right) & \cdots & H\left(x_2, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H(x_q, y_1) & H(x_q, y_2) & \cdots & H(x_q, y_q) & H\left(x_q, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(x_q, \frac{i_2}{n}\right) & \cdots & H\left(x_q, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ H\left(\frac{i_1}{n}, y_1\right) & H\left(\frac{i_1}{n}, y_2\right) & \cdots & H\left(\frac{i_1}{n}, y_q\right) & H\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}\right) & \cdots & H\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ H\left(\frac{i_2}{n}, y_1\right) & H\left(\frac{i_2}{n}, y_2\right) & \cdots & H\left(\frac{i_2}{n}, y_q\right) & H\left(\frac{i_2}{n}, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(\frac{i_2}{n}, \frac{i_2}{n}\right) & \cdots & H\left(\frac{i_2}{n}, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H\left(\frac{i_\varpi}{n}, y_1\right) & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, y_2\right) & \cdots & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, y_q\right) & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, \frac{i_2}{n}\right) & \cdots & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, \frac{i_\varpi}{n}\right) \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons par δ_n^{ϖ} le coefficient de $(-\lambda)^{\varpi}$ dans $\Delta_n(\lambda)$ et par $\delta_n^{\varpi}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\right)$ le coefficient de $(-\lambda)^{\varpi}$ dans $\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$.

D'autre part, nous désignerons par d^ϖ le coefficient de $(-\lambda)^\varpi$ dans $D(\lambda)$ et par $d^\varpi\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}$ le coefficient de $(-\lambda)^\varpi$ dans $D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| \lambda\right)$.

Démontrons que

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| \lambda\right) = \lim_{n=\infty} \Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| \lambda\right).$$

On démontrerait la formule

$$D(\lambda) = \lim_{n=\infty} \Delta_n(\lambda)$$

de la même manière en faisant $q = 0$ dans les raisonnements qui vont suivre.

Remarquons que, en vertu du théorème de M. Hadamard sur la valeur absolue d'un déterminant [1], $(-\lambda)^\varpi \delta_n^\varpi\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}$ et $(-\lambda)^\varpi d^\varpi\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}$ sont moindres en valeur absolue que

$$u_\varpi = \frac{|\lambda|^\varpi \left[\sqrt{\varpi + q}\, M\right]^{\varpi+q}}{\varpi!},$$

terme général d'une série à termes positifs convergente puisque

$$\lim_{\varpi=\infty} \frac{u_{\varpi+1}}{u_\varpi} = \lim_{\varpi=\infty} |\lambda|\, M \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varpi + q}\right)^{\varpi+q}}\, \frac{\sqrt{\varpi + q + 1}}{\varpi + 1} = 0.$$

On peut donc déterminer ϖ suffisamment grand pour que, quel que soit n, on ait simultanément les deux inégalités

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| \lambda\right) - \sum_{i=0}^{i=\varpi} (-\lambda)^i \delta_n^i\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \\ &\left|D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| \lambda\right) - \sum_{i=0}^{i=\varpi} (-\lambda)^i d^i\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}\right.$$

---

[1] La valeur absolue d'un déterminant d'ordre ϖ dont tous les éléments sont $< M$ en valeur absolue est inférieure à $M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}}$ (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1893, p. 240).

ε étant une quantité positive aussi petite que l'on veut donnée à l'avance et λ ayant une valeur donnée.

D'autre part, il résulte de la définition même de l'intégrale définie qu'on pourra déterminer n suffisamment grand pour que les $\varpi + 1$ inégalités

$$\left|(-\lambda)^i \delta_n^i\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{pmatrix} - (-\lambda)^i d_n^i\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{pmatrix}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3\overline{\varpi + 1}}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, \varpi)$$

soient vérifiées pour une valeur de λ donnée. Ces dernières inégalités entraînent la suivante :

$$(29)\quad \left|\sum_{i=0}^{i=\varpi}(-\lambda)^i \delta_n^i\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{pmatrix} - \sum_{i=0}^{i=\varpi}(-\lambda)^i d^i\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{pmatrix}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Des inégalités (28) et (29) résulte l'inégalité

$$\left| \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\lambda\right) - \Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\lambda\right)\right| < \varepsilon$$

pour n suffisamment grand ; d'où l'égalité

$$\lim_{n=\infty} \Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\lambda\right) = \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\lambda\right).$$

C. Q. F. D.

5. Appliquons maintenant la formule (24) au déterminant

$$\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\lambda\right)$$

en prenant pour $r_1, r_2, \ldots, r_q$ et $s_1, s_2, \ldots, s_q$ la combinaison $1, 2, \ldots, q$, on obtient

$$\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\lambda\right)[\Delta_n(\lambda)]^{q+1} = \begin{vmatrix} \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) & \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_2\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_q\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) \\ \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_1\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) & \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_q\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_q \\ y_1\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) & \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_q \\ y_2\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_q \\ y_q\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\end{vmatrix}.$$

Faisons maintenant croître n indéfiniment et appliquons le théo-

rème d'Hilbert, nous obtenons la formule que nous avions en vue

$$(30)\qquad D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\lambda\Big)[D(\lambda)]^{q-1} = \begin{vmatrix} D\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\lambda\Big) & D\begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\lambda\Big) & \ldots & D\begin{pmatrix} x_1 \\ y_q \end{pmatrix}\lambda\Big) \\ D\begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \end{pmatrix}\lambda\Big) & D\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\lambda\Big) & \ldots & D\begin{pmatrix} x_2 \\ y_q \end{pmatrix}\lambda\Big) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D\begin{pmatrix} x_q \\ y_1 \end{pmatrix}\lambda\Big) & D\begin{pmatrix} x_q \\ y_2 \end{pmatrix}\lambda\Big) & \ldots & D\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix}\lambda\Big) \end{vmatrix}$$

et dont nous nous proposons de faire un important usage.

Écrite sous la forme

$$(31)\qquad D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\lambda\Big) = D(\lambda)\begin{vmatrix} \mathcal{H}(x_1, y_1, \lambda) & \mathcal{H}(x_1, y_2, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}(x_1, y_q, \lambda) \\ \mathcal{H}(x_2, y_1, \lambda) & \mathcal{H}(x_2, y_2, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}(x_2, y_q, \lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{H}(x_q, y_1, \lambda) & \mathcal{H}(x_q, y_2, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}(x_q, y_q, \lambda) \end{vmatrix},$$

elle donne l'*expression algébrique des mineurs de la déterminante en fonction de la déterminante et de la résolvante*.

6. Comme application immédiate de la formule (30), calculons l'expression de la résolvante $\mathcal{H}(x, y, \lambda, \mu)$ relative au noyau $\mathcal{H}(x, y, \lambda)$ et au paramètre μ.

En vertu de (31)

$$\mathcal{H}(x, y, \lambda, \mu) = \frac{\displaystyle\sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\mu)^{\varpi}}{\varpi!}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 ds_{\varpi}\, D\begin{pmatrix} x, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ y, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \end{pmatrix}\lambda\Big)}{\displaystyle\sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\mu)^{\varpi}}{\varpi!}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 ds_{\varpi}\, D\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \end{pmatrix}\lambda\Big)}.$$

Le terme en $\lambda^{\varpi_1}\mu^{\varpi_2}$ du numérateur a pour coefficient

$$\frac{(-1)^{\varpi_1+\varpi_2}}{\varpi_1!\,\varpi_2!}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 ds_{\varpi_1+\varpi_2}\, H\begin{pmatrix} x, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi_1+\varpi_2} \\ y, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi_1+\varpi_2} \end{pmatrix}.$$

et le terme en $\lambda^{\varpi_1}\mu^{\varpi_2}$ du dénominateur a pour coefficient

$$\frac{(-1)^{\varpi_1+\varpi_2}}{\varpi_1!\,\varpi_2!}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 ds_{\varpi_1+\varpi_2}\,\mathrm{H}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi_1+\varpi_2} \\ s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi_1+\varpi_2}\end{pmatrix}.$$

On voit donc que

$$\mathcal{H}(x, y, \lambda, \mu) = \frac{\displaystyle\sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty}\frac{(-1)^{\varpi}(\lambda+\mu)^{\varpi}}{\varpi!}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 ds_{\varpi}\,\mathrm{H}\begin{pmatrix} x, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ y, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}\end{pmatrix}}{\displaystyle\sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty}\frac{(-1)^{\varpi}(\lambda+\mu)^{\varpi}}{\varpi!}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 ds_{\varpi}\,\mathrm{H}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}\end{pmatrix}},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{H}(x, y, \lambda, \mu) = \mathcal{H}(x, y, \overline{\lambda+\mu}), \tag{32}$$

formule bien connue.

7. Considérons la fonction

$$\mathcal{H}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = \frac{\mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)}{\mathrm{D}(\lambda)},$$

relative au noyau $\mathrm{H}(x, y)$ et au paramètre λ; désignons par

$$\mathcal{H}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\,\lambda, \mu\right)$$

la même fonction relative au noyau $\mathcal{H}(x, y, \lambda)$ et au paramètre μ.

Il résulte des formules (31) et (32) que

$$\mathcal{H}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\,\lambda, \mu\right) = \mathcal{H}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\,\overline{\lambda+\mu}\right), \tag{33}$$

généralisation de la formule (32).

8. L'égalité (30) est un cas particulier de l'égalité

$$\mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ y_1, y_2, \ldots, y_q;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)\left|\mathrm{D}\left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)\right|^{q-1}$$
$$= \begin{vmatrix} \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ y_1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) & \ldots & \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ y_q, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_q, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ y_1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) & \ldots & \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_q, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ y_q, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)\end{vmatrix}$$

qui s'établira de la même façon.

CHAPITRE II.

SUR L'ORDRE DES PÔLES DE LA RÉSOLVANTE D'UN NOYAU DONNÉ.

9. Théorème I. — *Si l'on considère deux noyaux orthogonaux* $H'(x, y)$ *et* $H''(x, y)$, *le mineur d'ordre* q *de la déterminante* $D(\lambda)$ *du noyau* $H(x, y) = H'(x, y) + H''(x, y)$ *est fonction linéaire et homogène des mineurs d'ordre* o *à* q *de chacune des déterminantes* $D'(\lambda)$ *et* $D''(\lambda)$ *des noyaux respectifs* $H'(x, y)$ *et* $H''(x, y)$.

En effet, en vertu de la formule (31) et des propriétés des noyaux orthogonaux (n° **2**),

$$(34)\quad D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| \lambda\right) = D'(\lambda) D''(\lambda) \begin{vmatrix} \mathcal{H}'(x_1, y_1, \lambda) + \mathcal{H}''(x_1, y_1, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}'(x_1, y_q, \lambda) + \mathcal{H}''(x_1, y_q, \lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{H}'(x_q, y_1, \lambda) + \mathcal{H}''(x_q, y_1, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}'(x_q, y_q, \lambda) + \mathcal{H}''(x_q, y_q, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Le déterminant du second membre peut se décomposer en 2^q déterminants. Si nous faisons cette décomposition, nous obtenons une somme de termes de la forme

$$D'(\lambda) D''(\lambda) \begin{vmatrix} \mathcal{H}'(x_1, y_1, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}'(x_1, y_\varpi, \lambda) & \mathcal{H}''(x_1, y_{\varpi+1}, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}''(x_1, y_q, \lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{H}'(x_q, y_1, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}'(x_q, y_\varpi, \lambda) & \mathcal{H}''(x_q, y_{\varpi+1}, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}''(x_q, y_q, \lambda) \end{vmatrix},$$

une permutation quelconque des variables $y_1, y_2, \ldots, y_q$ pouvant être substituée à la permutation $y_1, y_2, \ldots, y_q$.

En développant le déterminant du terme précédent par rapport aux ϖ premières colonnes, d'après la règle de Laplace, on voit immédiatement, en vertu de la formule (31), que ce terme est une somme de produits de deux facteurs dont l'un est un mineur d'ordre ϖ de la déterminante $D'(\lambda)$ et l'autre un mineur d'ordre $q - \varpi$ de la déterminante $D''(\lambda)$. En faisant varier ϖ de o à q, on démontrera donc le théorème I.

10. De plus, en vertu de la règle de Laplace, on voit que le second membre de (34) peut être formé de la façon suivante :

Soient

$$(i) \qquad i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_q,$$
$$(j) \qquad j_1, \quad j_2, \quad \ldots, \quad j_q$$

deux permutations simples quelconques des nombres 1, 2, ..., q et soient i, j les nombres d'inversions respectifs de ces permutations

$$\mathrm{D}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\lambda\Bigg) = \sum \frac{(-1)^{i+j}}{\alpha!\,\beta!}\mathrm{D}'\begin{pmatrix} x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha} \\ y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_\alpha} \end{pmatrix}\lambda\Bigg)\mathrm{D}''\begin{pmatrix} x_{i_{\alpha+1}}, x_{i_{\alpha+2}}, \ldots, x_{i_q} \\ y_{j_{\alpha+1}}, y_{j_{\alpha+2}}, \ldots, y_{j_q} \end{pmatrix}\lambda\Bigg),$$

la somme du second membre étant étendue à toutes les permutations simples (i), (j) et à toutes les valeurs des nombres entiers positifs ou nuls α, β tels que $\alpha + \beta = q$.

11. *Corollaire.* — La règle précédente se généralise facilement si l'on suppose

$$\mathrm{H}(x, y) = \mathrm{H}'(x, y) + \mathrm{H}''(x, y) + \ldots + \mathrm{H}^{(\theta)}(x, y),$$

les θ noyaux composants $\mathrm{H}(x, y)$ étant orthogonaux deux à deux. On a avec la notation précédente

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\lambda\Bigg) = \sum & \frac{(-1)^{i+j}}{\alpha!\,\beta!\ldots\sigma!\,\tau!} \\ & \times \mathrm{D}'\begin{pmatrix} x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha} \\ y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_\alpha} \end{pmatrix}\lambda\Bigg) \\ & \times \mathrm{D}''\begin{pmatrix} x_{i_{\alpha+1}}, x_{i_{\alpha+2}}, \ldots, x_{i_{\alpha+\beta}} \\ y_{j_{\alpha+1}}, y_{j_{\alpha+2}}, \ldots, y_{j_{\alpha+\beta}} \end{pmatrix}\lambda\Bigg) \\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times \mathrm{D}^{(\theta)}\begin{pmatrix} x_{i_{\alpha+\beta+\ldots+\sigma+1}}, x_{i_{\alpha+\beta+\ldots+\sigma+2}}, \ldots, x_{i_q} \\ y_{j_{\alpha+\beta+\ldots+\sigma+1}}, y_{j_{\alpha+\beta+\ldots+\sigma+2}}, \ldots, y_{j_q} \end{pmatrix}\lambda\Bigg).\end{aligned}$$

La somme du second membre est étendue à toutes les permutations (i) et (j) et à toutes les valeurs des θ nombres entiers positifs ou nuls α, β, ..., σ, τ, tels que $\alpha + \beta + \ldots + \sigma + \tau = q$.

12. Théorème II. — *Étant donné un noyau* $\mathrm{H}(x, y) = h_c(x, y, 0)$, *somme de* q *noyaux canoniques relatifs au nombre fondamental* c

(n° 2), *le mineur d'ordre q de la déterminante $D(\lambda)$ de ce noyau n'est pas identiquement nul pour $\lambda = c$.*

On a vu (n° 2) que la déterminante $D^{(0)}(\lambda)$ du noyau $h_c^0(x, y, o)$ est

$$D^{(0)}(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^{n_0}.$$

Il résulte de là et du corollaire précédent que les termes qui ne contiennent pas $(\lambda - c)$ en facteur dans $D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| \lambda\right)$ sont tous compris dans la somme

$$\Sigma(-1)^{i+j} D^{(1)}\left(\begin{matrix} x_{i_1} \\ y_{j_1} \end{matrix}\middle| \lambda\right) D^{(2)}\left(\begin{matrix} x_{i_2} \\ y_{j_2} \end{matrix}\middle| \lambda\right) \ldots D^{(q)}\left(\begin{matrix} x_{i_q} \\ y_{j_q} \end{matrix}\middle| \lambda\right),$$

(i) et (j) étant les permutations définies ci-dessus, et cette somme étant étendue à toutes les permutations simples (i), (j).

Par suite, en se reportant aux formules (21) et (22), on voit que les termes en question sont tous compris dans la somme

$$S = \frac{P(a)}{c^p} \sum_{(i)(j)} (-1)^{i+j} \alpha_1^{(1)}(x_{i_1}) \beta_{n_1}^{(1)}(y_{j_1}) \alpha_1^{(2)}(x_{i_2}) \beta_{n_2}^{(2)}(y_{j_2}) \ldots \alpha_1^{(q)}(x_{i_q}) \beta_{n_q}^{(q)}(y_{j_q}),$$

$P(a)$ désignant le produit des constantes a_η^θ ($\theta = 1, 2, \ldots, q$ et $\eta = 1, 2, \ldots, n_\theta - 1$).

Cette somme peut s'écrire

$$S = \frac{P(a)}{c^p} \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)}(x_1) & \alpha_1^{(2)}(x_1) & \ldots & \alpha_1^{(q)}(x_1) \\ \alpha_1^{(1)}(x_2) & \alpha_1^{(2)}(x_2) & \ldots & \alpha_1^{(q)}(x_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_1^{(1)}(x_q) & \alpha_1^{(2)}(x_q) & \ldots & \alpha_1^{(q)}(x_q) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \beta_{n_1}^{(1)}(y_1) & \beta_{n_2}^{(2)}(y_1) & \ldots & \beta_{n_q}^{(q)}(y_1) \\ \beta_{n_1}^{(1)}(y_2) & \beta_{n_2}^{(2)}(y_2) & \ldots & \beta_{n_q}^{(q)}(y_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \beta_{n_1}^{(1)}(y_q) & \beta_{n_2}^{(2)}(y_q) & \ldots & \beta_{n_q}^{(q)}(y_q) \end{vmatrix}.$$

Je dis que les deux déterminants qui entrent dans cette expression ne sont ni l'un ni l'autre identiquement nuls; car, si le premier par exemple était identiquement nul, on pourrait déterminer des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_q$ non toutes nulles et telles que

$$a_1 \alpha_1^{(1)}(x) + a_2 \alpha_1^{(2)}(x) + \ldots + a_q \alpha_1^{(q)}(x) \equiv 0.$$

Or, ceci est impossible, les fonctions $a_1^{(\theta)}(x)$ formant avec les fonctions $b_1^{(\theta)}(y)$ un système biorthogonal [1].

S est donc différent de zéro et cette proposition entraîne le théorème II.

15. Théorème III. — *Étant donné un noyau $h_c(x, y, o)$ somme de q noyaux canoniques relatifs au nombre fondamental c, le mineur d'ordre $\theta < q$ de la déterminante $D(\lambda)$ s'annule*

$$n_{\theta+1} + n_{\theta+2} + \ldots + n_q$$

fois pour $\lambda = c$, si l'on suppose

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_q.$$

Nous fixerons les idées en supposant

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_{\theta-i-1} > n_{\theta-i},$$
$$n_{\theta-i} = n_{\theta-i+1} = \ldots = n_\theta = n_{\theta+1} = \ldots = n_{\theta+j},$$
$$n_{\theta+j} > n_{\theta+j+1} \geqq n_{\theta+j+2} \geqq \ldots \geqq n_q.$$

Soit, d'autre part,

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{i+1}$$

une combinaison simple quelconque $i+1$ à $i+1$ des $i+j+1$ nombres $(\theta - i)(\theta - i + 1)\ldots(\theta + j)$.

Le corollaire du théorème I montre que les termes de moindre degré en $(c - \lambda)$ dans $D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_\theta \\ y_1, y_2, \ldots, y_\theta \end{matrix}\middle| \lambda\right)$ sont donnés par l'expression

$$E = \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^{n_{\theta+1}+n_{\theta+2}+\ldots+n_q} \sum_{(u)} D^{(u)}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_\theta \\ y_1, y_2, \ldots, y_\theta \end{matrix}\middle| \lambda\right),$$

le terme sous le signe $\sum$ désignant le mineur d'ordre θ de la déterminante du noyau

$$h_c^{(1)}(x, y, o) + h_c^{(2)}(x, y, o) + \ldots + h_c^{(\theta-i-1)}(x, y, o)$$
$$+ h_c^{(u_1)}(x, y, o) + h_c^{(u_2)}(x, y, o) + \ldots + h_c^{(u_{i+1})}(x, y, o),$$

et la somme $\sum$ étant étendue à toutes les combinaisons (u).

---

[1] *Voir à ce sujet* Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, p. 35.

Cette somme ne saurait être identiquement nulle pour $\lambda = c$. Il résulte en effet du théorème II que $D^u\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_\theta \\ y_1, y_2, \ldots, y_\theta \end{matrix}\middle| \lambda\right)$ contient un terme non nul pour $\lambda = c$, lequel est le produit d'une constante par le produit de deux déterminants non nuls

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)}(x_1) & \ldots & \alpha_1^{(\theta-i-1)}(x_1) & \alpha_1^{(u_1)}(x_1) & \ldots & \alpha_1^{(u_{i+1})}(x_1) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_1^{(1)}(x_q) & \ldots & \alpha_1^{(\theta-i-1)}(x_q) & \alpha_1^{(u_1)}(x_q) & \ldots & \alpha_1^{(u_{i+1})}(x_q) \end{vmatrix}$$
$$\times \begin{vmatrix} \beta_{n_1}^{(1)}(y_1) & \ldots & \beta_{n_{\theta-i-1}}^{(\theta-i-1)}(y_1) & \beta_{n_{u_1}}^{(u_1)}(y_1) & \ldots & \beta_{n_{u_{i+1}}}^{(u_{i+1})}(y_1) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \beta_{n_1}^{(1)}(y_q) & \ldots & \beta_{n_{\theta-i-1}}^{(\theta-i-1)}(y_q) & \beta_{n_{u_1}}^{(u_1)}(y_q) & \ldots & \beta_{n_{u_{i+1}}}^{(u_{i+1})}(y_q) \end{vmatrix}.$$

Par suite, si la somme

$$\sum_u D^u\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_\theta \\ y_1, y_2, \ldots, y_\theta \end{matrix}\middle| \lambda\right)$$

était identiquement nulle, il existerait une relation linéaire à coefficients constants $a_1, a_2, \ldots, a_{\theta+j}$ non tous nuls, tels que

$$a_1\alpha_1^{1}(x) + a_2\alpha_1^{2}(x) + \ldots + a_{\theta+j}\alpha^{(\theta+j)}(x) \equiv 0,$$

ce qui est impossible en vertu de la biorthogonalité des fonctions $\alpha_1^{(\theta)}(x)$ et $\beta_1^{(\theta)}(y)$.

On voit donc que E est divisible par la puissance $n_{\theta+1} + n_{\theta+2} + \ldots + n_q$ de $(\lambda - c)$ et n'est pas divisible par une puissance supérieure. Le théorème III en résulte immédiatement.

14. Nous sommes maintenant à même, pour un noyau donné, de préciser la signification de l'ordre des pôles des résolvantes canoniques composant la partie du noyau relative à un nombre fondamental.

Soit un noyau $H(x, y)$ tel que pour $\lambda = c$ sa fonction déterminante s'annule p fois et tel que le mineur d'ordre θ de cette déterminante s'annule p_θ fois.

En vertu de l'orthogonalité de la partie $h_c(x, y, 0)$ du noyau $H(x, y)$ relative au pôle c et de la partie $H(x, y) - h_c(x, y, 0)$, il résulte du théorème I que les nombres p et p_θ sont les mêmes pour le noyau $h_c(x, y, 0)$ que pour le noyau $H(x, y)$.

Si donc $h_c(x, y, \lambda)$ est défini par les égalités (21) et (22), on déduira des théorèmes II et III les égalités suivantes :

$$(35) \quad \begin{cases} n_1 = p \quad - p_1, \\ n_2 = p_1 \quad - p_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ n_\theta = p_{\theta-1} - p_\theta, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ n_q = p_{q-1}, \\ p_q = 0. \end{cases}$$

Ces égalités définissent les ordres des pôles des résolvantes canoniques.

Par analogie avec la théorie des diviseurs élémentaires d'un déterminant dont tous les termes sont fonctions linéaires d'un paramètre λ, nous traduirons les égalités ci-dessus en disant que : *les ordres des pôles des résolvantes canoniques sont les exposants des diviseurs élémentaires de la fonction déterminante.*

13. Il est notable : 1° que

$$p > p_1 > p_2 > \dots > p_{q-1} \quad [1];$$

2° que

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \dots \geqq n_q.$$

De ces inégalités et des égalités (35) résultent un certain nombre d'inégalités intéressantes :

1° On a

$$p_{\theta-1} = n_\theta + n_{\theta+1} + \dots + n_q,$$

d'où

$$p_{\theta-1} \geqq n_\theta + q - \theta;$$

cette inégalité a été donnée par M. B. Heywood pour $\theta = 1$.

La somme du genre d'un nombre fondamental et de son ordre comme pôle de la résolvante est inférieure à son degré de multiplicité comme zéro de la déterminante.

2° Comme $n_1 \geqq n_q$,

$$p - p_1 \geqq p_{q-1}.$$

---

(1) *Voir* à ce sujet B. Heywood, *Thèse* déjà citée.

Un nombre fondamental de genre q est un pôle de la résolvante d'ordre au moins égal à son degré de multiplicité comme zéro du mineur d'ordre $q-1$ de la déterminante.

3° Comme $n_\theta \leqq n_{\theta-1}$,

$$p_{\theta-1} - p_\theta \leqq p_\theta - p_{\theta+1},$$

d'où

$$p_\theta \leqq \frac{p_{\theta+1} + p_{\theta-1}}{2}.$$

La multiplicité d'un nombre fondamental comme zéro d'un mineur d'ordre θ de la déterminante est inférieure ou au plus égale à la moyenne arithmétique des multiplicités de ce nombre fondamental comme zéro des mineurs d'ordre $\theta - 1$ et d'ordre $\theta + 1$.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES.

16. Dans cette seconde Partie nous nous proposons d'étudier les systèmes d'équations intégrales linéaires du type suivant :

$$(36)\quad \sum_{\nu=1}^{\nu=m}\left[a_{\mu\nu}(x)\,\theta_\nu(x) - \lambda\int_0^1 b_{\mu\nu}(x,s)\,\theta_\nu(s)\,ds\right] = c_\mu(x) \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

où $a_{\mu\nu}(x)$, $b_{\mu\nu}(x, s)$, $c_\mu(x)$ sont des fonctions bornées et intégrables dans le domaine $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$; λ un paramètre donné et $\theta_\nu(x)$ des fonctions inconnues que l'on se propose de définir dans le domaine $0 \leqq x \leqq 1$.

Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1m}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1}(x) & \ldots & a_{mm}(x) \end{vmatrix},$$

et supposons qu'il ne soit pas identiquement nul dans le domaine $0 \leqq x \leqq 1$

et ne s'y annule que pour des valeurs de x isolées et en nombre fini.

Faisons pour un instant l'hypothèse que les fonctions $\theta_\nu(x)$ aient été remplacées par leurs valeurs sous le signe $\int_0^1$ et résolvons le système (36) comme un système d'équations linéaires en $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, ..., $\theta_\nu(x)$.

Nous obtenons le système équivalent

$$A(x)\,\theta_\mu(x) = f_\mu(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_0^1 K_{\mu\nu}(x, s)\,\theta_\nu(s)\,ds \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Posons

$$A(x)\,\theta_\mu(x) = \varphi_\mu(x)$$

et

$$\frac{K_{\mu\nu}(x, s)}{A(s)} = H_{\mu\nu}(x, s). \tag{37}$$

La résolution du système (36) est équivalente à la résolution du système

$$\varphi_\mu(x) = f_\mu(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_0^1 H_{\mu\nu}(x, s)\,\varphi_\nu(s)\,ds \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{38}$$

Fredholm a montré que *la résolution du système* (38) *peut être ramenée à la résolution d'une équation unique.* Pour cela il pose

$$\left\{\begin{array}{ll} H(x, s) = H_{\mu\nu}(x - \mu + 1,\ s - \nu + 1), & \text{pour } 0 < \begin{matrix} x - \mu + 1 \\ s - \nu + 1 \end{matrix} < 1, \\ f(x) = f_\mu(x - \mu + 1), & \text{pour } 0 < x - \mu + 1 < 1, \end{array}\right. \tag{39}$$

et considère l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^m H(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x). \tag{40}$$

A toute solution $\varphi(x)$ de (40) valable dans le domaine $0 \leq x \leq m$ correspond une solution du système (38); elle est définie par les égalités

$$\varphi(x) = \varphi_\mu(x - \mu + 1), \qquad \text{pour } 0 < x - \mu + 1 < 1. \tag{41}$$

Réciproquement, les égalités (41) montrent qu'à toute solution du système (38) valable dans le domaine $0 \leq x \leq 1$ correspond une solution de l'équation (40) valable dans le domaine $0 \leq x \leq m$.

La résolution du système (38) est donc équivalente à la résolution de l'équation (40).

Or, l'équation (40) est de troisième ou de deuxième espèce suivant que les fonctions $A(s-\nu+1)$ s'annulent ou non dans l'intervalle $0 < s-\nu+1 < 1$, c'est-à-dire suivant que $A(s)$ s'annule ou non dans l'intervalle $0 < s < 1$.

Nous dirons également que le système (36) est de troisième ou de deuxième espèce suivant que $A(s)$ s'annule ou non pour s compris entre 0 et 1.

CHAPITRE III.

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES DE DEUXIÈME ESPÈCE.

17. Nous allons discuter complètement dans ce Chapitre le système d'équations (38) en supposant que $f_\mu(x)$ et $H_{\mu\nu}(x, y)$ sont bornés et intégrables dans le domaine

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1.$$

Nous conviendrons de représenter par

$$H^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} H_{\mu_1,\nu_1}(x_1, y_1) & H_{\mu_1,\nu_2}(x_1, y_2) & \ldots & H_{\mu_1,\nu_q}(x_1, y_q) \\ H_{\mu_2,\nu_1}(x_2, y_1) & H_{\mu_2,\nu_2}(x_2, y_2) & \ldots & H_{\mu_2,\nu_q}(x_2, y_q) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_{\mu_q,\nu_1}(x_q, y_1) & H_{\mu_q,\nu_2}(x_q, y_2) & \ldots & H_{\mu_q,\nu_q}(x_q, y_q) \end{vmatrix}.$$

Si l'on se reporte alors, d'une part aux égalités (39) et d'autre part à l'égalité (5), on voit que la déterminante $D(\lambda)$ de l'équation de Fredholm (40), à laquelle le système (38) est équivalent, peut s'écrire

$$(42) \quad D(\lambda) = \sum_{a, b, \ldots, t}^{0 \text{ à } l'\infty} \frac{(-\lambda)^\varpi}{a!\, b! \ldots t!} \times \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \ldots \int_0^1 ds_\varpi\, H^{\overbrace{1,1,\ldots,1}^{a \text{ fois}},\, \overbrace{2,2,\ldots,2}^{b \text{ fois}},\, \ldots,\, \overbrace{m,m,\ldots,m}^{t \text{ fois}}}_{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{a \text{ fois}},\, \underbrace{2,2,\ldots,2}_{b \text{ fois}},\, \ldots,\, \underbrace{m,m,\ldots,m}_{t \text{ fois}}} \begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix},$$

avec la condition $\varpi = a + b + \ldots + t$ et la somme doit être étendue à toutes les valeurs possibles des entiers positifs ou nuls $a, b, c, \ldots, t$.

Nous dirons que $D(\lambda)$ est la *fonction déterminante* du système de noyaux $H_{\mu\nu}(x, y)$.

De même quand

$$0 < \frac{x - \mu + 1}{y - \nu + 1} < 1,$$

le mineur du premier ordre de la déterminante de l'équation (40) a pour expression, en vertu de (39) et de (6),

$$(43) \qquad D_\nu^\mu\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) = \sum_{a, b, \ldots, t}^{0 \text{ à } l'\infty} \frac{(-\lambda)^\varpi}{a!\,b!\ldots t!} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \ldots \int_0^1 ds_\varpi$$
$$\times H^{\mu,\overbrace{1,1,\ldots,1}^{a \text{ fois}},\overbrace{2,2,\ldots,2}^{b \text{ fois}},\ldots,\overbrace{m,m,\ldots,m}^{t \text{ fois}}}_{\nu,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{a \text{ fois}},\underbrace{2,2,\ldots,2}_{b \text{ fois}},\ldots,\underbrace{m,m,\ldots,m}_{t \text{ fois}}}\left(\begin{matrix} x, s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ y, s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{matrix}\right).$$

Nous dirons que les fonctions $D_\nu^\mu\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ sont les *mineurs du premier ordre* de la déterminante $D(\lambda)$.

La relation (30) va nous permettre maintenant de donner une définition du mineur d'ordre q, $D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$, de la déterminante de l'équation (40) pour

$$0 < \frac{x_1 - \mu_1 + 1}{y_1 - \nu_1 + 1} < 1, \quad 0 < \frac{x_2 - \mu_2 + 1}{y_2 - \nu_2 + 1} < 1, \quad \ldots, \quad 0 < \frac{x_q - \mu_q + 1}{y_q - \nu_q + 1} < 1.$$

Cette fonction $D^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\right)$, que l'on sait être entière en λ, peut être définie par la relation

$$(44) \qquad D^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)[D(\lambda)]^{q-1}$$
$$= \begin{vmatrix} D_{\nu_1}^{\mu_1}\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & D_{\nu_2}^{\mu_1}\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_2 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & D_{\nu_q}^{\mu_1}\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right) \\ D_{\nu_1}^{\mu_2}\left(\begin{matrix} x_2 \\ y_1 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & D_{\nu_2}^{\mu_2}\left(\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & D_{\nu}^{\mu_2}\left(\begin{matrix} x_2 \\ y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ D_{\nu_1}^{\mu_q}\left(\begin{matrix} x_q \\ y_1 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & D_{\nu_2}^{\mu_q}\left(\begin{matrix} x_q \\ y_2 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & D_{\nu_q}^{\mu_q}\left(\begin{matrix} x_q \\ y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right) \end{vmatrix}.$$

Nous dirons que les fonctions $D_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q}^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| \lambda\right)$ sont les *mineurs d'ordre q* de la déterminante $D(\lambda)$.

18. Ceci posé, nous sommes à même d'étudier complètement le système d'équations (38) en suivant pas à pas les résultats obtenus concernant la discussion de l'équation unique de Fredholm (n° **1**), en étendant ces résultats à l'équation (40) par substitution des limites (o, m) aux limites (o, 1), puis en tenant compte des relations (41).

On obtient finalement les résultats suivants :

D'une part, *la fonction déterminante* $D(\lambda)$ *et ses mineurs du premier ordre* $D_\nu^\mu\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right)$ *satisfont aux relations caractéristiques*

$$(45) \quad \begin{cases} D(o) = 1 & (45') \\ -\dfrac{dD(\lambda)}{d\lambda} = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \int_0^1 D_\mu^\mu\left(\begin{matrix} s \\ s \end{matrix}\middle| \lambda\right) ds & (45'') \end{cases}$$

$$(46) \quad \begin{cases} D_\nu^\mu\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right) - H_{\mu,\nu}(x, y)\, D(\lambda) = \lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m} \int_0^1 H_{\mu,i}(x, s)\, D_\nu^i\left(\begin{matrix} s \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right) ds & (46') \\ \qquad = \lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m} \int_0^1 H_{i,\nu}(s, y)\, D_i^\mu\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle| \lambda\right) ds & (46'') \end{cases}$$

D'autre part :

1° Si $D(\lambda) \neq o$, ce que nous exprimerons en disant que λ n'est pas un nombre fondamental du système de noyaux $H_{\mu,\nu}(x, y)$, *le système d'équations intégrales linéaires* (38) *admet la solution unique*

$$(47) \qquad \varphi_\mu(x) = f_\mu(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_0^1 \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, s, \lambda) f_\nu(s)\, ds,$$

$\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda)$ étant la fonction

$$(48) \qquad \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda) = \frac{D_\nu^\mu\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right)}{D(\lambda)}.$$

Il résulte des relations (46) que les fonctions $\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda)$, dont l'ensemble est le *système de résolvantes du système de noyaux*

$H_{\mu,\nu}(x, y)$, satisfont aux deux systèmes de relations

$$(49)\left\{\begin{aligned} -H_{\mu,\nu}(x,y)+\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x,y,\lambda) &= \lambda\sum_{i=1}^{i=m}\int_0^1 H_{\mu,i}(x,s)\,\mathcal{H}_{i,\nu}(s,y,\lambda)\,ds \quad (49')\\ &= \lambda\sum_{i=1}^{i=m}\int_0^1 H_{i,\nu}(s,y)\,\mathcal{H}_{\mu,i}(x,s,\lambda)\,ds \quad (49'')\end{aligned}\right.$$

2° Si, pour $\lambda = c$, $D(\lambda)$ est nul ainsi que tous ses mineurs d'ordres $1, 2, \ldots, q-1$, un de ses mineurs d'ordre q étant différent de zéro, par exemple le mineur

$$D^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_q}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q\\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\lambda\right),$$

ce que nous exprimerons en disant que c est un *nombre fondamental de genre* q, *les deux systèmes d'équations intégrales linéaires homogènes*

$$(50)\qquad \varphi_\mu(x)-\lambda\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\int_0^1 H_{\mu,\nu}(x,s)\,\varphi_\nu(s)\,ds=0 \qquad (\mu=1,2,\ldots,m),$$

$$(51)\qquad \psi_\nu(y)-\lambda\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\int_0^1 H_{\mu,\nu}(s,y)\,\psi_\mu(s)\,ds=0 \qquad (\nu=1,2,\ldots,m),$$

dits systèmes associés, *admettent respectivement les* q *solutions*

$$(52)\left\{\begin{aligned}\varphi_\mu(x)=\Phi_\mu^{(\theta)}(x)=\frac{D^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{\theta-1},\mu,\mu_{\theta+1},\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\nu_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,\nu_q}\left(\begin{matrix}x_1,x_2,\ldots,x_{\theta-1},x,x_{\theta+1},\ldots,x_q\\ y_1,y_2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,y_q\end{matrix}\middle|c\right)}{D^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_q}\left(\begin{matrix}x_1,x_2,\ldots,x_q\\ y_1,y_2,\ldots,y_q\end{matrix}\middle|c\right)}\\ (\theta=1,2,\ldots,q),\end{aligned}\right.$$

$$(53)\left\{\begin{aligned}\psi_\nu(y)=\Psi_\nu^{(\theta)}(y)=\frac{D^{\mu_1,\mu_2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{\theta-1},\nu,\nu_{\theta+1},\ldots,\nu_q}\left(\begin{matrix}x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,x_q\\ y_1,y_2,\ldots,y_{\theta-1},y,y_{\theta+1},\ldots,y_q\end{matrix}\middle|c\right)}{D^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_q}\left(\begin{matrix}x_1,x_2,\ldots,x_q\\ y_1,y_2,\ldots,y_q\end{matrix}\middle|c\right)}\\ (\theta=1,2,\ldots,q).\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$\Phi_\theta(x)=\Phi_\mu^{(\theta)}(x) \qquad \text{pour } 0<x-\mu+1<1,$$

les q fonctions $\Phi_\theta(x)$ sont linéairement indépendantes, ce qui revient à dire qu'*il ne peut exister une même relation linéaire à coefficients constants non tous nuls* $a_1, a_2, \ldots, a_q$

$$a_1 \Phi_\mu^{(1)}(x) + a_2 \Phi_\mu^{(2)}(x) + \ldots + a_q \Phi_\mu^{(q)}(x) \equiv 0,$$

vérifiée quel que soit x *compris entre* 0 *et* 1 *pour les* m *valeurs* 1, 2, ..., m *de l'indice* μ.

Nous exprimerons ce fait en disant que les q solutions $\Phi_\mu^{(\theta)}(x)$ du système (50) sont *linéairement indépendantes*.

Dans le cas qui nous occupe, le système (50) admet q solutions linéairement indépendantes (52) et q seulement.

3° Pour $\lambda = c$, *nombre fondamental de genre* q, *le système d'équations* (38) *n'a pas, en général, de solution;* les conditions nécessaires et suffisantes pour que des solutions existent sont les q conditions

$$(54) \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \int_0^1 \Psi_\mu^{(\theta)}(s) f_\mu(s)\, ds = 0 \qquad (\theta = 1, 2, \ldots, q).$$

Ces conditions supposées remplies, toutes les solutions du système (38) pour $\lambda = c$ sont définies par les égalités

$$(55) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_\mu(x) = f_\mu(x) + c \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_0^1 \mathrm{K}_{\mu,\nu}(x, s) f_\nu(s)\, ds + \sum_{\theta=1}^{\theta=q} a_\theta \Phi_\mu^{(\theta)}(x) \\ \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \end{array} \right.$$

où $\mathrm{K}_{\mu,\nu}(x, y)$ désignent les fonctions

$$(56) \qquad \mathrm{K}_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{\mathrm{D}_{\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q}^{\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q}\left(\begin{array}{c} x, x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y, y_1, y_2, \ldots, y_q \end{array} \middle| c\right)}{\mathrm{D}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q}^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q}\left(\begin{array}{c} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{array} \middle| c\right)},$$

et où les a_θ sont q constantes arbitraires, les mêmes quel que soit μ.

19. Les résultats de l'étude des noyaux et de la résolvante d'une équation unique s'étendront également aux systèmes de noyaux et de résolvantes d'un système d'équations intégrales linéaires.

Deux systèmes de m^2 noyaux $H_{\mu,\nu}(x, y)$ et $K_{\mu,\nu}(x, y)$ seront dits *orthogonaux*, s'ils satisfont aux deux systèmes de conditions

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=m}\int_0^1 H_{\mu,i}(x, s)\, K_{i,\nu}(s, y)\, ds = 0 \\ &\sum_{i=1}^{i=m}\int_0^1 H_{i,\nu}(s, y)\, K_{\mu,i}(x, s)\, ds = 0 \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, m \\ \nu = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

Si un système de m^2 noyaux $H_{\mu,\nu}(x, y)$ donné est tel que chacun de ses noyaux est la somme de deux noyaux de mêmes indices μ, ν de deux systèmes orthogonaux de m^2 noyaux composants : 1° la fonction déterminante du système de noyaux $H_{\mu,\nu}(x, y)$ est le produit des fonctions déterminantes des systèmes de noyaux composants; 2° les fonctions résolvantes $\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda)$ du système de noyaux $H_{\mu,\nu}(x, y)$ sont les sommes des fonctions résolvantes de mêmes indices μ, ν des systèmes de noyaux composants.

Désignons par $h_{\mu,\nu,c}(x, y, \lambda)$ la partie de la fonction méromorphe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda)$ résolvante d'indices μ, ν du système de noyaux $H_{\mu,\nu}(x, y)$ qui devient infinie pour $\lambda = c$, et soient c_1 et c_2 deux nombres fondamentaux du système de noyaux $H_{\mu,\nu}(x, y)$. On peut poser

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda) = h_{\mu,\nu,c_1}(x, y, \lambda) + h_{\mu,\nu,c_2}(x, y, \lambda) + h_{\mu,\nu}(x, y, \lambda).$$

Les trois systèmes de m^2 noyaux $h_{\mu,\nu,c_1}(x, y, 0)$; $h_{\mu,\nu,c_2}(x, y, 0)$; $h_{\mu,\nu}(x, y, 0)$ sont orthogonaux entre eux deux à deux et admettent comme résolvantes respectives $h_{\mu,\nu,c_1}(x, y, \lambda)$; $h_{\mu,\nu,c_2}(x, y, \lambda)$; $h_{\mu,\nu}(x, y, \lambda)$.

Finalement, on peut étudier séparément les parties des noyaux $h_{\mu,\nu,c}(x, y, 0)$ et les parties des résolvantes $h_{\mu,\nu,c}(x, y, \lambda)$ relatives au nombre fondamental c.

Soit c un nombre fondamental de genre q annulant p fois $D(\lambda)$; $h_{\mu,\nu,c}(x, y, \lambda)$ peut être considéré comme la somme de q fonctions

$$h^{(0)}_{\mu,\nu,c}(x, y, \lambda) = \frac{\varphi^{(0)}_{\mu,\nu,n_0}(x, y)}{(c-\lambda)^{n_0}} + \frac{\varphi^{(0)}_{\mu,\nu,n_0-1}(x, y)}{(c-\lambda)^{n_0-1}} + \ldots + \frac{\varphi^{(0)}_{\mu,\nu,1}(x, y)}{c-\lambda},$$

les fonctions $\varphi^{(0)}_{\mu,\nu,1}$, ..., $\varphi^{(0)}_{\mu,\nu,n_0}$ étant définies à l'aide des constantes

arbitraires $a_i^{(\theta)}$ par les relations

$$\varphi_{\mu,\nu,1}^{(\theta)}(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n_\theta} \alpha_{\mu,i}^{(\theta)}(x)\,\beta_{\nu,i}^{(\theta)}(y),$$

$$\varphi_{\mu,\nu,2}^{(\theta)}(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n_\theta-1} a_i^{(\theta)}\,\alpha_{\mu,i}^{(\theta)}(x)\,\beta_{\nu,i+1}^{(\theta)}(y),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{\mu,\nu,n_\theta}^{(\theta)}(x,y) = a_1^{(\theta)} a_2^{(\theta)} \cdots a_{n_\theta-1}^{(\theta)}\,\alpha_{\mu,1}^{(\theta)}(x)\,\beta_{\nu,n_\theta}^{(\theta)}(y),$$

$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = p$ et les $2m$ systèmes de fonctions $\alpha_{\mu,i}^{(\theta)}(x)$ et $\beta_{\mu,i}^{(\theta)}(y)$, qui existent, quel que soit le choix des constantes $a_i^{(\theta)}$, sont tels que si l'on définit les fonctions

$$\alpha_i^{(\theta)}(x) = \alpha_{\mu,i}^{(\theta)}(x-\mu+1) \qquad \text{pour } 0 < x-\mu+1 < 1,$$
$$\beta_i^{(\theta)}(y) = \beta_{\nu,i}^{(\theta)}(y-\nu+1) \qquad \text{pour } 0 < y-\nu+1 < 1,$$

ces $2p$ fonctions $\alpha_i^{(\theta)}(x)$, $\beta_i^{(\theta)}(y)$ forment un système biorthogonal dans l'intervalle d'intégration $(0 - m)$.

$h_{\mu,\nu,c}^{(\theta)}(x, y, 0)$ forment un système de m^2 *noyaux canoniques* d'ordre n_θ; $h_{\mu,\nu,c}^{(\theta)}(x, y, \lambda)$ sont dits *résolvantes canoniques* d'ordre n_θ de ce système de noyaux.

De plus, la fonction déterminante du système de m^2 noyaux $h_{\mu,\nu,c}^{(\theta)}(x, y, 0)$ est $\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^{n_\theta}$.

Enfin, si l'on appelle p_θ le plus grand commun diviseur des exposants du binome $(\lambda - c)$ en facteur dans les mineurs d'ordre θ de la déterminante $D(\lambda)$, on a

$$(58) \qquad \left\{\begin{array}{l} n_1 = p \quad - p_1, \\ n_2 = p_1 \quad - p_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_\theta = p_{\theta-1} - p_\theta, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ n_q = p_{q-1}, \\ p_q = 0. \end{array}\right.$$

Notons que, pour i et θ donnés, l'une au moins des m fonctions $\alpha_{\mu,i}^{(\theta)}(x)$ n'est pas identiquement nulle pour $0 \leq x < 1$, puisque $\alpha_i^{(\theta)}(x)$ ne

saurait être identiquement nul entre o et m. De même, l'une des m fonctions $\beta_{\nu,i}^{(0)}(y)$ n'est pas identiquement nulle pour $0 \leq y \leq 1$.

On ne saurait donc d'une part avoir simultanément

$$\varphi_{1,\nu,1}^{(0)}(x,y) = \varphi_{2,\nu,1}^{(0)}(x,y) = \ldots = \varphi_{m,\nu,1}^{(0)}(x,y) = 0,$$

sinon il existerait une relation linéaire à coefficients constants non tous nuls entre les fonctions $\alpha_1^{(0)}(x)$, $\alpha_2^{(0)}(x)$, ..., $\alpha_{n_0}^{(0)}(x)$, ce qui est impossible, celles-ci étant biorthogonales aux fonctions $\beta_1^{(0)}(y)$, $\beta_2^{(0)}(y)$, ..., $\beta_{n_0}^{(0)}(y)$ dans l'intervalle $(0 - m)$.

Nous pouvons donc énoncer que *m résolvantes canoniques au moins admettent le pôle $\lambda = c$*, et, si nous désignons par μ_1, ν_1; μ_2, ν_2; ...; μ_m, ν_m leurs indices μ, ν, ils sont tels que μ_1, μ_2, ..., μ_m, et ν_1, ν_2, ..., ν_m, sont deux permutations des nombres 1, 2, ..., m.

Nous traduirons d'autre part les égalités (58) en disant que *les ordres des pôles des résolvantes canoniques sont inférieurs ou au plus égaux aux exposants des diviseurs élémentaires de la fonction déterminante; ils sont égaux à ces exposants pour une au moins des m^2 résolvantes canoniques.*

Nous remarquerons, enfin, qu'en vertu de (45)

$$(59) \qquad -\frac{d \log D(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \int_0^1 \mathcal{K}_{\mu,\mu}(s, s, \lambda)\, ds;$$

donc *c est un pôle pour l'une au moins des m résolvantes* $\mathcal{K}_{\mu,\mu}(x, y, \lambda)$, car il est nécessairement un pôle simple de $\frac{d \log D(\lambda)}{d\lambda}$.

CHAPITRE IV.

RECHERCHE DES FONCTIONS PRINCIPALES D'UN NOYAU DONNÉ ADMETTANT DES PÔLES DONNÉS.

20. Considérons un seul noyau $H(x, y)$, et conservons les notations du n° **2**.

Les fonctions $\alpha_i^{(0)}(x)$, $\beta_i^{(0)}(y)$, qui entrent dans la formation des

noyaux canoniques $h_c^{(i)}(x, y, 0)$, sont des fonctions dites *principales* relatives au noyau $H(x, y)$ et à son nombre fondamental c.

Dans ses remarquables recherches sur les équations intégrales linéaires, M. Goursat [1] a montré qu'on peut définir de la façon suivante les *fonctions principales* :

Étant donné un nombre fondamental de genre q du noyau $H(x, y)$ annulant p fois la déterminante de ce noyau et p^2 constantes $a_{i,j}$ telles que

$$(60) \qquad \Delta(r) \equiv \begin{vmatrix} a_{1,1}-r & a_{12} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-r & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p}-r \end{vmatrix} \equiv (1-r)^p,$$

il existe des fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_p(x)$ satisfaisant au système d'équations intégrales linéaires homogènes

$$(61) \quad \begin{cases} c\int_0^1 H(x,s)\,\varphi_1(s)\,ds = a_{1,1}\,\varphi_1(x) + a_{1,2}\,\varphi_2(x) + \dots + a_{1,p}\,\varphi_p(x), \\ c\int_0^1 H(x,s)\,\varphi_2(s)\,ds = a_{2,1}\,\varphi_1(x) + a_{2,2}\,\varphi_2(x) + \dots + a_{2,p}\,\varphi_p(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ c\int_0^1 H(x,s)\,\varphi_p(s)\,ds = a_{p,1}\,\varphi_1(x) + a_{p,2}\,\varphi_2(x) + \dots + a_{p,p}\,\varphi_p(x), \end{cases}$$

système de seconde espèce, puisque

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix} = 1.$$

en vertu de (60).

D'une part, chacune des fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_p(x)$ est dite *fonction principale* relative au noyau $H(x, y)$, à la variable x et au nombre fondamental c; d'autre part, l'ensemble de ces p fonctions constitue un *groupe principal* relatif au noyau $H(x, y)$, à la variable x et au nombre fondamental c.

---

[1] *Ann. de la Fac. de Toulouse*, 1908. Mémoire déjà cité.

Lorsque l'on connaît un groupe principal relatif à un noyau $H(x, y)$, *à la variable* x *et au nombre fondamental* c, *on obtient tous les autres en effectuant sur celui connu une substitution linéaire à coefficients constants dont le déterminant est différent de zéro.*

Nous nous proposons, dans ce Chapitre, d'appliquer les résultats du n° **18** à la recherche d'une solution d'un système particulier (61), et, par suite, à la détermination d'un groupe principal; la dernière proposition que nous venons de rappeler nous permettra d'en déduire tous les autres.

21. Dans ce but, faisons un choix particulier des constantes $a_i^{(\theta)}$ qui entrent dans les formules (22); prenons-les toutes égales à c et appelons $A_i^{(\theta)}(x)$, $B_i^{(\theta)}(y)$ les nouvelles fonctions principales $\alpha_i^{(\theta)}(x)$, $\beta_i^{(\theta)}(y)$, correspondant à ce choix de constantes.

Nous allons *former le système d'équations du type* (61) *auquel satisfont les fonctions* $A_i^{(\theta)}(x)$.

Les formules (21) et (22) permettent d'écrire

$$(62)\qquad c\, h_c^{(\theta)}(x, y, \lambda) = \sum_{j=0}^{j=n_\theta-1} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n_\theta-j} A_i^{(\theta)}(x)\, B_{i+j}^{(\theta)}(y)}{\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^{j+1}}.$$

Si, après avoir fait $\lambda = 0$ dans cette égalité, on multiplie les deux membres par $A_i^{(\theta)}(y)\, dy$ et intègre entre 0 et 1, on obtient, en vertu de la biorthogonalité des fonctions $A_i^{(\theta)}(x)$ et $B_i^{(\theta)}(y)$, la relation

$$(63)\qquad c\int_0^1 h_c^{(\theta)}(x, s, 0)\, A_i^{(\theta)}(s)\, ds = A_1^{(\theta)}(x) + A_2^{(\theta)}(x) + \ldots + A_i^{(\theta)}(x).$$

D'autre part, posons

$$\begin{aligned} H(x, y) &= h_c(x, y, 0) + K(x, y) \\ &= h_c^{(1)}(x, y, 0) + h_c^{(2)}(x, y, 0) + \ldots + h_c^{(q)}(x, y, 0) + K(x, y), \end{aligned}$$

les $q + 1$ noyaux $h_c^{(\theta)}(x, y, 0)$ et $K(x, y)$ sont orthogonaux deux à deux.

Cette orthogonalité entraîne les identités (¹)

$$\int_0^1 \mathrm{K}(x,s)\, h_c^{\theta}(s,y,\lambda) \qquad ds \equiv 0,$$

$$\int_0^1 h_c^{\varpi}(x,s,0)\, h_c^{\theta}(s,y,\lambda)\, ds \equiv 0, \qquad \text{pour } \varpi \neq \theta,$$

quels que soient x, y et λ.

Tenant compte de l'indépendance des fonctions $\mathrm{B}_i^{\theta}(y)$, il en résultera les identités

$$(64) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 \mathrm{K}(x,s)\, \mathrm{A}_i^{\theta}(s) \qquad ds \equiv 0, \\ &\int_0^1 h_c^{\varpi}(x,s,0)\, \mathrm{A}_i^{\theta}(s)\, ds \equiv 0. \end{aligned} \right.$$

Les égalités (63) et (64) montrent que la fonction $\mathrm{A}_i^{\theta}(x)$ satisfait à l'équation

$$(65) \qquad c\int_0^1 \mathrm{H}(x,s)\, \mathrm{A}_i^{\theta}(s)\, ds = \mathrm{A}_1^{\theta}(x) + \mathrm{A}_2^{\theta}(x) + \ldots + \mathrm{A}_i^{\theta}(x).$$

En faisant varier θ *de* 1 *à* q *et* i *de* 1 *à* n_θ, *on obtient* p *relations qui constituent un système du type* (61) *auquel satisfont les fonctions principales* $\mathrm{A}_i^{\theta}(x)$.

22. Considérons maintenant le système d'équations intégrales linéaire homogène du second ordre

$$(66) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(x) &= c\int_0^1 \mathrm{H}(x,s)\, \varphi_1(s)\, ds, \\ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) &= c\int_0^1 \mathrm{H}(x,s)\, \varphi_2(s)\, ds, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_i(x) &= c\int_0^1 \mathrm{H}(x,s)\, \varphi_i(s)\, ds, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_{n_1}(x) &= c\int_0^1 \mathrm{H}(x,s)\, \varphi_{n_1}(s)\, ds. \end{aligned} \right.$$

(¹) *Voir* Bryon Heywood, *Thèse* déjà citée.

Si l'on suppose $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_q$, ce système admet les n_θ solutions définies par le Tableau ci-dessous :

Solutions.	φ_1.	φ_2.	.	$\varphi_{n_1-n_\theta}$.	$\varphi_{n_1-n_\theta+1}$.	$\varphi_{n_1-n_\theta+2}$.	$\varphi_{n_1-n_\theta+3}$.	.	φ_{n_1-1}.	φ_{n_1}.
1re...	0	0	...	0	$A_1^{(\theta)}$	$A_2^{(\theta)}$	$A_3^{(\theta)}$	...	$A_{n_\theta-1}^{(\theta)}$	$A_{n_\theta}^{(\theta)}$
2e....	0	0	...	0	0	$A_1^{(\theta)}$	$A_2^{(\theta)}$	...	$A_{n_\theta-2}^{(\theta)}$	$A_{n_\theta-1}^{(\theta)}$
3e....	0	0	...	0	0	0	$A_1^{(\theta)}$	...	$A_{n_\theta-3}^{(\theta)}$	$A_{n_\theta-2}^{(\theta)}$
......	.	.	...	.	.	.	...	...	.....	.....
$n_\theta^{\text{ième}}$..	0	0	...	0	0	0	0	...	0	$A_1^{(\theta)}$

et ceci est vrai pour $\theta = 1, 2, \ldots, q$. Donc le système (66) admet

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = p \text{ solutions.}$$

Ces p solutions sont linéairement indépendantes dans le sens donné à ce mot (n° **18**); cela en vertu de l'indépendance des fonctions $A_i^\theta(x)$.

Si donc l'on considère le système d'équations intégrales linéaire du second ordre

$$(67)\quad \begin{cases} \varphi_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_0^1 H(x, s)\, \varphi_1(s)\, ds, \\ \varphi_2(x) = f_2(x) + \lambda \int_0^1 H(x, s)\, [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]\, ds, \\ \varphi_3(x) = f_3(x) + \lambda \int_0^1 H(x, s)\, [\varphi_3(s) - \varphi_2(s)]\, ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n_1}(x) = f_{n_1}(x) + \lambda \int_0^1 H(x, s)\, [\varphi_{n_1}(s) - \varphi_{n_1-1}(s)]\, ds, \end{cases}$$

lequel se réduit au système (66) pour $\lambda = c$, et

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_{n_1}(x) = 0,$$

la déterminante de ce système s'annule pour $\lambda = c$ *ainsi que tous ses mineurs d'ordre* 1 *à* $p - 1$ *inclusivement.*

23. Nous nous proposons d'établir maintenant que tous les mineurs d'ordre p de cette déterminante ne sont pas nuls.

Nous commencerons pour cela par exprimer la valeur de cette déterminante $D(\lambda)$ et celle des résolvantes du système (67) en fonction

de la déterminante $D_{\text{H}}(\lambda)$ et de la résolvante $\mathcal{H}(x, y, \lambda)$ du noyau unique de Fredholm $H(x, y)$.

Supposons que λ n'annule pas $D_{\text{H}}(\lambda)$ et résolvons la première équation (67) en $\varphi_1(x)$, nous obtenons

$$\varphi_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_0^1 \mathcal{H}(x, s, \lambda) f(s)\, ds.$$

Remplaçons $\varphi_1(x)$ par cette valeur dans la seconde équation (67) et résolvons-la en $\varphi_2(x)$, nous obtenons

$$\varphi_2(x) = f_2(x) - \lambda \int_0^1 \left[\mathcal{H}(x, s, \lambda) + \lambda \int_0^1 \mathcal{H}(x, t, \lambda)\, \mathcal{H}(t, s, \lambda)\, dt\right] f_1(s)\, ds + \lambda \int_0^1 \mathcal{H}(x, s, \lambda) f_2(s)\, ds.$$

En opérant de proche en proche et désignant par $f_k(x, y)$ la $(k-1)^{\text{ième}}$ fonction itérée de la fonction $f(x, y)$, on obtient comme résolvantes du système (67)

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda) = (-1)^{\mu-\nu}[\lambda^{\mu-\nu}\mathcal{H}_{\mu-\nu+1}(x, y, \lambda) + \lambda^{\mu-\nu-1}\mathcal{H}_{\mu-\nu}(x, y, \lambda)]. \tag{68}$$

Les formules (7″) et (45″) donnent alors

$$-\frac{d \log D(\lambda)}{d\lambda} = n_1 \int_0^1 \mathcal{H}(s, s, \lambda)\, ds = -n_1 \frac{d \log D_{\text{H}}(\lambda)}{d\lambda},$$

d'où, en vertu de (7′) et de (45′),

$$D(\lambda) = [D_{\text{H}}(\lambda)]^{n_1}. \tag{69}$$

Les formules (69) *et* (68) *donnent les expressions cherchées de la déterminante et des résolvantes du système* (67).

24. D'un autre côté :

1° La formule (62) permet d'écrire

$$c^k h^{(\theta)}_{c,k}(x, y, \lambda) = \sum_{j=0}^{j=n_\theta-1} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n_\theta-j} \Gamma^{k-1}_{j+1} A^{(\theta)}_i(x)\, B^{(\theta)}_{i+j}(y)}{\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)^{j+k}}, \tag{70}$$

Γ_p^q désignant le nombre des permutations à répétitions de p lettres q à q.

Cette formule se réduit à (62) pour $k = 1$.

Supposons-la vraie pour k et démontrons qu'elle est encore vraie pour $k+1$. Il suffit de multiplier les deux membres par $ch_c^{\theta}(y, z, \lambda)\,dy$, remplacer $h_c^{\theta}(y, z, \lambda)$ par son expression (62) dans le second membre et intégrer entre 0 et 1 les deux membres de la nouvelle égalité ainsi obtenue en tenant compte de la biorthogonalité des fonctions $A_i^{\theta}(x)$, $B_i^{\theta}(y)$. On obtient facilement la formule (70) où k a été remplacé par $k+1$. C. Q. F. D.

2° L'orthogonalité deux à deux des $q+1$ noyaux $h_c^{\theta}(x, y, 0)$ et $K(x, y)$ entraîne [1] l'orthogonalité deux à deux de leurs résolvantes $h_c^{\theta}(x, y, \lambda)$ et $\mathcal{K}(x, y, \lambda)$ et par suite les égalités

$$\int_0^1 h_{c,k}^{\theta}(x, s, \lambda)\, h_c^{\varpi}(s, y, \lambda)\, ds = \int_0^1 h_c^{\theta}(x, s, \lambda)\, h_{ck}^{\varpi}(s, y, \lambda)\, ds = 0$$

$$(\text{pour } \theta \neq \varpi)$$

et

$$\int_0^1 h_{ck}^{\theta}(x, s, \lambda)\, \mathcal{K}(s, y, \lambda)\, ds = \int_0^1 h_c^{\theta}(x, s, \lambda)\, \mathcal{K}_k(s, y, \lambda)\, ds = 0;$$

ces égalités permettent d'écrire

$$(71)\quad \begin{aligned} \mathcal{H}_k(x, y, \lambda) &= h_{ck}^{1}(x, y, \lambda) + h_{ck}^{2}(x, y, \lambda) + \ldots + h_{ck}^{(q)}(x, y, \lambda) + \mathcal{K}_k(x, y, \lambda) \\ &= h_{ck}(x, y, \lambda) + \mathcal{K}_k(x, y, \lambda). \end{aligned}$$

3° Posons d'une façon générale

$$(72)\quad f_{\mu,\nu}(x, y, \lambda) = (-1)^{\mu-\nu}[\lambda^{\mu-\nu} f_{\mu-\nu+1}(x, y, \lambda) + \lambda^{\mu-\nu-1} f_{\mu-\nu}(x, y, \lambda)].$$

Les égalités (70) et (71) permettent d'écrire respectivement

$$(73)\quad h_{c,\mu,\nu}^{\theta}(x, y, \lambda) = \frac{(-\lambda)^{\mu-\nu-1}}{c^{\mu-\nu}} \sum_{j=0}^{j=n_\theta-1} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n_\theta-j} \Gamma_{j+1}^{\mu-\nu} A_i^{\theta}(x)\,[B_{i+j}^{\theta}(y) - B_{i+j+1}^{\theta}(y)]}{\left(1 - \dfrac{\lambda}{c}\right)^{j+\mu-\nu}}$$

[avec la convention $B_{n_\theta+1}^{\theta}(y) = 0$] et

$$(74)\quad \begin{aligned} \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda) &= h_{c,\mu,\nu}^{1}(x, y, \lambda) + h_{c,\mu,\nu}^{2}(x, y, \lambda) + \ldots \\ &\quad + h_{c,\mu,\nu}^{q}(x, y, \lambda) + \mathcal{K}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda) \\ &= h_{c,\mu,\nu}(x, y, \lambda) + \mathcal{K}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda). \end{aligned}$$

---

(1) *Voir* BRYON HEYWOOD, *Thèse* déjà citée.

25. Nous sommes maintenant à même d'établir que *tous les mineurs d'ordre p de la déterminante* $D(\lambda)$ *ne sont pas identiquement nuls pour* $\lambda = c$.

Considérons en effet le mineur

$$P\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_p \end{pmatrix}\!\!\left|\lambda\right) = D^{\overbrace{n_1, n_1, \ldots, n_1}^{p \text{ fois}}}_{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p \text{ fois}}}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_p \end{matrix}\middle|\lambda\right).$$

La formule (44) permet d'écrire

$$P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_p \end{matrix}\middle|\lambda\right)$$
$$= [D_{11}(\lambda)]^{n_1}\begin{vmatrix} \mathcal{K}_{n_1,1}(x_1, y_1, \lambda) & \mathcal{K}_{n_1,1}(x_1, y_2, \lambda) & \ldots & \mathcal{K}_{n_1,1}(x_1, y_p, \lambda) \\ \mathcal{K}_{n_1,1}(x_2, y_1, \lambda) & \mathcal{K}_{n_1,1}(x_2, y_2, \lambda) & \ldots & \mathcal{K}_{n_1,1}(x_2, y_p, \lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{K}_{n_1,1}(x_p, y_1, \lambda) & \mathcal{K}_{n_1,1}(x_p, y_2, \lambda) & \ldots & \mathcal{K}_{n_1,1}(x_p, y_p, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Remplaçons la fonction $\mathcal{K}_{n_1,1}(x, y, \lambda)$ par sa valeur (74). Le déterminant en facteur dans le second membre peut être considéré comme la somme de $(q+1)^p$ déterminants.

Formons un déterminant de cette somme et multiplions-le par $[D_{11}(\lambda)]^{n_1}$. Supposons que ce déterminant partiel contienne : a_1 colonnes de fonctions $h^{(1)}_{c,n_1,1}$, a_2 colonnes de fonctions $h^{(2)}_{c,n_1,1}$, etc., a_q colonnes de fonctions $h^{(q)}_{c,n_1,1}$ et a_{q+1} colonnes de fonctions $\mathcal{K}_{n_1,1}$.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_q + a_{q+1} = p.$$

1° Supposons $a_{q+1} \neq 0$ et, à l'aide de la règle de Laplace, développons le déterminant partiel considéré par rapport aux a_{q+1} colonnes contenant des termes en $\mathcal{K}_{n_1,1}$. Nous obtiendrons $C_p^{a_{q+1}}$ termes correspondants T qui entrent dans la somme composante $P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_p \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ ($C_p^{a_{q+1}}$ désigne le nombre de combinaisons simples de p lettres a_{q+1} à a_{q+1}).

Un des termes T est décomposable en deux facteurs : le premier n'est pas infini pour $\lambda = c$, il consiste en un déterminant formé avec des termes des a_{q+1} colonnes contenant $\mathcal{K}_{n_1,1}$ multiplié par la puissance $n_1^{\text{ième}}$ de la déterminante du noyau $K(x, y)$; à chaque premier facteur ainsi déterminé correspond une somme de termes T dont la

somme des seconds facteurs est un mineur d'ordre $< q$ du système d'équations (67) où l'on a remplacé $\mathrm{H}(x, y)$ par $\mathrm{H}(x, y) - \mathrm{K}(x, y)$, et l'on sait (n° **22**) que ce mineur est identiquement nul pour $\lambda = c$.

Donc l'ensemble des termes T est identiquement nul pour $\lambda = c$.

2° Supposons $a_{q+1} = 0$. La formule (73) montre que

$$h^{(0)}_{c, n_1, 1}(x, y, \lambda) = u_1(x) v_1(y) + u_2(x) v_2(y) + \ldots + u_{n_0}(x) v_{n_0}(y).$$

Donc, si l'on considère un déterminant partiel tel que $a_0 > n_0$, en développant ce déterminant à l'aide de la règle de Laplace par rapport aux a_0 colonnes contenant $h^{(0)}_{c, n_1, 1}$, on voit qu'il se compose d'une somme de termes identiquement nuls.

Les termes T' de $\mathrm{P}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ correspondant aux déterminants partiels considérés dans cette seconde hypothèse sont donc identiquement nuls pour $\lambda = c$.

3° Finalement pour trouver l'expression de $\mathrm{P}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix} \middle| c\right)$, on aura seulement à considérer les valeurs suivantes des nombres a :

$$a_1 = n_1, \quad a_2 = n_2, \quad \ldots, \quad a_q = n_q, \quad a_{q+1} = 0.$$

Désignons par $\mathrm{D}_{\mathrm{K}}(\lambda)$ la fonction déterminante du noyau unique $\mathrm{K}(x, y)$, on obtient alors en vertu de (73)

$$\mathrm{P}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_p \end{matrix} \middle| c\right) = \frac{(-1)^{p(n_1-1)}}{c^p} [\mathrm{D}_{\mathrm{K}}(c)]^{n_1} \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1(x_1) & \mathrm{A}_2(x_1) & \ldots & \mathrm{A}_p(x_1) \\ \mathrm{A}_1(x_2) & \mathrm{A}_2(x_2) & \ldots & \mathrm{A}_p(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{A}_1(x_p) & \mathrm{A}_2(x_p) & \ldots & \mathrm{A}_p(x_p) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \mathrm{B}_1(y_1) & \mathrm{B}_2(y_1) & \ldots & \mathrm{B}_p(y_1) \\ \mathrm{B}_1(y_2) & \mathrm{B}_2(y_2) & \ldots & \mathrm{B}_p(y_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{B}_1(y_p) & \mathrm{B}_2(y_p) & \ldots & \mathrm{B}_p(y_p) \end{vmatrix},$$

$\mathrm{A}_1(x)$, $\mathrm{A}_2(x)$, $\ldots$, $\mathrm{A}_p(x)$ désignant les p fonctions $\mathrm{A}^{(0)}_i(x)$ et $\mathrm{B}_1(y)$, $\mathrm{B}_2(y)$, $\ldots$, $\mathrm{B}_p(y)$ désignant les p fonctions $\mathrm{B}^{(0)}_i(y)$.

Les deux déterminants du second membre de cette dernière égalité ne sont pas identiquement nuls, en vertu de l'indépendance, d'une part des p fonctions $\mathrm{A}_i(x)$, d'autre part des p fonctions $\mathrm{B}_i(y)$.

Donc

$$P\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_p \end{pmatrix} c \neq 0.$$

Cette inégalité établit la proposition énoncée au début du n° **25**.

26. Nous pouvons enfin résoudre le problème objet du présent Chapitre.

D'une part on déduit de la résolution des systèmes d'équations intégrales linéaires homogènes de deuxième espèce (n° **18**) que les fonctions $\varphi_{n_1}(x)$ qui satisfont au système (66) sont des fonctions linéaires homogènes à coefficients constants des p fonctions

$$P_i(x) = \frac{P\left(\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_p \end{array}\middle| c\right)}{P\left(\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_p \end{array}\middle| c\right)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

D'autre part les fonctions $\varphi_{n_1}(x)$ sont des fonctions linéaires et homogènes à coefficients constants des p fonctions linéairement indépendantes $A_i(x)$, puisque (n° **20**) on obtient tous les groupes principaux par une substitution linéaire à coefficients constants effectuée sur l'un d'entre eux.

Or les p fonctions $P_i(x)$ sont linéairement indépendantes; en effet supposons qu'il existe une relation de la forme

$$a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \ldots + a_p P_p(x) \equiv 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ étant des constantes non toutes nulles; faisons $x = x_i$ dans cette équation et remarquons que $P_i(x_i) = 1$ et $P_j(x_i) = 0$ pour $i \neq j$, on aura

$$a_i = 0 \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, \ldots, p,$$

égalités contraires à nos hypothèses.

Nous concluons de tout ceci que les fonctions $P_i(x)$ se déduisent des fonctions $A_i(x)$ par une substitution linéaire à coefficients constants, le déterminant de la substitution étant différent de zéro.

Les fonctions $A_i(x)$ constituant un groupe principal, les fonctions $P_i(x)$ en constituent un second.

Finalement *on aura tous les groupes principaux relatifs au noyau*

$H(x, y)$, *au nombre fondamental c et à la variable x en effectuant une substitution linéaire à coefficients constants sur les p fonctions* $P_i(x)$, *le déterminant de la substitution étant différent de zéro.*

De même *on aura tous les groupes principaux relatifs au noyau* $H(x, y)$ *au nombre fondamental c et à la variable y en effectuant une substitution linéaire à coefficients constants sur les p fonctions*

$$Q_i(y) = \frac{P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \ldots, y_p \end{matrix} \middle| c\right)}{P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_p \end{matrix} \middle| c\right)},$$

le déterminant de la substitution étant différent de zéro.

CHAPITRE V.

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES DE TROISIÈME ESPÈCE.

27. Nous avons vu (n° **16**) que l'étude des systèmes d'équations intégrales linéaires de troisième espèce

$$(75) \quad \varphi_\mu(x) = f_\mu(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_0^1 \frac{K_{\mu\nu}(x, s)}{A(s)} \varphi_\nu(s)\, ds \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

où $A(s)$ s'annule pour des valeurs isolées de s en nombre fini comprises entre 0 et 1, est corrélative de celle de l'équation intégrale linéaire de troisième espèce

$$(76) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^m H(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

les fonctions $f(x)$, $H(x, s)$ étant définies par les relations (39).

En conséquence, nous nous proposons de reprendre ici, en les complétant sur certains points, quelques théorèmes déjà connus concernant l'équation intégrale linéaire unique de troisième espèce. Nous appliquerons ensuite ces théorèmes au système (75) en utilisant les résultats du troisième Chapitre.

28. Nous étudierons tout d'abord ce que devient la solution de

l'équation

$$(77) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{K(x, s)}{(s-a)^p} \varphi(s)\, ds$$

quand a est compris entre o et 1.

Nous nous placerons au point de vue de M. E. Picard [1]. Nous supprimerons du champ d'intégration (o — 1) l'intervalle $a - \varepsilon$ à $a + \eta$ (ε et η étant deux quantités positives aussi petites qu'on veut et non nulles); nous désignerons par E le nouveau champ ainsi défini; l'équation de seconde espèce

$$(78) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E \frac{K(x, s)}{(s-a)^p} \varphi(s)\, ds$$

admettra en général une solution unique. Nous chercherons ensuite s'il existe une ou plusieurs limites de la solution en question quand ε et η tendent vers zéro.

Nous considérerons successivement et uniquement les cas particuliers suivants :

Premier cas. — $p < 1$ et $f(x)$, $K(x, y)$ fonctions bornées et intégrables dans le domaine $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$.

Deuxième cas. — p quelconque et $f(x)$, $K(x, y)$ fonctions holomorphes de x et y dans le domaine complexe à contour simple (S) du plan de ces variables contenant le segment réel (o, 1).

29. Premier cas. — $p < 1$ et $f(x)$, $K(x, y)$ *bornés et intégrables dans le domaine* $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$.

Soit $|K(x, y)| \leqq M$ dans le domaine $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$.

Considérons la série définie par l'égalité (5) et relative à l'équation (78). Désignons-la par $D(\lambda, \varepsilon, \eta)$. Son terme général de rang ϖ : $T_\varpi(\varepsilon, \eta)$ a un module moindre que

$$\frac{\lambda^\varpi M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}}}{\varpi} \left\{ \left| \int_0^{a-\varepsilon} \frac{ds}{(s-a)^p} \right| + \left| \int_{a+\eta}^1 \frac{ds}{(s-a)^p} \right| \right\}^\varpi,$$

d'après le théorème de M. Hadamard sur la valeur absolue d'un déter-

---

[1] E. Picard, *Annales de l'École Normale*, 1911. Mémoire déjà cité.

minant et d'après la formule élémentaire ([1])

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx < A\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

où $a < b$, A limite supérieure de $f(x)$ et $\varphi(x)$ fonction positive entre a et b.

Or le terme entre accolades est inférieur à

$$A = \frac{1}{1-p}\left(|a^{1-p}| + |\overline{1-a}^{1-p}| + 2|\alpha^{1-p}|\right)$$

pour toutes valeurs de ε et η moindres que α quantité positive inférieure à $|a|$ et $|1-a|$, et la série de modules

$$u_\varpi = \frac{|\lambda|^\varpi M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}} A^\varpi}{\varpi!}$$

est convergente, car

$$\lim_{\varpi=\infty} \frac{u_{\varpi+1}}{u_\varpi} = \lim_{\varpi=\infty}\left\{|\lambda| MA\sqrt{\left(1+\frac{1}{\varpi}\right)^\varpi}\frac{1}{\sqrt{\varpi+1}}\right\} = 0.$$

Il en résulte que la série $D(\lambda, \varepsilon, \eta)$ est d'une part entière en λ, d'autre part absolument et uniformément convergente, quels que soient ε et η compris entre 0 et α.

On sait de plus que $T_\varpi(\varepsilon, \eta)$ a une limite quand ε et η tendent vers zéro puisque $p < 1$ et

$$\left| K\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix} \right| < M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}}.$$

On peut donc déterminer un nombre θ_ϖ positif, plus petit que α et tel que, si

$$\theta_\varpi \geqq \varepsilon \geqq \varepsilon_1, \qquad \theta_\varpi \geqq \eta \geqq \eta_1,$$

on ait

$$|T_\varpi(\varepsilon, \eta) - T_\varpi(\varepsilon_1, \eta_1)| \leqq \frac{\mu}{3p+1},$$

μ étant une quantité positive, aussi petite que l'on veut, donnée à l'avance.

([1]) *Voir* E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 7.

Soit θ le plus petit des nombres $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_p$ et supposons

$$\theta \geqq \varepsilon, \qquad \theta \geqq \eta;$$

on aura

$$\left| \sum_0^p T_\varpi(\varepsilon, \eta) - \sum_0^p T_\varpi(\varepsilon_1, \eta_1) \right| \leqq \frac{\mu}{3}$$

pour toutes valeurs de ε_1, η_1 satisfaisant aux inégalités

$$\varepsilon_1 < \varepsilon, \qquad \eta_1 < \eta.$$

Comme il résulte de la convergence uniforme de la série $D(\lambda, \varepsilon, \eta)$ qu'on peut choisir p tel que simultanément

$$\left| D(\lambda, \varepsilon, \eta) - \sum_0^p T_\varpi(\varepsilon, \eta) \right| \leqq \frac{\mu}{3},$$

$$\left| D(\lambda, \varepsilon_1, \eta_1) - \sum_0^p T_\varpi(\varepsilon_1, \eta_1) \right| \leqq \frac{\mu}{3},$$

on en conclura que

$$| D(\lambda, \varepsilon, \eta) - D(\lambda, \varepsilon_1, \eta_1) | \leqq \mu.$$

Cette inégalité met en évidence que la suite $D(\lambda, \varepsilon, \eta)$ tend vers une limite finie et déterminée quand ε et η tendent vers zéro.

On établirait de même que $D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix} \middle| \lambda, \varepsilon, \eta \right)$ mineur du $q^{\text{ième}}$ ordre de $D(\lambda, \varepsilon, \eta)$ tend vers une limite finie et déterminée quand ε et η tendent vers zéro.

De là la proposition suivante :

La méthode de Fredholm, pour la résolution de l'équation intégrale linéaire de seconde espèce, s'applique sans modification à la résolution des équations de troisième espèce du type (77) *quand* $p < 1$, et lorsqu'on entend par résoudre (77) chercher la limite de la solution de (78) pour ε et η tendant vers zéro.

50. Nous rattacherons à ce cas un important théorème de Henri Poincaré (¹), au sujet de l'équation de Fredholm de seconde espèce à limites infinies.

(¹) H. POINCARÉ, *Acta mathematica*, t. XXXIII. Mémoire déjà cité.

Considérons l'équation

$$(79) \qquad \psi(y) - \lambda \int_1^\infty \mathrm{H}(y, t)\psi(t)\,dt = g(y),$$

où

$$|\mathrm{H}(y, t)| < \mathrm{M}\,t^{-q},$$

M étant une quantité finie, y et t pouvant varier de 1 à l'∞, q étant un nombre plus grand que 1.

H. Poincaré a montré qu'*avec ces hypothèses l'équation* (79) *est résoluble par la méthode de Fredholm.*

Pour établir à nouveau ce théorème, posons

$$x = \frac{1}{y}, \qquad s = \frac{1}{t};$$

$$\varphi(x) = \psi\left(\frac{1}{x}\right), \qquad f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\mathrm{H}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{s}\right) = s^q\,\mathrm{K}(x, s).$$

L'équation (79) peut s'écrire

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \frac{\mathrm{K}(x, s)}{s^{2-q}}\varphi(s)\,ds = f(x)$$

et de plus $|\mathrm{K}(x, s)| < \mathrm{M}$ et $2 - q < 1$.

L'équation (79) est donc ramenée à une équation du type étudié dans le numéro précédent et le théorème de H. Poincaré résulte immédiatement de cette remarque.

51. Deuxième cas. — *p quelconque; $f(x)$ et $\mathrm{K}(x, y)$ fonctions holomorphes de x et y dans* (S).

Désignons encore par $\mathrm{D}(\lambda, \varepsilon, \eta)$ la fonction déterminante de l'équation (78) et par $\mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| \lambda, \varepsilon, \eta\right)$ son mineur d'ordre q.

La solution de (78) est en général donnée par la formule

$$(80) \qquad \varphi(x, \varepsilon, \eta) = f(x) + \frac{\lambda \int_\Gamma \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle| \lambda, \varepsilon, \eta\right) f(s)\,ds}{\mathrm{D}(\lambda, \varepsilon, \eta)}.$$

Nous allons chercher ce que devient le second terme de cette somme quand ε et η tendent vers zéro.

32. Nous ferons la remarque préliminaire suivante sur la fonction $K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \dots, y_\varpi \end{pmatrix}$.

Si l'on fait $x_i = x_j$ dans cette fonction, elle devient identiquement nulle, car le déterminant qui la définit a deux lignes identiques.

Il en résulte que $K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \dots, y_\varpi \end{pmatrix}$ *est divisible par le déterminant de Vandermonde :*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{\overline{\varpi-1}} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{\overline{\varpi-1}} \\ . & .. & .. & \dots & \dots \\ 1 & x_\varpi & x_\varpi^2 & \dots & x_\varpi^{\overline{\varpi-1}} \end{vmatrix},$$

lequel est identique à

$$\begin{vmatrix} 1 & (x_1-a) & (x_1-a)^2 & \dots & (x_1-a)^{\overline{\varpi-1}} \\ 1 & (x_2-a) & (x_2-a)^2 & \dots & (x_2-a)^{\overline{\varpi-1}} \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (x_\varpi-a) & (x_\varpi-a)^2 & \dots & (x_\varpi-a)^{\overline{\varpi-1}} \end{vmatrix}$$

quel que soit a.

Il suffit de développer ce dernier déterminant pour en déduire que $K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \dots, y_\varpi \end{pmatrix}$ peut être mis sous la forme

$$\sum_{(i)} (x_{i_1}-a)(x_{i_2}-a)^2 \dots (x_{i_{\varpi-1}}-a)^{\overline{\varpi-1}} \alpha_{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_\varpi; y_1, y_2, \dots, y_\varpi),$$

(i) désignant une permutation simple $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{\varpi-1}$ des ϖ nombres 1, 2, ..., ϖ et $\alpha_{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_\varpi; y_1, y_2, \dots, y_\varpi)$ une fonction holomorphe des 2ϖ variables x_j, y_j.

Il en résulte que si $\varpi \geqq q$ et q entier, on peut écrire

$$(81)\qquad \frac{K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \dots, y_\varpi \end{pmatrix}}{(x_1-a)^q (x_2-a)^q \dots (x_\varpi-a)^q} = \sum_{i} \frac{A_{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_\varpi; y_1, y_2, \dots, y_\varpi)}{(x_{i_0}-a)^q (x_{i_1}-a)^{q-1} (x_{i_2}-a)^{q-2} \dots (x_{i_{q-1}}-a)},$$

$A_{(i)}$ étant une fonction holomorphe des 2ϖ variables x_j, y_j.

53. Supposons q entier tel que

$$q - 1 < p \leqq q \leqq \varpi,$$

et considérons le terme général $T_\varpi(\varepsilon, \eta)$ de $D(\lambda, \varepsilon, \eta)$.

En raison : 1° de la symétrie en $s_1, s_2, \ldots, s_\varpi$ de l'intégrale multiple entrant dans l'expression de $T_\varpi(\varepsilon, \eta)$; 2° de la non-importance du nom des variables au point de vue de l'intégration, et 3° de la formule (81), on peut écrire

$$T_\varpi(\varepsilon, \eta) = \frac{(-\lambda)^\varpi}{\varpi!} \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_\varpi$$
$$\times \frac{B_q^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_\varpi)(s_{q+1}-a)^{q-p}(s_{q+2}-a)^{q-p}\ldots(s_\varpi - a)^{q-p}}{(s_1-a)^{p-q+1}(s_2-a)^{p-q+2}\ldots(s_q-a)^p},$$

$B_q^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_\varpi)$ étant une fonction holomorphe en $s_1, s_2, \ldots, s_\varpi$ dans l'aire (S) du plan de chacune de ces variables.

Cherchons une limite supérieure de $B_q^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_\varpi)$.

Pour cela reportons-nous à l'égalité (81) et dans $K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix}$ remplaçons $K(x, y)$ par le développement en série de Taylor limitée :

$$K(a, y) + \frac{x-a}{1} K'_x(a, y) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-a)^{q-1}}{(q-1)!} K_{x^{q-1}}^{(q-1)}(a, y) + \frac{(x-a)^q}{q!} K_{x^q}^{(q)}[a + \theta(x-a), y].$$

Nous considérerons ensuite chaque ligne du déterminant

$$K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix}$$

comme la somme de $q+1$ lignes et nous le décomposerons en une somme de $\overline{q+1}^\varpi$ déterminants : les uns seront nuls comme ayant deux lignes identiques, les autres nous permettent de calculer les fonctions $A_{(i)}$.

Les termes des fonctions $A_{(i)}$ que donnent ces derniers déterminants sont chacun en valeur absolue inférieurs à $M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}}$ (M désigne ici une limite supérieure de $K(x, y)$ et de ses q premières dérivées par rapport à x pour $0 \leqq x \leqq 1$ et $0 \leqq y \leqq 1$).

De ces remarques on peut donc conclure que

$$|B_q^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_\varpi)| < (q+1)^\varpi M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}}.$$

Posons alors

$$\begin{aligned} &u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, \varepsilon, \eta) \\ &\quad = \int_E ds_{q+1} \int_L ds_{q+2} \ldots \int_L ds_{\varpi} (s_{q+1} - a)^{q-p} (s_{q+2} - a)^{q-p} \ldots (s_{\varpi} - a)^{q-p} \\ &\qquad\qquad \times B_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}) \end{aligned}$$

et

$$U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta) = \sum_{\varpi = q}^{\varpi = \infty} \frac{(-\lambda)^{\varpi}}{\varpi!} u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, \varepsilon, \eta).$$

Cette série est, d'une part, entière en λ, et d'autre part absolument et uniformément convergente pour ε et η positifs ou nuls inférieurs à $|a|$ et $|1 - a|$ et pour $s_1, s_2, \ldots, s_q$ situés dans le domaine S du plan de chacune de ces variables.

En effet, la valeur absolue de chacun de ses termes est alors inférieure au terme correspondant de la série à termes positifs indépendants de ε, η, $s_1, s_2, \ldots, s_q$,

$$\sum_{\varpi = q}^{\varpi = \infty} \frac{|\lambda|^{\varpi}}{\varpi!} (q+1)^{\varpi} M^{\varpi} \varpi^{\frac{\varpi}{2}},$$

et cette dernière série est convergente, car le rapport d'un terme au précédent

$$|\lambda| (q+1) M \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varpi}\right)^{\varpi}} \frac{1}{\sqrt{\varpi + 1}}$$

tend vers zéro quand ϖ croît indéfiniment.

Ceci posé, on sait que $u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, \varepsilon, \eta)$ fonction holomorphe de $s_1, s_2, \ldots, s_q$ a pour limite $u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, 0, 0)$ quand ε et η tendent vers zéro. On peut donc déterminer un nombre θ_{ϖ} tel que si ε et η sont inférieurs à θ_{ϖ}, on ait

$$\frac{|\lambda^{\varpi}|}{\varpi!} \left| u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, \varepsilon, \eta) - u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, 0, 0) \right| \leqq \frac{\mu}{3n+1},$$

μ étant une quantité positive, aussi petite que l'on veut, donnée à l'avance.

Soit θ le plus petit des nombres $\theta_q, \theta_{q+1}, \ldots, \theta_{q+n}$ et supposons

$$\varepsilon \leqq \theta, \qquad \eta \leqq \theta,$$

on aura

$$\left| \sum_{\varpi=q}^{\varpi=q+n} \frac{(-\lambda)^\varpi}{\varpi!} u_q^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_q, \varepsilon, \eta) - \sum_{\varpi=q}^{\varpi=q+n} \frac{(-\lambda)^\varpi}{\varpi!} u_q^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_q, 0, 0) \right| \leq \frac{\mu}{3}.$$

Comme il résulte de la convergence uniforme de la série

$$U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)$$

qu'on peut choisir n de telle sorte qu'on ait simultanément les inégalités

$$\left| U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0) - \sum_{\varpi=q}^{\varpi=q+n} \frac{(-\lambda)^\varpi}{\varpi!} u_q^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_q, 0, 0) \right| < \frac{\mu}{3},$$

$$\left| U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta) - \sum_{\varpi=q}^{\varpi=q+n} \frac{(-\lambda)^\varpi}{\varpi!} u_q^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_q, \varepsilon, \eta) \right| < \frac{\mu}{3},$$

on en conclura que

$$| U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta) - U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0) | < \mu.$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \eta \to 0}} U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta) = U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0).$$

Notons enfin que les séries

$$U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta) \quad \text{et} \quad U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0)$$

sont formées de termes qui sont des fonctions holomorphes de s_1, s_2, ..., s_q dans le domaine (S) du plan de chacune de ces variables. Comme, de plus, ce sont des séries uniformément convergentes, les séries en question sont elles-mêmes des fonctions holomorphes de s_1, s_2, ..., s_q dans les mêmes domaines respectifs (S).

Finalement, *on peut écrire*

$$(82)\quad \begin{aligned} D(\lambda, \varepsilon, \eta) = 1 + \sum_{\varpi=1}^{\varpi=q-1} \frac{(-\lambda)^\varpi}{\varpi!} & \times \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_\varpi \frac{u_\varpi^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_\varpi, \varepsilon, \eta)}{(s_1 - a)^{p-\varpi+1}(s_2-a)^{p-\varpi+2}\ldots(s_\varpi - a)^p} \\ & + \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_q \frac{U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)}{(s_1 - a)^{p-q+1}(s_2-a)^{p-q+2}\ldots(s_q-a)^p}, \end{aligned}$$

les fonctions $u_{\varpi}^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}, \varepsilon, \eta)$ *et la série entière en* λ

$$U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)$$

étant, pour ε *et* η *suffisamment petits positifs ou nuls, des fonctions holomorphes en* $s_1, s_2, \ldots, s_q$ *dans le domaine* (S), *qui tendent respectivement vers les fonctions* $u_{\varpi}^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}, 0, 0)$ *et la série entière en* λ $U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0)$ *quand* ε *et* η *tendent vers zéro.*

54. On établirait d'une façon analogue que l'*on peut écrire :*

(83)
$$
\begin{aligned}
&D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda, \varepsilon, \eta\right) \\
&= \frac{K(x, y)}{(y-a)^p} + \sum_{\varpi=1}^{\varpi=q-1} \frac{(-\lambda)^{\varpi}}{\varpi!} \\
&\quad \times \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_{\varpi} \frac{v_{\varpi}^{\varpi}(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{p-\varpi+1}(s_2-a)^{p-\varpi+1}\ldots(s_{\varpi}-a)^p} \\
&\quad + \sum_{\varpi=1}^{\varpi=q-1} \frac{(-\lambda)^{\varpi}}{\varpi!} \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_{\varpi} \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{i=\varpi} \frac{v_{\varpi}^{\varpi, i}(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{p-\varpi+1}\ldots(s_{i-1}-a)^{p-\varpi+i-1}(y-a)^{p-\varpi+i}(s_{i+1}-a)^{p-\varpi+i+1}\ldots(s_{\varpi}-a)^p} \\
&\quad + \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_q \frac{V_q(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{p-q+1}(s_2-a)^{p-q+2}\ldots(s_q-a)^p} \\
&\quad + \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_q \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{i=\varpi} \frac{V_q^i(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{p-q+1}\ldots(s_{i-1}-a)^{p-q+i-1}(y-a)^{p-q+i}(s_{i+1}-a)^{p-q+i+1}\ldots(s_q-a)^p}
\end{aligned}
$$

les fonctions $v_{\varpi}^{\varpi}(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}, \varepsilon, \eta)$, $v_{\varpi}^{\varpi i}(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}, \varepsilon, \eta)$, *et les séries entières en* λ, $V_q(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)$, $V_q^i(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)$, *étant, pour* ε *et* η *suffisamment petits positifs ou nuls, des fonctions, holomorphes en* $x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q$ *dans le domaine* S *du plan de ces variables, qui tendent respectivement vers les fonctions* $v_{\varpi}^{\varpi}(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}, 0, 0)$, $v_{\varpi}^{\varpi i}(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}, 0, 0)$, *et vers les séries entières en* λ, $V_q(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0)$, $V_q^i(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0)$ *quand* ε *et* η *tendent vers zéro.*

53. Nous sommes maintenant à même d'étudier la limite de la fonction

$$R(x, \lambda, \varepsilon, \eta) = \frac{\lambda \int_E D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda, \varepsilon, \eta\right) f(s)\, ds}{D(\lambda, \varepsilon, \eta)},$$

quand ε et η tendent vers zéro.

Remplaçons dans ce quotient les fonctions $D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda, \varepsilon, \eta\right)$ et $D(\lambda, \varepsilon, \eta)$ par leurs expressions (82) et (83). Le numérateur et le dénominateur se composent d'une somme d'intégrales multiples (I) et les fonctions à intégrer par rapport à $s, s_1, s_2, \ldots, s_q$ sont de la forme

$$(\mathrm{F}) \qquad \frac{f(s, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)}{(s-a)^{\alpha}(s_1-a)^{\alpha_1}(s_2-\alpha)^{\alpha_2}\ldots(s_q-a)^{\alpha_q}},$$

$f(s, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)$ étant holomorphe en $s, s_1, s_2, \ldots, s_q$ et tendant vers $f(s, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0)$ quand ε et η tendent vers zéro.

Soient $\beta, \beta_1, \ldots, \beta_q$ les entiers immédiatement supérieurs à $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$. Nous développerons les fonctions $f(s, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)$ en série de Taylor limitée aux termes de rang β par rapport à s, puis les termes obtenus en séries de Taylor limitées aux termes de rang β_1 par rapport à s_1, etc., de proche en proche jusqu'à la variable s_q.

Les fractions (F) se décomposent ainsi en une somme de fractions; effectuons sur chacune de ces fractions composantes entrant dans les intégrales (I) les intégrations par rapport à celles des variables $s, s_1, \ldots, s_q$ qui ne figurent pas dans leurs dénominateurs.

Le quotient $R(x, \lambda, \varepsilon, \eta)$ se présentera alors sous la forme suivante

$$R(x, \lambda, \varepsilon, \eta) = \frac{\displaystyle\sum_{(i)} \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_q \frac{a_{(i)}(x, \lambda, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{i_1}(s_2-a)^{i_2}\ldots(s_q-a)^{i_q}}}{\displaystyle\sum_{(i)} \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_q \frac{b_{(i)}(\lambda, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{i_1}(s_2-a)^{i_2}\ldots(s_q-a)^{i_q}}}$$

avec la convention $\int_E \frac{ds}{(s-a)^p} = 1$.

(i) représente ici le groupement des q nombres $i_1, i_2, \ldots, i_q$ et les sommes $\sum_{(i)}$ sont étendues à tous les groupements (i) obtenus en don-

nant à $i_1, i_2, \ldots, i_q$ les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
&i_1 : 0, 1+p-q,\\
&i_2 : 0, 1+p-q, 2+p-q,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&i_q : 0, 1+p-q, 2+p-q, \ldots, q+p-q.
\end{aligned}$$

Les fonctions $a_{(i)}(x, \lambda, \varepsilon, \eta)$, $b_{(i)}(\lambda, \varepsilon, \eta)$ sont entières en λ et tendent respectivement vers les fonctions entières en λ, $a_{(i)}(x, \lambda, 0, 0)$, $b_{(i)}(\lambda, 0, 0)$ quand ε et η tendent vers zéro.

Nous désignerons spécialement par $A(x, \lambda, \varepsilon, \eta)$, $B(\lambda, \varepsilon, \eta)$ celles des fonctions $a_{(i)}(x, \lambda, \varepsilon, \eta)$, $b_{(i)}(\lambda, \varepsilon, \eta)$ qui correspondent au groupement (i),

$$i_1 = 1+p-q, \quad i_2 = 2+p-q, \quad i_3 = 3+p-q, \quad \ldots, \quad i_q = q+p-q,$$

et par $A_1(x, \lambda, \varepsilon, \eta)$, $B_1(\lambda, \varepsilon, \eta)$ celles qui correspondent au groupement (i),

$$i_1 = 0, \quad i_2 = 2+p-q, \quad i_3 = 3+p-q, \quad \ldots, \quad i_q = q+p-q.$$

Quand ε et η tendent vers zéro $R(x, \lambda, \varepsilon, \eta)$ se présente en général sous la forme $\frac{\infty}{\infty}\cdot$ Mais, si $\log\frac{\varepsilon}{\eta}$ tend vers un nombre C ni nul, ni infini, le numérateur et le dénominateur de cette fraction croissent en général tous deux, comme la même puissance de $\frac{1}{\varepsilon}$, et l'on a alors :

1° D'une part, si p non entier,

$$\lim R(x, \lambda, \varepsilon, \eta) = \frac{A(x, \lambda, 0, 0)}{B(\lambda, 0, 0)};$$

2° D'autre part, si p entier égal à q,

$$\lim R(x, \lambda, \varepsilon, \eta) = \frac{A_1(x, \lambda, 0, 0) + CA(x, \lambda, 0, 0)}{B_1(\lambda, 0, 0) + CB(\lambda, 0, 0)}.$$

En rapprochant ces résultats du cas de $p < 1$ (n° **29**), on peut énoncer le théorème suivant :

La solution $\varphi(x, \varepsilon, \eta)$ [formule (80)] *de l'équation* (78) *tend vers une limite finie quand* ε *tend vers zéro et la quantité* $\log\frac{\varepsilon}{\eta}$ *vers une limite ni nulle, ni infinie* C.

Cette solution dépend homographiquement du paramètre C *quand* p *est entier.*

Si $p \geqq 1$, cette conclusion suppose $K(x, y)$ holomorphe pour x et y dans le domaine (S). Si $p < 1$, elle suppose uniquement cette fonction bornée et intégrable dans (S).

Remarquons enfin que pour $p = 1$ cette proposition n'est autre que le théorème bien connu de M. E. Picard ([1]).

56. Nous allons maintenant étudier dans le domaine complexe une classe particulière d'équations intégrales de deuxième espèce ayant des rapports importants avec certaines équations du type (77) où p est entier, et cela en nous plaçant à un point de vue auquel s'est déjà placé M. Lalesco ([2]) quand $p = 1$.

Soient $g(z)$ et $K(z, t)$ des fonctions holomorphes en z et t dans le domaine (S) du plan de ces variables et soit p un entier. La classe en question a pour type l'équation

$$(z-a)^p[\theta(z) - g(z)] = \lambda \int_\Lambda K(z, t)\,\theta(t)\,dt,$$

où Λ désigne un contour d'extrémités fixes A, B du plan complexe de la variable t, tout entier situé dans le domaine S du plan de cette variable et ne passant pas par le point $t = a$ du domaine S, mais pouvant entourer ce point n_1 fois dans le sens positif et n_2 fois dans le sens négatif.

En posant

$$(z-a)^p\,\theta(z) = \varphi(z),$$

on peut écrire l'équation en question

$$\varphi(z) = (z-a)^p g(z) + \lambda \int_\Lambda \frac{K(z, t)}{(t-a)^p}\,\varphi(t)\,dt. \tag{84}$$

Pour Λ donné la fonction $\varphi(z)$ est en général définie dans le domaine (S) du plan de la variable z par l'égalité

$$\varphi(z) = (z-a)^p g(z) + \lambda \int_\Lambda \frac{D_\Lambda\left(\begin{matrix} z \\ t \end{matrix}\middle|\,\lambda\right)}{D_\Lambda(\lambda)}\,(t-a)^p g(t)\,dt, \tag{85}$$

([1]) E. Picard, *Annales de l'École Normale*, 1911. Mémoire déjà cité.

([2]) T. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, p. 120.

où

$$(86)\quad D_\Lambda\left(\begin{matrix} z_1, z_2, \ldots, z_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_q \end{matrix}\middle| \lambda\right) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^\varpi}{\varpi!} \int_\Lambda ds_1 \int_\Lambda ds_2 \ldots \int_\Lambda ds_\varpi \frac{K\left(\begin{matrix} z_1, z_2, \ldots, z_q; s_1, s_2, \ldots s_\varpi \\ t_1, t_2, \ldots, t_q; s_1, s_2, \ldots s_\varpi \end{matrix}\right)}{(t_1-a)^p\ldots(t_q-a)^p(s_1-a)^p\ldots(s_\varpi-a)^p}.$$

La méthode de résolution de l'équation de Fredholm est, en effet, applicable à l'équation (85), à condition de substituer aux intégrales rectilignes $\int_0^1$ les intégrales curvilignes $\int_\Lambda$.

Nous allons chercher comment varie la fonction $D_\Lambda(\lambda)$ et ses mineurs et par suite la fonction $\varphi(z)$ quand Λ varie, A et B restant fixes.

Partageons pour cela la ligne Λ en deux parties, l'une comprenant toutes les boucles de Λ entourant le point $t=a$, nous l'appellerons C; l'autre constituée par une ligne L joignant A et B sans entourer le point a.

L'égalité (86) nous permet d'écrire

$$D_\Lambda(\lambda) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} (-\lambda)^\varpi \sum_{\substack{\alpha+\beta=\varpi}}^{\substack{\beta=\varpi \text{ à } 0\\ \alpha=0 \text{ à } \varpi}} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \int_C ds_1 \int_C ds_2 \ldots \int_C ds_\alpha \int_L dt_1 \int_L dt_2 \ldots \int_L dt_\beta$$
$$\times \frac{K\left(\begin{matrix} s_1, s_2, \ldots, s_\alpha; t_1, t_2, \ldots, t_\beta \\ s_1, s_2, \ldots, s_\alpha; t_1, t_2, \ldots, t_\beta \end{matrix}\right)}{(s_1-a)^p\ldots(s_\alpha-a)^p(t_1-a)^p\ldots(t_\beta-a)^p}.$$

Effectuons les intégrations suivant la ligne d'intégration C en appliquant le théorème des résidus et en posant $n = n_1 - n_2$

$$(87)\quad D_\Lambda(\lambda) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} (-\lambda)^\varpi \sum_{\substack{\alpha+\beta=\varpi}}^{\substack{\beta=\varpi \text{ à } 0\\ \alpha=0 \text{ à } \varpi}} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \int_L dt_1 \int_L dt_2 \ldots \int_L dt_\beta$$
$$\times \frac{\left[\dfrac{2n\pi i}{(p-1)!}\right]^\alpha}{(t_1-\alpha)^p(t_2-\alpha)^p\ldots(t_\beta-\alpha)^p}$$
$$\times \left[\frac{\partial^{\alpha(p-1)} K\left(\begin{matrix} s_1, \ldots, s_\alpha; t_1, \ldots, t_\beta \\ s_1, \ldots, s_\alpha; t_1, \ldots, t_\beta \end{matrix}\right)}{\partial s_1^{p-1}\,\partial s_2^{p-1}\ldots\partial s_\alpha^{p-1}}\right]_{s_i=a}.$$

Étudions le terme général de cette nouvelle série et pour cela formons le Tableau

$$(\mathrm{T})\quad\left\{\begin{array}{llllll}
\dfrac{\partial^{p-1}}{\partial x_1^{p-1}}, & \dfrac{(p-1)!}{1!(p-2)!}\dfrac{\partial^{p-1}}{\partial x_1^{p-2}\partial y_1}, & \dfrac{(p-1)!}{2!(p-3)!}\dfrac{\partial^{p-1}}{\partial x_1^{p-3}\partial y_1^2}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{p-1}}{\partial y_1^{p-1}}, \\
\dfrac{\partial^{p-1}}{\partial x_2^{p-1}}, & \dfrac{(p-1)!}{1!(p-2)!}\dfrac{\partial^{p-1}}{\partial x_2^{p-2}\partial y_2}, & \dfrac{(p-1)!}{2!(p-3)!}\dfrac{\partial^{p-1}}{\partial x_2^{p-3}\partial y_2^2}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{p-1}}{\partial y_2^{p-1}}, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots, \\
\dfrac{\partial^{p-1}}{\partial x_\alpha^{p-1}}, & \dfrac{(p-1)!}{1!(p-2)!}\dfrac{\partial^{p-1}}{\partial x_\alpha^{p-2}\partial y_\alpha}, & \dfrac{(p-1)!}{2!(p-3)!}\dfrac{\partial^{p-1}}{\partial x_\alpha^{p-3}\partial y_\alpha^2}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{p-1}}{\partial y_\alpha^{p-1}},
\end{array}\right.$$

constitué par $p\alpha$ symboles de dérivations précédés d'un coefficient numérique. Prenons un symbole et un seul dans chaque ligne et faisons le produit π_j des α termes ainsi choisis comme si les ∂ des numérateurs n'étaient pas des symboles, mais des quantités. Soient S la somme d'un certain nombre de produits π_j et g une fonction des 2α variables $x_1, \ldots, x_\alpha, y_1, \ldots, y_\alpha$. Nous conviendrons de représenter par $\mathrm{S}g$ l'opération qui consiste : 1° à effectuer successivement sur g la dérivation et la multiplication par un facteur numérique que représente chaque symbole de la somme S; 2° à ajouter ensuite tous les résultats obtenus. Il y a p^α produits π_j et parmi eux

$$\theta = p(p-1)\ldots(p-\alpha+1)$$

produits π'_c qui ne contiennent pas deux facteurs d'une même colonne du Tableau T.

Posons

$$\Delta_\alpha^p = \sum_1^{p^\alpha} \pi_j, \qquad \delta_\alpha^p = \sum_1^{\theta} \pi'_c.$$

On pourra écrire

$$(88)\qquad \frac{\partial^{\alpha(p-1)} \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_\alpha; t_1, t_2, \ldots, t_\beta \\ s_1, s_2, \ldots, s_\alpha; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\beta \end{pmatrix}}{\partial s_1^{p-1}\,\partial s_2^{p-1}\ldots\partial s_\alpha^{p-1}}$$

$$= \left[\Delta_\alpha^p \mathrm{K}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\alpha; t_1, t_2, \ldots, t_\beta \\ y_1, y_2, \ldots, y_\alpha; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\beta \end{pmatrix}\right]_{x_i = y_i = s_i}.$$

Remarquons que si l'on prend la dérivée du déterminant

$$\mathrm{K}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix}$$

h fois par rapport à x_i, puis h fois par rapport à x_j et si l'on fait $x_i = x_j$, on obtient un déterminant ayant deux lignes identiques, donc

$$(89)\qquad \left[\frac{\partial^{2h} K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix}}{\partial x_i^h\, \partial x_j^h}\right]_{x_i = x_j} = 0.$$

De même

$$(90)\qquad \left[\frac{\partial^{2h} K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix}}{\partial y_i^h\, \partial y_j^h}\right]_{y_i = y_j} = 0.$$

Si maintenant on tient compte de ce que $\delta_\alpha^p = 0$ pour $\alpha > p$, car alors $\theta = 0$, l'égalité (87) peut s'écrire, en vertu de (88), (89) et (90),

$$D_A(\lambda) = D_L(\lambda) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} \frac{1}{\alpha!}\left[\frac{-2n\pi i\lambda}{(p-1)!}\right]^\alpha \times \left\{ \delta_\alpha^p \left[(y_1 - a)^p (y_2 - a)^p \ldots (y_\alpha - a)^p\, D_L\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\alpha \\ y_1, y_2, \ldots, y_\alpha \end{pmatrix} \lambda \right) \right] \right\}_{x_i = y_i = a}.$$

On démontrerait de même que

$$\begin{aligned} D_A\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_q \end{pmatrix}\lambda\Big) &= D_L\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_q \end{pmatrix}\lambda\Big) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} \frac{1}{\alpha!}\left[\frac{-2n\pi i\lambda}{(p-1)!}\right]^\alpha \\ &\quad \times \left\{ \delta_\alpha^p \left[(y_1 - a)^p (y_2 - a)^p \ldots (y_\alpha - a)^p \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. \times D_L\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_q; x_1, x_2, \ldots, x_\alpha \\ t_1, t_2, \ldots, t_q; y_1, y_2, \ldots, y_\alpha \end{pmatrix}\lambda\Big) \right] \right\}_{x_i = y_i = a}. \end{aligned}$$

De ces deux dernières égalités et des formules (85) et (86) résulte le théorème suivant [1] :

La solution (85) de l'équation (84) dans le domaine complexe (S) du plan z est une fonction polymorphe, en général quotient de deux polynomes de degré p par rapport à un paramètre entier arbitraire n.

---

[1] Ce théorème a été inséré aux *Comptes rendus*, t. 154, séance du 25 mars 1912, p. 808.

Ce théorème n'est au fond qu'une nouvelle conséquence de la propriété de la fonction $K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix}$ qui a fait l'objet du n° **52**.

Remarquons qu'il s'applique également à l'équation

$$(z-a)^p[\theta(z)-g(z)] = \lambda \int_A K(z,t)\,\theta(t)\,dt.$$

qui a même résolvante que l'équation (84). En faisant $p = 1$ dans cette dernière équation, on retrouve alors le théorème énoncé par M. Lalesco [1].

57. La conclusion du n° **29** concernant les noyaux de la forme $\frac{K(x,y)}{(y-a)^p}$ où $p < 1$ et $|K(x,y)| < M$ s'étendra facilement aux noyaux de la forme $\frac{K(x,y)}{(y-a_1)^{p_1}, \ldots, (y-a_k)^{p_k}}$ si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont compris entre 0 et 1 et $p_1, p_2, \ldots, p_k$ également inférieurs à 1.

Si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont quelconques et $K(x,y)$ holomorphe en x et y dans le domaine (S) contenant le segment réel (0, 1), on étendra également aux noyaux $\frac{K(x,y)}{(y-a_1)^{p_1}, \ldots, (y-a_k)^{p_k}}$ les conclusions du n° **53**.

En effet, soient alors $q_1, q_2, \ldots, q_k$ les entiers immédiatement supérieurs aux nombres respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Nous avons vu (n° **52**) que $K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix}$ était divisible par le déterminant de Vandermonde en $x_1, x_2, \ldots, x_\varpi$, lequel est à un facteur constant près égal à

$$\begin{vmatrix} P_1(x_1) & P_2(x_1) & \ldots & P_\varpi(x_1) \\ P_1(x_2) & P_2(x_2) & \ldots & P_\varpi(x_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ P_1(x_\varpi) & P_2(x_\varpi) & \ldots & P_\varpi(x_\varpi) \end{vmatrix},$$

$P_1(x), \ldots, P_\varpi(x)$ étant ϖ polynomes en x linéairement indépendants que nous choisirons ainsi : les $q_1 + q_2 + \ldots + q_k = 0$ polynomes

$$Q_i^j(x) = (x-a_1)^{q_1}\ldots(x-a_{i-1})^{q_{i-1}}(x-a_i)^{j-1}(x-a_{i+1})^{q_{i+1}}\ldots(x-a_k)^{q_k}$$

(i variant de 1 à k et j de 1 à q_i)

---

(1) T. Lalesco, *Introduction de la théorie des équations intégrales* (Ouvrage déjà cité).

et les $\varpi - \theta$ polynomes

$$\mathrm{R}_l(x) = (x - a_1)^{q_1} \dots (x - a_k)^{q_k} x^{l-1}$$
$$(l \text{ variant de } 1 \text{ à } \varpi - \theta).$$

Cette remarque faite, il suffira de répéter en quelque sorte les raisonnements des n^{os} **51** à **55** inclusivement pour établir la proposition suivante :

Soit E *le champ*

$$(0 \text{ à } a_1 - \varepsilon_1,\ a_1 + \eta_1 \text{ à } a_2 - \varepsilon_2,\ a_2 + \eta_2 \text{ à } a_3 - \varepsilon_3,\ \dots,\ a_k + \eta_k \text{ à } 1)$$

et soit $\varphi(x, \mathrm{E})$ *la solution de l'équation*

$$\varphi(x, \mathrm{E}) = f(x) + \lambda \int_{\mathrm{E}} \frac{\mathrm{K}(x, s)}{(s - a_1)^{p_1}(s - a_2)^{p_2} \dots (s - a_k)^{p_k}} \varphi(s, \mathrm{E})\, ds,$$

quand λ *n'est pas nombre fondamental.*

La fonction $\varphi(x, \mathrm{E})$ *tend en général vers une limite fonction méromorphe de* λ *quand le champ* E *et les quantités* $\log \frac{\varepsilon_1}{\eta_1}$, $\log \frac{\varepsilon_2}{\eta_2}$, ..., $\log \frac{\varepsilon_k}{\eta_k}$ *tendent respectivement vers le champ* $(0 - 1)$ *et vers les constantes finies non nulles* $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_k$.

La limite de $\varphi(x, \mathrm{E})$ *est homographique par rapport à ceux des paramètres* $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_k$ *dont les indices sont égaux à ceux des exposants* $p_1, p_2, \dots, p_k$ *entiers ; elle est indépendante des autres.*

Si $p \geqq 1$, cette proposition suppose $\mathrm{K}(x, y)$ holomorphe pour x et y dans le domaine (S) ; si $p < 1$, elle suppose uniquement cette fonction bornée et intégrable dans (S).

58. Si $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des entiers et $a_1, a_2, \dots, a_k$ des points réels ou non du domaine (S), si la fonction $f(z)$ admet les points $a_1, a_2, \dots, a_k$ comme zéros d'ordres respectifs $p_1, p_2, \dots, p_k$ et si les points A et B extrémités d'une ligne Λ toute entière dans (S) et ne passant pas par $a_1, a_2, \dots, a_k$ sont fixes, on généralisera d'autre part la conclusion du n^o **56** en montrant, par des raisonnements calqués sur ceux de ce numéro, que la *solution de l'équation intégrale linéaire de deuxième*

espèce

$$\varphi(z) = f(z) + \int_{\Lambda} \frac{K(z, t)}{(t-a_1)^{p_1}\ldots(t-a_k)^{p_k}} \varphi(t)\, dt,$$

où λ *n'est pas nombre fondamental, est dans* (S) *une fonction polymorphe dépendant de* k *nombres entiers* $n_1, n_2, \ldots, n_k$; *de plus, cette solution considérée comme fonction de* n_i *est en général le quotient de deux polynomes de degré* p_i.

39. Élargissons maintenant les conditions restrictives imposées au domaine (S) et aux fonctions $K(x, y)$ et $f(x)$.

Soient m contours simples Σ_i (i variant de 1 à m) qui limitent des domaines S_i du plan complexe et qui ne se coupent pas.

Soient Λ_i et L_i deux lignes d'extrémités A_i et B_i, et l_i un segment d'axe réel tout entier situés dans le domaine S_i.

Soient enfin $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des points situés dans les domaines S_i et par où ne passent point les lignes Λ_i et L_i. Dans ce qui va suivre nous pourrons, sans nuire à la généralité des raisonnements, supposer toujours $a_1, a_2, \ldots, a_k$ réels.

Considérons deux fonctions $K'(z, t)$ et $f'(z)$ que nous supposerons d'une part holomorphes en z et t pour toutes les valeurs de z et t intérieures au domaine $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_m$ du plan de ces variables et d'autre part ne pouvant présenter que des discontinuités finies quand z ou t traversent $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_m$.

Tous les raisonnements des n^{os} **28** à **35** inclus s'appliquent si l'on substitue à $K(x, y)$, $f(y)$ respectivement $K'(x, y)$ et $f'(y)$ et au champ d'intégration $(0-1)$ le champ $l_1 + l_2 + \ldots + l_m$. Tous ceux du n° **36** s'appliquent également si l'on substitue à $K(z, t)$, $f(t)$ respectivement $K'(z, t)$ et $f'(t)$, $f'(t)$ admettant les points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ comme zéros d'ordres respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et si l'on pose $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_m$ et $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_m$.

En reprenant tous ces raisonnements, on voit qu'ils subsistent encore quand les points A_i, B_i ou les extrémités de l_i sont sur le contour Σ_i et quand deux contours consécutifs Σ_i, Σ_{i+1} ont une partie commune.

40. Ces remarques faites, nous allons revenir à l'étude des sys-

tèmes d'équations intégrales linéaires (75) et voir comment se généralisent les propositions que nous avons obtenues dans ce Chapitre concernant l'équation unique.

Soit (S_1) un domaine complexe limité par un contour simple Σ_1 et tout entier compris entre les deux parallèles à l'axe imaginaire qui passent par les points réels o et 1. Nous ne nuirons pas à la généralité des raisonnements qui vont suivre en supposant que Σ_1 passe par les points o et 1.

Nous désignerons par (S_i) le domaine obtenu en faisant subir au domaine (S_1) dans la direction de l'axe réel positif une translation de longueur $i-1$ et nous désignerons respectivement par A_i, Λ_i le point et la ligne correspondant au point A_1 et à la ligne Λ_1 après la translation en question.

Soient m^2 noyaux $K_{\mu\nu}(x, y)$ (μ et ν variant de 1 à m) et $f_\mu(x)$ m fonctions holomorphes pour toutes valeurs de x et y comprises à l'intérieur du domaine (S_1) et sur son contour.

Soit enfin $A(y) = (y - a_1)^{p_1}(y - a_2)^{p_2}\ldots(y - a_k)^{p_k}$, $a_1, a_2, \ldots,$ a_k étant des points réels intérieurs à (S_1).

Les relations

$$H(x, y) = \frac{K_{\mu\nu}(x - \mu + 1, y - \nu + 1)}{A(y - \nu + 1)},$$
$$f(x) = f_\mu(x - \mu + 1),$$

valables pour toutes valeurs de x intérieures à S_μ et pour toutes valeurs de y intérieures à S_ν, permettent (n° **16**) :

1° De substituer à la résolution du système (75) pour $0 \leq x \leq 1$ la résolution de l'équation (76) pour $0 \leq x \leq m$, équation où la fonction $H(x, y)$ devient infinie comme $\left[y - \overline{a_j + \nu - 1}\right]^{p_j}$ quand $y = a_j + \nu - 1$;

2° De substituer à la résolution, pour z dans S_1, du système

$$\varphi_\mu(z) = f_\mu(z) + \lambda \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \int_{\Lambda_1} \frac{K_{\mu\nu}(z, t)}{A(t)} \varphi_\nu(t)\,dt \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

[où Λ_1 désigne une ligne de (S_1) d'extrémités $A_1 B_1$, ne passant pas par $a_1, a_2, \ldots, a_k$ et $f_\mu(z)$ une fonction qui admet respectivement p_1, $p_2, \ldots, p_k$ fois les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_k$] la résolution pour z dans

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_m$$

de l'équation

$$(91) \qquad \varphi(z) = f(z) + \lambda \int_{\Lambda} \mathrm{H}(z, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

où $\mathrm{H}(z, t)$ admet en général p_j fois les m pôles $t = a_j + \nu - 1$, où la fonction $f(z)$ admet p_j fois les points $a_j + \nu - 1$ pour zéros et où $\Lambda = \Lambda_1 + \ldots + \Lambda_m$ se compose de tronçons Λ_i d'extrémités fixes A_i, B_i ne passant pas par les pôles de $\mathrm{H}(z, t)$.

Les remarques des paragraphes **58** et **59** appliquées aux équations (76) et (91) nous permettent alors d'énoncer les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Soit* E *le champ* (0 à $a_1 - \varepsilon_1$, $a_1 + \eta_1$ à $a_2 - \varepsilon_2$, $a_2 + \eta_2$ à $a_3 - \varepsilon_3$, ..., $a_k + \eta_k$ à 1) *et soit* $\varphi_1(x, \mathrm{E})$, $\varphi_2(x, \mathrm{E})$, ..., $\varphi_m(x, \mathrm{E})$ *la solution du système d'équations*

$$\varphi_\mu(x, \mathrm{E}) = f_\mu(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_{\mathrm{E}} \frac{\mathrm{K}_{\mu\nu}(x, s)}{(s - a_1)^{p_1} \ldots (s - a_k)^{p_k}} \varphi_\nu(s, \mathrm{E})\, ds$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

quand λ *n'est pas nombre fondamental.*

Les m *fonctions* $\varphi_1(x, \mathrm{E})$, ..., $\varphi_m(x, \mathrm{E})$ *tendent en général vers des limites finies fonctions méromorphes de* λ *quand le champ* E *et les quantités* $\log \frac{\varepsilon_1}{\eta_1}$, $\log \frac{\varepsilon_2}{\eta_2}$, ..., $\log \frac{\varepsilon_k}{\eta_k}$ *tendent respectivement vers le champ* (0, 1) *et vers les constantes finies non nulles* C_1, C_2, ..., C_k.

Les limites de $\varphi_1(x, \mathrm{E})$, $\varphi_2(x, \mathrm{E})$, ..., $\varphi_m(x, \mathrm{E})$ *sont les quotients de deux polynomes de degré* m *par rapport à ceux des paramètres* C_1, C_2, ..., C_k *dont les indices sont égaux à ceux des exposants* p_1, p_2, ..., p_k *entiers ; elle est indépendante des autres.*

Si un des nombres p_1, p_2, ..., p_k est ≥ 1, cette proposition suppose que les fonctions $\mathrm{K}_{\mu\nu}(x, y)$ sont holomorphes pour x et y dans le domaine (S_1) ; si tous ces nombres sont < 1, elle suppose uniquement ces fonctions bornées et intégrables dans (S_1).

Théorème II. — *Le système d'équations intégrales de seconde*

espèce

$$\varphi_\mu(z) = f_\mu(z) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_{\Lambda_1} \frac{K_{\mu\nu}(z, t)}{(t-a_1)^{p_1}(t-a_2)^{p_2}\dots(t-a_k)^{p_k}} \varphi_\nu(t)\,dt$$
$$(\mu = 1, 2, \dots, m),$$

où

$$f_\mu(z) = (z-a_1)^{p_1}(z-a_2)^{p_2}\dots(z-a_k)^{p_k} g_\mu(z),$$

$p_1, p_2, \dots, p_k$ entiers et λ non fondamental, a pour solution dans (S_1) m fonctions polymorphes $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_m(z)$. Ces m fonctions dépendent de k nombres entiers $n_1, n_2, \dots, n_k$, et, considérées comme fonctions de n_i, elles sont en général le quotient de deux polynomes de degré mp_i.

NOTE SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES.

41. Rappelons *quelques propriétés bien connues des équations différentielles linéaires.*

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \dots + p_n(x)u = 0. \tag{92}$$

Soient $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, n solutions linéaires indépendantes de cette équation; faisons-leur correspondre respectivement les fonctions $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ définies par l'égalité

$$v_i(x) = \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}, \tag{93}$$

où $\Delta(x)$ désigne le déterminant

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \frac{du_1}{dx} & \frac{du_2}{dx} & \dots & \frac{du_n}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}u_2}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

et $\Delta_i(x)$ le mineur de ce déterminant correspondant au terme de la colonne i de la dernière ligne.

On sait que

$$(94) \qquad \Delta(x) = C e^{-\int p_1(x)\,dx},$$

où C désigne une constante et que $v_1(y)$, $v_2(y)$, ..., $v_n(y)$ sont n solutions linéairement indépendantes de l'équation adjointe (¹) à l'équation (92)

$$(95) \qquad (-1)^n \frac{d^n v}{dy^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}[p_1(y)v]}{dy^{n-1}} + \ldots + \frac{d^2[p_{n-2}(y)v]}{dy^2} - \frac{d[p_{n-1}(y)v]}{dy} + p_n(y)v = 0.$$

Nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que l'équation (92) admet, dans le champ (S) de la variable complexe x contenant le segment réel (0, 1), n solutions holomorphes u_1, u_2, ..., u_n; le théorème de Fuchs permet (²) de fixer les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ pour qu'il en soit ainsi.

Nous supposerons, en outre, que la fonction $p_1(x)$ est holomorphe dans le domaine (S). Il résultera de la formule (94) que $\frac{1}{\Delta(x)}$ sera holomorphe dans le même domaine.

Les formules (93) montrent alors que les p fonctions $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., $v_n(x)$ sont holomorphes dans le domaine (S) et que, par suite, la fonction

$$z(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} u_i(x)\, v_i(y)$$

est holomorphe en x et y dans le domaine (S) du plan de chacune de ces variables.

Cette fonction $z(x, y)$ joue un rôle analogue par rapport aux deux équations (92) et (95). Considérée comme fonction de x par exemple, elle est, dans le domaine (S), la solution de l'équation (92) qui, pour

---

(¹) G. DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, Liv. IV, Chap. V.

(²) G. HUMBERT, *Cours d'Analyse*, t. II, 3ᵉ Partie, Chap. V.

$x = y$, s'annule ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-2$ inclusivement, la dérivée d'ordre $n-1$ étant égale à l'unité.

Cauchy a montré que la fonction $z(x, y)$ est telle que la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x) u = V(x),$$

pour x compris dans (S), est donnée par la formule

$$u(x) = U(x) + \int_0^x z(x, t)\, V(t)\, dt, \tag{96}$$

$U(x)$ désignant l'intégrale générale de l'équation (92).

42. Considérons maintenant la *classe d'équations intégro-différentielles linéaires*

$$\frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x) u = \psi(x) + \lambda \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \int_0^1 k_{\nu+1}(x, s)\frac{d^\nu u}{ds^\nu}\, ds,$$

les fonctions $\psi(x)$ et $k_{\nu+1}(x, s)$ étant holomorphes en x dans le domaine (S).

La formule (96) nous permet d'écrire

$$u(x) = U(x) + \int_0^x z(x, t)\psi(t)\, dt + \lambda \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \int_0^1 \left[\int_0^x z(x, t)\, k_{\nu+1}(t, s)\, dt\right] \frac{d^\nu u}{ds^\nu}\, ds.$$

Posons

$$U(x) + \int_0^x z(x, t)\,\psi(t)\, dt = g(x)$$

et

$$\int_0^x z(x, t)\, k_{\nu+1}(t, s)\, dt = h_{\nu+1}(x, s).$$

Ces fonctions sont holomorphes par rapport à x dans le domaine (S) en vertu des hypothèses faites et *la fonction $u(x)$ est définie*, dans ce

domaine, *par l'équation intégro-différentielle suivante rentrant dans le type étudié par M. Boutnisky* [1] :

$$u(x) = g(x) + \lambda \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \int_0^1 h_{\nu+1}(x, s) \frac{d^\nu u(s)}{ds^\nu} ds. \tag{97}$$

43. Nous allons donner une *nouvelle méthode pour résoudre cette équation*.

Dérivons $m-1$ fois les deux membres de cette équation par rapport à x et posons

$$\frac{d^\mu u(x)}{dx^\mu} = \varphi_{\mu+1}(x), \qquad \frac{d^\mu h_\nu(x, s)}{dx^\mu} = H_{\mu+1,\nu}(x, s), \qquad \frac{d^\mu g(x)}{dx^\mu} = f_{\mu+1}(x).$$

L'équation (97) jointe aux $m-1$ équations ainsi obtenues forme le système d'équations

$$\varphi_\mu(x) = f_\mu(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_0^1 H_{\mu\nu}(x, s)\, \varphi_\nu(s)\, ds \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

système d'équations intégrales linéaires de deuxième ou de troisième espèce que nous avons étudié dans les Chapitres précédents.

NOTE SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

44. Dans l'étude que nous avons faite (n° **16**) des systèmes d'*équations intégrales linéaires du type* (36), nous avons laissé de côté le *cas où* $\Lambda(x)$ *est identiquement nul*.

Pour compléter cette étude, nous allons indiquer sommairement les principales particularités qui se présentent dans ce cas.

Supposons donc que $\Lambda(x) = 0$ ainsi que ses mineurs d'ordre

---

[1] BOUTNISKY, *Bull. des Sciences math.*, 1908. Mémoire déjà cité.

$p+1$, $p+2$, ..., m, mais que le mineur

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1p}(x) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{p1}(x) & \dots & a_{pp}(x) \end{vmatrix}$$

ne s'annule que pour des valeurs particulières isolées dans le domaine $0 \leq x \leq 1$.

1° Supposons $\theta_{p+1}(x), \theta_{p+2}(x), \dots, \theta_m(x)$ connus dans les p premières équations du système; elles peuvent être considérées comme un système Σ d'équations intégrales linéaires d'ordre p en $\theta_1(x)$, $\theta_2(x), \dots, \theta_p(x)$, système de seconde ou de troisième espèce du type étudié dans la seconde Partie.

2° Supposons $\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_m(x)$ remplacés par leurs valeurs sous les signes $\int_0^1$; les m équations du système proposé forment un système d'équations linéaires en $\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_m(x)$ qui seront compatibles si $m-p$ conditions de la forme

$$\sum_{\nu=p+1}^{\nu=m} \int_0^1 H_{\mu\nu}(x,s)\,\theta_\nu(s)\,ds = f_\mu(x) \qquad (\mu = p+1, p+2, \dots, m)$$

sont satisfaites. Appelons Σ' ce système de conditions et supposons que

$$H_{\mu\nu}(x,s) \equiv 0$$

pour tous les systèmes de valeurs

$$\begin{aligned} \nu &= p+q+1, \quad p+q+2, \quad \dots, \quad m, \\ \mu &= p+1, \quad p+2, \quad \dots, \quad m. \end{aligned}$$

Les q premières équations du système Σ' forment un système d'équations intégrales linéaires en $\theta_{p+1}(x), \theta_{p+2}(x), \dots, \theta_{p+q}(x)$ que nous désignerons par Σ_1.

Les $m - \overline{p+q} = r$ dernières équations du système Σ' constituent r conditions auxquelles sont astreintes les p fonctions $\theta_{p+1}(x)$, $\theta_{p+2}(x), \dots, \theta_{p+q}(x)$. Nous désignerons l'ensemble de ces r conditions par Σ_2.

Pour résoudre le système (36) nous aurons à résoudre d'abord le système Σ_1, à vérifier ensuite que les solutions de ce système, si elles existent, satisfont aux conditions Σ_2; enfin, si les conditions Σ_2 sont remplies, à résoudre le système Σ où nous choisirons arbitrairement les r fonctions $\theta_{p+q+1}(x)$, $\theta_{p+q+2}(x)$, ..., $\theta_m(x)$.

45. En dehors des conditions Σ_2, l'existence des solutions du système (36) est donc subordonnée à l'existence des solutions du système Σ_1 et il est facile de voir qu'un tel système n'a pas toujours de solution.

Définissons, en effet, les fonctions

$$\mathrm{H}(x,s) = \mathrm{H}_{\mu\nu}(x-\mu+1, s-\nu+1) \qquad \text{pour} \qquad 0 < \frac{x-\mu+1}{s-\nu+1} < 1,$$

$$f(x) = f_\mu(x-\mu+1) \qquad \text{pour} \qquad 0 < x-\mu+1 < 1,$$

μ et ν variant de $p+1$ à $p+q$, et considérons l'équation intégrale linéaire de première espèce

$$\int_p^{p+q} \mathrm{H}(x,s)\,\theta(s)\,ds = f(x). \tag{98}$$

On verra facilement par un raisonnement calqué sur celui du n° **16** que, à toute solution du système Σ_1, correspond une solution de (98) et réciproquement, ces solutions étant liées par les relations

$$\theta(x) = \theta_\mu(x-\mu+1) \qquad \text{pour} \qquad 0 < x-\mu+1 < 1.$$

Or on sait que l'équation (98) n'a pas toujours de solution.

46. Plaçons-nous, pour terminer, à un point de vue particulier et considérons la fonction $\theta(x)$ qui satisfait à (98) comme la limite pour $\lambda = \infty$ de la fonction $\theta(x,\lambda)$ qui satisfait à l'équation

$$-\theta(x,\lambda) + \lambda \int_p^{p+q} \mathrm{H}(x,s)\,\theta(s,\lambda)\,ds = \lambda f(x)$$

et supposons $\mathrm{H}(x,s)$ de la forme

$$\mathrm{H}(x,s) = \mathrm{X}_1(x)\,\mathrm{S}_1(s) + \mathrm{X}_2(x)\,\mathrm{S}_2(s) + \ldots + \mathrm{X}_\varpi(x)\,\mathrm{S}_\varpi(s).$$

Nous allons, dans ces hypothèses, établir la condition pour que la limite $\theta(x)$ existe et déterminer cette solution.

La déterminante $D(\lambda)$ du noyau $H(x, y)$ est un polynome de degré ϖ en λ qui peut s'écrire

$$D(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \ldots + \alpha_\varpi \lambda^\varpi,$$

et son mineur du premier ordre $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda \right)$ est un polynome de degré $\overline{\varpi - 1}$ en λ qui peut s'écrire

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda \right) = \beta_0(x, y) + \beta_1(x, y)\lambda + \ldots + \beta_{\varpi-1}(x, y)\lambda^{\overline{\varpi-1}}.$$

Par suite, dans le cas général,

$$\theta(x, \lambda) = -\lambda f(x) - \frac{\lambda^2 \int_p^{p+q} D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda \right) f(s)\, ds}{D(\lambda)}$$

se présentera sous la forme d'un quotient de deux polynomes en λ : le numérateur est de degré $\varpi + 1$, le dénominateur de degré ϖ.

Quand λ croît indéfiniment, $\theta(x, \lambda)$ tend en général vers l'infini.

Pour que $\theta(x, \lambda)$ ait une limite finie, il faut que

$$(99) \qquad f(x)\,\alpha_\varpi + \int_p^{p+q} \beta_{\varpi-1}(x, s) f(s)\, ds = 0,$$

et alors $\theta(x, \lambda)$ a en général une limite quand λ croît indéfiniment, savoir

$$\theta(x) = \frac{-f(x)\,\alpha_{\varpi-1} - \int_p^{p+q} \beta_{\varpi-2}(x, s) f(s)\, ds}{\alpha_\varpi}.$$

47. Notons de plus que l'étude des équations intégrales linéaires du second ordre sans second membre permet d'analyser la condition (99) : elle veut dire que $f(x)$ est une fonction principale du noyau $\beta_{\varpi-1}(x, s)$ relative au nombre fondamental $\left(-\frac{1}{\alpha_\varpi}\right)$.

Par suite il n'existera de fonction $f(x)$ différente de zéro satis-

faisant à cette condition que si

$$\Delta\left(-\frac{1}{\alpha_{\varpi}}\right)=0, \tag{100}$$

$\Delta(\lambda)$ désignant la déterminante du noyau $\beta_{\varpi-1}(x, s)$.

Il convient de remarquer que (100) *est une condition dépendant uniquement du noyau* $H(x, s)$ *de l'équation* (98).

Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique;

PAR M. GEVREY.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire est consacré à l'étude des équations aux dérivées partielles du type parabolique, *linéaires et non linéaires*, soit au point de vue de la *résolution des problèmes aux limites*, soit au point de vue de la *nature des solutions* (¹).

La plus simple des équations du type parabolique est l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}, \tag{1}$$

ou, dans le cas de plus de deux variables,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = \frac{\partial z}{\partial y} \tag{1'}$$

étudiées longuement par Fourier dans ses beaux travaux sur la Phy-

(¹) Les principaux résultats de ce travail ont fait l'objet de plusieurs Communications à l'Académie des Sciences : 20 février 1911, t. 151; 6 juin 1911, t. 152; 24 juin 1912, t. 154; 28 octobre 1912, t. 155, 17 février 1913, t. 156.

sique mathématique (¹). Poisson (²), Laplace se sont eux aussi occupés des problèmes de la chaleur, en se plaçant toujours au point de vue du calcul de la solution dans chacun des problèmes posés par la Physique. A une époque plus rapprochée, Schaefli (³), Betti sont revenus sur ces questions, et plus récemment encore M. Appell (⁴) a consacré à l'équation (1) un remarquable Mémoire. Enfin l'équation (1') a été étudiée par divers auteurs (⁵) en utilisant les méthodes introduites dans ce genre de recherches par Poincaré, dans son célèbre Mémoire *sur les équations de la Physique mathématique*.

Mais les équations générales du type parabolique n'avaient pas été envisagées en elles-mêmes, si ce n'est au point de vue, plutôt géométrique, du problème de Cauchy et de l'intégration effective, lorsque, en 1907 et en 1908, MM. Holmgren et Levi (⁶) publièrent, presque simultanément, des travaux sur l'équation (1), s'inspirant des théories modernes relatives aux équations intégrales : là comme ailleurs, cet instrument analytique a fait preuve de sa fécondité et de sa souplesse.

La Physique mathématique avait posé, relativement à l'équation (1), un type de problème, se rapprochant du problème de Dirichlet, et qui a conduit tout naturellement à une classe de problèmes aux limites, se résolvant par des méthodes analogues à celles dont on fait usage dans la théorie des équations elliptiques et hyperboliques. C'est à cette question qu'est consacré le remarquable Mémoire de M. Levi, qui étudie dans cet esprit, d'une façon très complète, l'équation (1), ainsi que l'équation à second membre

$$\delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y). \tag{2}$$

(¹) FOURIER, *Œuvres*, publiées par M. Darboux, t. I et II.

(²) POISSON, *Théorie mathématique de la chaleur*. Paris, 1835.

(³) *Journal de Crelle*, t. 72.

(⁴) *Journal de Liouville*, 1892.

(⁵) MM. Le Roy, Stekloff, Zaremba, Lauricell, etc. Citons aussi les deux Chapitres que M. Volterra a consacrés à l'équation de la chaleur dans ses *Leçons de Stockholm* (1906), et dont la lecture est fort suggestive.

(⁶) HOLMGREN, *Arkiv för Matematik*, Bd III et IV (1907-1908). — E.-E. LEVI, *Annali di Matematica* (1908). J'aurai souvent occasion de citer ce Mémoire, dont la lecture m'a donné l'idée de mes recherches.

Les *caractéristiques* de cette équation sont les droites $y = \text{const.}$ *Dans tout ce qui suit*, nous appellerons *contour* (C) un contour formé d'un segment $A_1 A_2$ de caractéristique, pouvant d'ailleurs se réduire à zéro, et de deux arcs $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, situés au-dessus de $A_1 A_2$, ne se coupant pas, et rencontrés respectivement en un seul point par les caractéristiques qui les coupent; les équations de ces arcs de courbe, que nous appellerons C_1 et C_2 (voir *fig.* 1), sont donc de la forme

$$x = X_1(y), \qquad x = X_2(y).$$

Nous désignerons également sous le nom de *solution régulière* d'une équation aux dérivées partielles, toute solution continue, ainsi que celles de ses dérivées qui figurent dans l'équation.

Cela posé, le problème aux limites *type* relatif à l'équation (2) est le suivant : déterminer une solution z de cette équation, régulière entre les arcs C_1 et C_2, connaissant les valeurs qu'elle prend sur le contour (C). Si nous appelons d'une façon générale S la région située entre les arcs C_1 et C_2 et au-dessus de $A_1 A_2$, z sera régulière dans S et continue sur (C). Étant donné un point $P(x, y)$ de S, la valeur de z en ce point ne dépend que des données sur la portion (C_y) de (C) qui est au-dessous de la caractéristique d'ordonnée y. On peut donc dire, en quelque sorte, que le type parabolique participe à la fois du type hyperbolique et du type elliptique, puisque sur une courbe *ouverte* on se donne la valeur de z *seul*. L'angle des droites caractéristiques du type hyperbolique est devenu égal à 180° et il continue ainsi à embrasser les données dont dépend la valeur de la solution en son sommet (devenu indéterminé), mais, dans le passage, la connaissance des valeurs prises par $\frac{\partial z}{\partial x}$ est devenue inutile.

Quoi qu'il en soit, l'emploi d'une *solution fondamentale*, qui est ici [1]

$$U(H, P) = U(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}$$

conduit à la *formule fondamentale* (§ 1) et à la représentation de la solution par des intégrales (§ 2) : en écrivant que ces intégrales pren-

---

[1] Dans tout ce travail nous désignerons toujours par la lettre U une solution fondamentale et nous écrirons toujours les premiers, dans son expression symbolique, les variables ou le point relatif à l'équation *adjointe*.

nent au bord les valeurs données, on obtient les équations intégrales qui permettent de résoudre la question. Au moyen de celles-ci on peut d'ailleurs former une *fonction de Green* permettant, grâce à la formule fondamentale, d'obtenir par une même formule, la solution de tout problème aux limites concernant un contour donné.

Cette façon de procéder est absolument classique et en, ce qui concerne l'équation de la chaleur, nous ne pouvons mieux faire, comme complément à ce que nous disons au début du premier Chapitre, que de renvoyer le lecteur au Mémoire de M. Levi, et à l'excellent Chapitre que M. Goursat a consacré à ces questions dans le Tome III de son *Traité d'Analyse* [1].

Il existe pour l'équation (2) une intégrale tout à fait analogue au potentiel de simple couche : c'est la fonction

$$Z = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S_y} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

qui est solution de l'équation (1), S_y désignant le domaine limité par (C_y) et la caractéristique d'ordonnée y. Si nous remplaçons dans cette intégrale la solution fondamentale par la fonction de Green, nous avons la solution nulle sur (C).

Tout ceci étant rappelé, on voit donc que le chemin était tout tracé pour la résolution des problèmes aux limites relatifs à des équations plus générales, suivant la méthode si féconde créée par M. Picard dans son fameux Mémoire *Sur les équations aux dérivées partielles* (*Journal de Liouville*, 1890).

I. Dans un premier Chapitre j'approfondis l'étude des solutions des deux équations (1) et (2) *en vue des applications du Chapitre suivant.* Puisque notre objet est de former la solution des équations

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + cz + f,$$

$$(\mathcal{E}_1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$(\mathcal{E}_2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

---

[1] Toutes les fois que nous renverrons à ce Mémoire ou à cet Ouvrage, nous les désignerons simplement par le nom de l'auteur.

et cela par le moyen d'approximations successives, il nous faut envisager l'allure de la dérivée $\frac{\partial z}{\partial x}$ au bord, pour les équations ($\mathcal{E}$) et ($\mathcal{E}_1$), et aussi de la dérivée $\frac{\partial z}{\partial y}$, pour l'équation ($\mathcal{E}_2$).

Je commence par faire cette étude pour l'équation (1) : je forme tout d'abord la fonction de Green, et cela en supposant simplement que les deux fonctions X_1 et X_2 satisfassent à la condition

$$(\Gamma) \qquad |X_i(y) - X_i(y')| < K|y - y'|^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Le contour (C) peut donc n'avoir aucune existence matérielle, puisque les fonctions X_i peuvent ne pas admettre de dérivée. Ce point de vue peut évidemment prêter à la critique et d'autant plus que, si l'on suppose que X_1 et X_2 admettent une dérivée première, le changement de variable

$$(V) \qquad x' = \frac{l[x - X_1(y)]}{X_2(y) - X_1(y)}$$

transforme les équations ($\mathcal{E}$), ($\mathcal{E}_1$), ($\mathcal{E}_2$) en équations de même forme, et le contour (C) en un contour rectangulaire porté par les droites $A_1 A_2$ et $x' = 0$, $x' = l$. Or précisément l'étude des dérivées au bord est particulièrement simple dans le cas d'un contour rectangulaire.

Malgré cela, il m'a semblé que le point de vue purement théorique ne saurait être exclu, sous le prétexte qu'il s'agit d'équations utilisées en Physique mathématique et qu'on pouvait envisager ces questions en elles-mêmes, puisqu'aussi bien on se plaçait à ce point de vue dans d'autres théories plus éloignées des applications.

Pareillement j'ai toujours cherché à faire le moins d'hypothèses que possible sur les coefficients et les données : ceci peut d'ailleurs éviter des discussions spéciales, au cas où ces fonctions présenteraient en certains points des particularités qu'une méthode moins subtile aurait éliminées.

Au reste, comme le contour rectangulaire simplifie beaucoup de questions, je lui ai consacré une Note spéciale à la fin du Mémoire : tout ce qui concerne plus spécialement les contours satisfaisant à la condition (Γ) a été marqué par un astérisque et le lecteur qui ne s'intéresse pas à ce point de vue pourra le passer sans inconvénient.

Dans le premier Chapitre j'étudie également les conditions les plus simples qu'on puisse donner, bien qu'assez larges [*conditions* (*A*) § 9] pour que les dérivées $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial Z}{\partial y}$ de la fonction Z existent et vérifient l'équation (2). Enfin, comme l'a fait M. Pétrini pour le potentiel ([1]) je donne une extension du symbole

$$\delta Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

n'exigeant pour la fonction $f(x, y)$ qu'un certain genre de continuité.

Quand f est simplement intégrable, Z satisfait à des conditions d'accroissements analogues à celles qu'a étudiées M. Dini dans le cas du potentiel ([2]).

II. Dans le second Chapitre je m'occupe de la *résolution des problèmes aux limites* et plus particulièrement du problème type cité plus haut, l'équation donnée étant ($\mathcal{E}$), ($\mathcal{E}_1$) ou ($\mathcal{E}_2$).

Il y a plusieurs manières d'envisager la question pour l'équation ($\mathcal{E}$). On peut tout d'abord, par un changement de fonction inconnue, faire disparaître le coefficient a. C'est ce qu'a fait M. H. Block dans un Mémoire paru dans les *Arkiv de Stockholm* (Bd. VI) et qui venait d'être imprimé au moment où j'ai publié une première Note. J'ignorais complètement ce travail, développement d'une Note communiquée quelques mois avant. Effectivement, le cas où $a = 0$ est d'une grande simplicité et c'est par ce cas que j'avais débuté dans mes recherches l'année précédente. Mais, outre qu'il exige l'existence des deux dérivées premières du coefficient de $\frac{\partial z}{\partial x}$ dans l'équation primitive, il ne se prête pas à la généralisation dans le cas de plusieurs variables, et il ne peut servir à préparer l'étude des équations ($\mathcal{E}_1$) ou ($\mathcal{E}_2$).

Si l'on ne fait sur les coefficients d'autre hypothèse que la condition (A), la solution de l'équation ($\mathcal{E}$) sera donnée par le moyen d'une équation *intégro-différentielle* (§ 19), résoluble par approximations successives ([3]).

([1]) *Journal de Liouville*, 1909; *Acta mathematica*, t. XXXI.

([2]) *Acta mathematica*, t. XXV.

([3]) Ordinairement dans ces approximations, on suppose l'existence, *au bord*

Si la dérivée $\frac{\partial a}{\partial x}$ du coefficient a existe, on peut transformer l'équation précédente en *équation intégrale* ordinaire (§ 23), suivant le procédé de M. Picard ([1]), et l'on n'a pas alors d'autre hypothèse à faire sur les données, que celle de la continuité. On peut alors démontrer sur les *séries de solutions* un théorème tout à fait analogue à celui qui a été établi par M. Picard pour le type elliptique et par M. Levi pour l'équation de la chaleur (§ 25), et appliquer ce théorème au cas où le contour (C) *présente des singularités* (§ 26).

La résolution de l'équation intégro-différentielle dont nous parlions plus haut a préparé la voie pour l'étude de l'équation ($\mathcal{E}_1$), f étant supposée lipschitzienne en z et $\frac{\partial z}{\partial x}$. Jusqu'ici, la seule hypothèse faite sur le contour est la condition (Γ).

Plus délicate est la résolution de l'équation ($\mathcal{E}_2$), soit

$$r = f(x, y, z, p, q), \qquad f'_q > 0.$$

En effet, pour la résoudre par approximations successives, nous la mettrons sous la forme $\delta z = \varphi(x, y, z, p, q)$. Or, en vertu des équations mêmes qui constituent la chaîne et qui sont de la forme (2), les dérivées r et q présentent les mêmes singularités au bord. Mais ici q est engagée dans le second membre. J'ai résolu la difficulté par la *méthode des accroissements*, basée sur les études faites dans le premier Chapitre. J'ai naturellement cherché à faire le moins d'hypothèses que possible sur f et je l'ai simplement supposée pourvue d'un certain nombre de dérivées (§ 51). La question est assez analogue à la résolution de l'équation elliptique

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

mise sous la forme

$$r + t = \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t)$$

et qui a été faite par M. Bernstein *dans le cas analytique* seulement.

La fin du Chapitre concerne l'extension au cas de plusieurs variables des problèmes traités jusqu'ici.

---

même, des dérivées qui figurent dans les seconds membres des équations d'approximation. Cette condition n'est pas indispensable et j'ai indiqué très sommairement comment on pouvait s'en passer.

([1]) *Rendiconti di Palermo* et *Annales de l'École Normale*, 1906.

III. Les solutions régulières de l'équation de la chaleur sont analytiques par rapport à x; relativement à y elles sont d'une certaine espèce de fonctions, que j'ai appellées *fonctions* $\mathcal{H}$ (*voir* § 32) et qui ont fourni à M. Holmgren matière à des résultats remarquables sur le *prolongement* des solutions de l'équation de la Chaleur.

M. Levi avait démontré que, si f est *analytique en* x, dans une région $\mathcal{R}$, toute solution régulière de l'équation (2) est aussi analytique en x dans $\mathcal{R}$. J'ai étendu ce résultat à l'équation $(\mathcal{E})$, quand les coefficients sont analytiques en x, et aux équations $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$, quand f est analytique en x, z, p, q.

L'*analyticité par rapport à* y n'est pas aussi directe : $\mathcal{F} = 0$ désignant l'une des équations $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{E}_1)$, $(\mathcal{E}_3)$, si $\mathcal{F}$ est analytique en y, z, p, q et *si* z *prend des valeurs analytiques sur deux segments* C_1 *et* C_2 *parallèles à* Oy, z sera analytique en y sur tout segment de caractéristique limité par C_1 et C_2. Une propriété analogue a lieu pour l'*analyticité par rapport à l'ensemble des variables* x, y, C_1 et C_2 pouvant être cette fois des arcs analytiques.

Je me suis proposé également de voir si les fonctions *d'espèce* $\mathcal{H}$ ne jouaient pas, *par rapport à* y, le même rôle que les fonctions *analytiques, par rapport à* x. En d'autres termes, si les coefficients de l'équation $(\mathcal{E})$ sont *fonctions* $\mathcal{H}$ *en* y, en sera-t-il de même de toute solution régulière? La réponse est affirmative et vraie également pour l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + f,$$

b gardant un signe constant. De plus, si les coefficients de cette équation sont fonctions $\mathcal{H}$ par rapport à l'ensemble (x, y) (*voir* § 32), toute solution régulière prend sur une courbe d'équation $x = X(y)$, X étant une fonction $\mathcal{H}$, des valeurs définissant une fonction $\mathcal{H}$ de y. Nous appelons une telle courbe, *courbe* $\mathcal{H}$.

Enfin, le *problème du prolongement* (§ 37) m'a conduit au résultat suivant : la condition nécessaire et suffisante, pour qu'une solution z de (E), régulière dans un domaine limité en partie par une courbe $\mathcal{H}$, soit prolongeable au delà de cette courbe, est que les valeurs prises par z sur cette courbe constituent une fonction de y qui soit d'espèce $\mathcal{H}$: nous supposons ici les coefficients de (E) d'espèce $\mathcal{H}$ par rapport à l'en-

semble (x, y). Si la courbe est un segment vertical, il suffit qu'ils soient d'espèce $\mathcal{H}$ en y.

Ces résultats sont basés sur la résolution du *problème de Cauchy*, dans le cas où la frontière est un segment vertical : la solution se calcule par approximations successives en partant de la formule

$$Z_0(x, y) = \int_0^x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p} d\xi,$$

qui donne la solution de l'équation (2) nulle sur Oy, ainsi que sa dérivée par rapport à x.

J'étudie enfin le cas où les coefficients sont analytiques en y (problème de Cauchy et problème du prolongement) et, après quelques autres considérations relatives au prolongement, je termine le Chapitre en montrant que le problème qui consiste à déterminer une solution de l'équation de la chaleur, analytique en x et y, et prenant sur deux courbes sécantes des valeurs analytiques, est un problème *en général impossible*, contrairement à ce qui a lieu pour un grand nombre d'autres équations.

IV. Appelons *équations singulières* les équations du type (E), telles que le coefficient b *s'annule* avec ou sans changement de signe dans la région où l'on veut former une solution de l'équation. Suivant que la *ligne singulière*, le long de laquelle b s'annule, est quelconque (sans tangentes caractéristiques cependant) ou est une caractéristique, nous aurons les deux types suivants (en posant $\varepsilon = \pm 1$) :

$$(\overline{\mathcal{E}}) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} = cz + f, \qquad \text{type simple } (\overline{e}) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$(\overline{\mathcal{E}}') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} = cz + f, \qquad \text{type simple } (\overline{e}') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Il est facile de former une *solution fondamentale* de l'équation $(\overline{e})$ valable dans tout le plan. Le nombre entier p étant pair, les problèmes aux limites relatifs à l'équation (1) se résolvent également pour l'équation $(\overline{e})$, et par suite $(\overline{\mathcal{E}})$, par des méthodes analogues, même si le contour qui porte les données traverse l'axe des y, ou bien en comprend un ou plusieurs segments. Mais si p est impair, la solution de $(\overline{e})$

est déterminée *au-dessus* du contour qui porte les données, dans la région qui est *à droite* de Oy, et *au-dessous* dans la région qui est *à gauche*. Pour avoir une solution régulière dans un domaine traversé par Oy, il faut examiner si deux solutions, déterminées dans deux régions admettant l'axe des y comme frontière commune, *peuvent se raccorder*, c'est-à-dire prendre, ainsi que leurs dérivées premières, la même valeur sur Oy. On reconnaît alors que la solution de ce problème revient à celle d'une *équation de Fredholm de première espèce* et ceci permet de montrer que les noyaux de la forme

$$\frac{\varepsilon}{|x-s|^{\alpha}}, \qquad (0 < \alpha < 1),$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et peut ou non changer de signe pour $s = x$, sont des *noyaux fermés*.

Quant à l'équation $(\overline{e'})$, il est aisé de former sa solution fondamentale et de montrer que si une solution, régulière au voisinage de Ox, se réduit sur Ox à une fonction continue, celle-ci ne peut être que *linéaire*. Quand p est impair et $\varepsilon = -1$, la disposition des contours portant les données permet de résoudre, pour un contour fermé coupant Ox, un *véritable problème de Dirichlet*. Si p est pair, on peut avoir une solution régulière à l'intérieur d'un contour coupant Ox, mais les valeurs de la solution d'un côté de Ox ne dépendent pas des valeurs prises de l'autre côté.

Les résultats du Chapitre III peuvent être étendus à ces équations singulières. Nous avons traité le cas de l'équation $(\bar{e})$ avec $a = c = 0$ (problème du prolongement et problème de Cauchy). Pour les autres, nous avons simplement indiqué les résultats qui se déduisent de ceux que nous avons démontrés (*voir* § 74).

V. Dans le dernier Chapitre, nous avons appliqué la méthode de M. Hadamard[1] à la *formation de la solution fondamentale* des équations linéaires complètes à deux et trois variables : le procédé réussit quel que soit le nombre des variables, pour toutes les équations qui se

[1] *Comptes rendus*, 1er mai 1911.

ramènent à la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + c z$$

et permet aisément la résolution des problèmes aux limites.

La solution fondamentale des équations $(\bar{\mathcal{E}})$ se calcule également par cette méthode, et ceci permet de former l'équation intégrale relative au problème du raccordement dans le cas général.

CHAPITRE I.

SUR LES PROBLÈMES RELATIFS A L'ÉQUATION DE LA CHALEUR.

Nous allons tout d'abord rappeler brièvement certains résultats acquis relativement à l'équation

$$(1) \qquad \delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y),$$

$f(x, y)$ étant une fonction que nous supposerons tout d'abord continue.

1. Formule fondamentale. — Envisageons les deux équations

$$\delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad \delta_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

dont la seconde est l'équation *adjointe* de la première. La *solution fondamentale* relative à ces deux équations est

$$U(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - \eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}},$$

solution de $\delta z = 0$ en x, y et de $\delta_1 u = 0$ en ξ, η.

Soit z une solution *régulière* de l'équation (1) : nous la supposons donc continue ainsi que $\frac{\partial z}{\partial y}$; $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ le seront également. Envisageons un contour (C) (*voir* Introduction, p. 307), formé par un segment de caractéristique A_1A_2 et deux arcs A_1B_1, A_2B_2 comme il a été expliqué (*fig.* 1), et soit M_1M_2 un segment caractéristique coupant ces deux arcs et contenant un point $P(x, y)$. Appliquons la formule de Riemann à l'intégrale

$$\iint \{u[\delta z - f(\xi, \eta)] - z\delta_1 u\}\, d\xi\, d\eta,$$

étendue au domaine limité par (C) et une caractéristique M'_1M_2 voisine et au-dessous de M_1M_2. Si, dans cette intégrale, u est solution de $\delta_1 u = 0$ et z solution de $\delta z = f$, on a

$$(2)\qquad \int_{M_1M_2} u z\, d\xi - \int_{M'_1A_1A_2M'_2} u z\, d\xi + \left(u\frac{\partial z}{\partial \xi} - z\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) d\eta - \iint u f\, d\xi\, d\eta.$$

Si nous remplaçons u par la solution fondamentale, il vient, en faisant tendre $M'_1M'_2$ vers M_1M_2, la *formule fondamentale* [1]

$$\left.\begin{array}{ll}(\alpha) & 2\sqrt{\pi}\, z(x, y) \\ (\beta) & \sqrt{\pi}\, z(x, y) \\ (\gamma) & 0\end{array}\right\} = \int_{(C)} \frac{1}{\sqrt{y - \eta}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} \left\{ z\, d\xi + \left[\frac{\partial z}{\partial \xi} - z\frac{x - \xi}{2(y - \eta)}\right] d\eta \right\}$$
$$- \iint_{S_y} \frac{1}{\sqrt{y - \eta}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

S_y désignant, comme nous l'avons dit, le domaine limité par (C) et la caractéristique d'ordonnée y. On suppose : dans la formule (α), P intérieur à S; dans (β), P sur (C); dans (γ), P extérieur.

La formule suppose également z *régulière à l'intérieur de* S, z *et* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *continues sur* (C). Pour que la formule (β) soit exacte, il faut de

---

(1) GOURSAT, t. III, p. 310. — LEVI, p. 203. — La lecture du Chapitre de M. Goursat, déjà cité dans l'Introduction, sera très utile pour aider à bien comprendre les pages qui vont suivre : *voir* en particulier les nos 542, 543, 544, 545 et 547. *Voir* aussi le début du Mémoire de M. Levi.

plus qu'on ait (*voir* la Note à la fin du § 5)

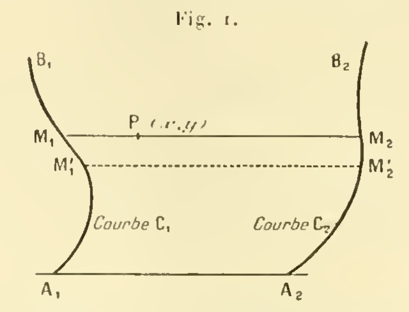
$$(3) \qquad \lim_{y'=y} \frac{X_i(y) - X_i(y')}{\sqrt{y-y'}} = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

et que l'intégrale

$$(4) \qquad \int_{y'}^{y} \frac{X_i(y) - X_i(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[X_i(y) - X_i(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} \varphi(\eta)\, d\eta$$

ait un sens. Enfin nous avons une intégrale curviligne en $d\xi$ qui nous

Fig. 1.



oblige aussi à quelque hypothèse sur les fonctions X_1 et X_2 : nous les supposerons *continues et à variation bornée*, c'est-à-dire que les arcs C_1 et C_2 sont *rectifiables*.

Nous serons amenés plus loin à modifier un peu ces conditions.

I. — Étude des solutions de l'équation $\delta z = 0$.

L'étude que nous allons faire dans tout le premier Chapitre sert de préparation à la résolution des problèmes posés dans le second.

2. Intégrales remarquables. — Posons

$$V(\xi, \eta; x, y) = \frac{x-\xi}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} = -2\frac{\partial U}{\partial x} = 2\frac{\partial U}{\partial \xi}.$$

Nous voyons, dans la formule fondamentale, apparaître des intégrales de la forme

$$\vartheta_0(x, y) = \int_{AM} U(\xi, \eta; x, y)\, \varphi(\eta)\, d\eta, \qquad \vartheta(x, y) = \int_{AM} V(\xi, \eta; x, y)\, \varphi(\eta)\, d\eta\, ;$$

AM désigne un arc de courbe dont l'extrémité A est fixe et a pour ordonnée y_1, l'autre extrémité ayant pour ordonnée y; soit $x = X(y)$ son équation ([1]); φ est une fonction continue. Étudions les propriétés de ces intégrales. L'intégrale $\mathfrak{I}_0$, *uniformément convergente* ([2]), est *continue* en tout point, *même sur* AM. Quant à $\mathfrak{I}$, elle est certainement *continue en tout point non situé sur la courbe* et il est facile d'en obtenir une limitation valable dans toute la bande $\mathfrak{B}$ du plan, définie par $y_1 \leqq y \leqq y_2$, $\varphi(\eta)$ étant continue dans l'intervalle (y_1, y_2), avec $|\varphi| < \Phi$.

Remarquons tout d'abord que l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{y_1}^{y} \frac{X(y) - X(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x - X(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} \varphi(\eta)\, d\eta,$$

a un sens pour $x = X(y)$, d'après une hypothèse antérieure [intégrale (4)] : nous la supposerons continue en x, y, même pour $x = X(y)$ ([3]), de telle sorte qu'on ait dans $\mathfrak{B}$ ([4])

$$|\mathrm{I}| < (\mathrm{L})\Phi.$$

Ceci n'exige nullement que $X(y)$ soit à variation bornée et nous pouvons supprimer cette hypothèse, *en conservant cependant la condition* (3).

Nous pouvons écrire alors,

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= \int_{y_1}^{y} \frac{x - X(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x - X(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} \varphi(\eta)\, dy \\ &= \mathrm{I} + \int_{y_1}^{y} \frac{x - X(y)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x - X(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} \varphi(\eta)\, d\eta = \mathrm{I} + \int_{y_1}^{y'} + \int_{y'}^{y}. \end{aligned}$$

([1]) En somme nous supprimons ici les indices 1 et 2, AM désignant l'arc A_1M_1 ou l'arc A_2M_2.

([2]) GOURSAT, t. III, p. 173.

([3]) Ceci aura lieu sous des hypothèses très larges, par exemple si

$$\int_{y_1}^{y} \frac{|X(y) - X(\eta)|}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}\, d\eta$$

a un sens.

([4]) Dans tout le cours de ce Mémoire, nous désignerons, *d'une façon générique*, par (L) ou (K), *tout coefficient numérique* essentiellement fini, dont la valeur pourra d'ailleurs différer d'une formule à une autre.

en désignant par y' l'ordonnée du point de l'arc AM, *le plus rapproché de* M, et tel que

$$(5) \qquad |X(y) - X(y')| = \frac{1}{2}|x - X(y)|.$$

Si ce point n'existe pas, la décomposition de l'intégrale est inutile et ce que nous dirons de $\int_{y'}^{y}$ s'appliquera à $\int_{y_1}^{y}$. Or

$$\left|\int_{y_1}^{y'}\right| < \Phi\,|x - X(y)|\int_{y_1}^{y'} \frac{d\eta}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} < 2\Phi\,\frac{x - X(y)}{\sqrt{y-y'}} = 4\Phi\,\frac{|X(y) - X(y')|}{\sqrt{y-y'}},$$

et d'après (3) ceci tend vers *zéro* avec $y - y'$. D'autre part, quand η appartient à l'intervalle (y', y), on a certainement

$$(5') \qquad e^{-\frac{[x-X(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} < e^{-\frac{[x-X(y)]^2}{16(y-\eta)}},$$

$$\left|\int_{y'}^{y}\right| < \Phi\int_{y'}^{y} \frac{x - X(y)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{[x-X(y)]^2}{16(y-\eta)}}\, d\eta < 4\Phi\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\, ds = 4\sqrt{\pi}\,\Phi,$$

en utilisant le changement de variable défini par

$$[x - X(y)]^2 = 16\,s\,(y - \eta).$$

On a donc, dans la bande $\mathcal{B}$,

$$(6) \qquad |\mathfrak{I}| < (L)\Phi.$$

La dérivée de $\mathfrak{I}_0$ par rapport à x est en tout point non situé sur la courbe égale à $-\frac{1}{2}\mathfrak{I}$.

Quant à la dérivée de $\mathfrak{I}$, elle s'écrit

$$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x} = \int_{y_1}^{y} \frac{1}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{[x-X(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} \left\{1 - \frac{[x - X(\eta)]^2}{2(y-\eta)}\right\} \varphi(\eta)\, d\eta.$$

Le même procédé de décomposition que nous avons utilisé plus haut conduit à la limitation

$$(6') \qquad \left|\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x}\right| < \frac{(L)\Phi}{|x - X(y)|}.$$

Nous voyons donc que $\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x}$ devient en général infinie sur la courbe. Cependant $\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x}$ se ramène facilement à des intégrales $\mathfrak{I}_0$ et $\mathfrak{I}$ *quand* X

et φ sont dérivables. En effet

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} = -2\int_{y_1}^{y} \frac{\partial U[X(\eta), \eta; x, y]}{\partial y} \varphi(\eta)\, d\eta;$$

or

$$\frac{dU[X(\eta), \eta; x, y]}{d\eta} = \frac{V}{2} X'(\eta) - \frac{\partial U}{\partial y}.$$

D'où, en substituant la valeur de $\frac{\partial U}{\partial y}$ fournie par cette équation dans l'intégrale et intégrant par parties,

$$(\gamma) \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} = -2\int_{y_1}^{y} U\, \varphi'(\eta)\, d\eta - \int_{y_1}^{y} V X'(\eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta - 2\varphi(y_1)\, U[X(y_1), y_1; x, y].$$

Cette méthode s'applique à toutes les dérivées de $\mathcal{J}$, si φ admet des dérivées successives, et permet d'avoir leurs limites sur l'arc AM.

Formule de discontinuité. — Quand le point P traverse la courbe AC en un point P_0, l'intégrale $\mathcal{J}$ subit une *discontinuité* traduite par la formule

$$\lim_{P \to P_0} (\mathcal{J}_P - \mathcal{J}_{P_0}) = \pm 2\sqrt{\pi}\, \varphi_{P_0},$$

le signe étant + ou — suivant que P tend vers P_0 à droite ou à gauche de l'arc de courbe.

Cette formule, analogue à la formule de discontinuité du potentiel de double couche, a été démontrée par MM. Holmgren et Levi sous certaines conditions relatives à X et φ. Nous allons en donner une démonstration très rapide. Nous pouvons représenter, dans tout intervalle fini i contenant la valeur y_0 ordonnée de P_0, la fonction continue $\varphi(y)$ par un polynome $\bar{\varphi}(y)$, de telle façon qu'on ait

$$|\varphi(y) - \bar{\varphi}(y)| < \varepsilon;$$

on peut même supposer $\varphi(y_0) = \bar{\varphi}(y_0)$. Or la fonction $\bar{\varphi}$ vérifie l'équation $\delta z = -\frac{d\bar{\varphi}}{dy}$. Par suite, étant donné un contour (C) dont l'arc AM constituerait le bord droit, en appliquant la formule (α)

ou (γ), puis la formule (β), à cette solution et retranchant, il vient

$$\begin{matrix}2\sqrt{\pi}\\ \text{ou}\\ 0\end{matrix}\Bigg|\;\bar\varphi_P-\sqrt{\pi}\,\varphi_{P_0}=\frac{1}{2}\int_{AM}V_P\,\bar\varphi(\eta)\,d\eta-\frac{1}{2}\int_{AP_0}V_{P_0}\,\bar\varphi(\eta)\,d\eta+\ldots.$$

Quand P tend vers P_0, le premier membre tend vers $\pm\sqrt{\pi}\,\varphi(y_0)$ et *les termes non écrits dans le deuxième membre tendent vers zéro.* Or le second membre peut s'écrire

$$\frac{1}{2}(\vartheta_P-\vartheta_{P_0})+\frac{1}{2}\int_{AP}V_P(\bar\varphi-\varphi)\,d\eta-\frac{1}{2}\int_{AP_0}V_{P_0}(\bar\varphi-\varphi)\,d\eta+\ldots.$$

Les deux intégrales sont en valeur absolue inférieures à (L) ε. Par suite ε' étant donné, on pourra toujours choisir ε, puis prendre P suffisamment voisin de P_0, pour qu'on ait

$$|\vartheta_P-\vartheta_{P_0}\mp 2\sqrt{\pi}\,\varphi_{P_0}|<\varepsilon',$$

ce qui démontre la formule que nous avions en vue.

Ici X est supposé vérifier toutes les conditions données pour l'établissement de la formule fondamentale. Mais il est aisé de voir que nous pouvons supprimer la condition que X soit à variation bornée. En effet, cette condition est relative à l'existence de l'intégrale

$$\int_{AM}U(\xi,\eta;x,y)\,\varphi(\eta)\,d\xi.$$

Mais, pour écrire cette intégrale, nous pouvons supposer que l'arc AM′M a été remplacé par un arc AM″M intérieur à (C), ayant mêmes extrémités et tel que cette intégrale curviligne ait un sens; il faudra alors adjoindre au second membre de la formule fondamentale l'intégrale double $\int\int_\sigma \frac{\partial U}{\partial y}\varphi\,d\xi\,d\eta$ étendue à l'aire σ comprise entre AM′M et AM″M. Il est facile de voir que cette intégrale a un sens et est continue quand P et M varient, à la condition que P ne vienne pas à l'intérieur de σ. Les conclusions énoncées plus haut subsistent donc.

Quand le point P *tend vers* A, la limitation que nous avons donnée plus haut montre que, *si φ est nul en* A, ϑ *tend vers zéro.*

La formule fondamentale met également en évidence les solutions

de $\delta z = 0$, de la forme (x_1 et x_2 étant les abscisses de A_1 et A_2, y_1 leur ordonnée)

$$\mathfrak{K}(x, y) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{y - y_1}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-y_1)}} \psi(\xi)\, d\xi,$$

qui, lorsque y tend vers y_1 et x vers x_0, tendent vers $2\sqrt{\pi}\psi(x_0)$ si x_0 est intérieur à l'intervalle (x_1, x_2), vers o, si x_0 est extérieur à cet intervalle (*formule de Poisson*. Goursat, n° 543) ([1]). Ceci permet de n'envisager *que les intégrales de l'équation* (1) *s'annulant sur* A_1A_2, car toute autre en diffère par une intégrale $\mathfrak{K}$.

5. Problèmes aux limites. — L'emploi des intégrales $\mathfrak{I}_0$ et $\mathfrak{I}$ permet de déterminer la solution (unique : l'unicité sera étudiée plus loin) de $\delta z = 0$, s'annulant sur A_1A_2 et satisfaisant sur chacun des arcs C_1, C_2 à une relation de la forme

$$\lambda(y)\frac{\partial z}{\partial x} + \mu(y)z = F(y),$$

λ, μ, F étant continues. Il suffit pour cela de représenter cette intégrale par une somme de deux fonctions $\mathfrak{I}_0$ ou $\mathfrak{I}$, relative à chacun des arcs, et d'écrire que, quand P tend vers un point du contour, les valeurs limites de z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ vérifient la relation donnée : on obtient ainsi un système de deux équations intégrales de deuxième espèce qui déterminent les deux fonctions φ (Goursat, n° 547). Pour la résolution de ce système, nous renverrons au Mémoire de M. Levi ([2]), en remarquant toutefois que, pour établir la convergence des séries qui représentent les solutions, il n'est pas nécessaire de supposer X_1 et X_2 lipschitziennes. Sans doute, la condition que nous avons imposée à ces deux fonctions, à savoir que l'intégrale (4) ait un sens ([3]), n'est

---

([1]) Si x_0 est égal à x_1 ou x_2, c'est-à-dire si le point (x, y) tend vers une des extrémités du segment A_1A_2, la limite $\mathfrak{K}$ dépend du chemin suivi : par exemple, elle est $\sqrt{\pi}\,\psi(x_1)$ si $\frac{x - x_1}{\sqrt{y - y_1}}$ tend vers zéro [*cf.* la condition (3), M_1 et M_2 jouant alors le rôle des points A_1 et A_2].

([2]) E.-E. Lévi, *loc. cit.*, p. 214.

([3]) Ou même la condition que $\int_{y'}^{y} \frac{|X(y) - X(\eta)|}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}$ ait un sens.

pas suffisamment précise, car il est nécessaire de connaître la façon dont cette intégrale tend vers o quand y' tend vers y. La plus simple des hypothèses qu'on puisse satisfaire est qu'on ait

$$(\Gamma) \qquad |X_i(y) - X_i(\eta)| < K|y-\eta|^{\frac{1+\alpha}{2}} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Alors l'intégrale (4) sera d'ordre infinitésimal $\frac{\alpha}{2}$ par rapport à $y - y'$, ce qui assurera la convergence des séries : la marche à suivre est identique à celle qu'a suivie M. Levi. *Dans ce qui va suivre, sauf mention spéciale, nous ferons l'hypothèse* (Γ).

Ce qui précède suppose *que les points* A_1 *et* A_2 *ne coïncident pas.* Si ces points sont confondus, un examen particulier devient nécessaire. Il en est de même si en certains points isolés du contour *la condition* (Γ) *cesse d'être vérifiée.* Dans ces deux cas on trouve la solution comme *limite d'une suite de solutions régulières.* Pour cela on utilise les deux propriétés suivantes : 1° une solution de $\delta z = 0$, régulière à l'intérieur de (C) et continue sur (C), ne peut dépasser les valeurs extrêmes qu'elle atteint sur (C); 2° si une série de solutions de $\delta z = 0$ converge uniformément sur (C) elle converge uniformément en tout point intérieur à (C) et y représente une solution; nous reviendrons plus loin sur ces deux propositions en les généralisant [1].

4. Fonction de Green. — Dans les problèmes aux limites relatifs à l'équation $\delta_1 u = 0$, le contour C, au lieu d'être ouvert vers le haut, doit être ouvert vers le bas. Proposons-nous, par exemple, de déterminer, par le moyen d'équations intégrales la fonction $H(\xi, \eta; x, y)$, solution de $\delta_1 u = 0$ en ξ, η, s'annulant sur M_1M_2 et prenant sur M_1A_1 et M_2A_2 les mêmes valeurs que U. La fonction

$$G(H, P) = G(\xi, \eta; x, y) = U(\xi, \eta; x, y) - H(\xi, \eta; x, y)$$

qui dépend des deux points $P(x, y)$ et $H(\xi, \eta)$ est la *fonction de Green.* On démontre qu'elle est la solution de $\delta_1 u = 0$ en ξ, η et

[1] Nous avons admis implicitement jusqu'ici que le contour (C) était tout entier à distance finie. Mais on peut supposer que, par exemple, A_2B_2 s'éloigne indéfiniment : on obtient alors une solution qui, ainsi que sa dérivée, croît comme e^{Kx^2} ($K > 0$) si la valeur donnée sur la demi-droite $A_1\infty$ admet ce mode de croissance (*voir* Goursat, n° 545).

de $\delta z = 0$ en x, y. Elle s'annule quand H (ou P) est sur C_1 ou C_2, se comporte au voisinage de P (ou de H) comme la *solution fondamentale* U et est *positive* dans S.

En remplaçant u par G dans la formule (2), il vient, par le même procédé qui nous a donné la formule fondamentale, pour un point intérieur $P(x, y)$,

$$\text{(F)} \qquad 2\sqrt{\pi}\, z(x, y) = -\int_{M_1A_1+A_2M_2} z(\xi, \eta)\frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\eta + \int_{A_1A_2} G\, z(\xi, y_1)\, d\xi$$
$$-\iint_{S_1} G(\xi, \eta; x, y)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Nous obtenons ainsi la solution de $\delta z = f$ prenant des valeurs données sur (C) par une formule qui peut servir *pour un contour déterminé*, quelles que soient les données. Cette formule prouve que la solution, si elle existe (et nous en sommes assurés quand $f = 0$), est *unique*. Mais ceci suppose l'existence de $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ au bord. Nous reviendrons dans un instant sur ce point (*voir* § 5) et nous reparlerons plus loin de cette formule dans l'étude de l'équation $\delta z = f$.

Tout d'abord, occupons-nous de la formation effective de G et envisageons-la comme solution de $\delta_1 u = 0$ en ξ, η. La fonction H peut se mettre sous la forme

$$H = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{y} V[\xi, \eta; X_1(s), s]\varphi_1(s; x, y)\, ds$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{y} V[\xi, \eta; X_2(s), s]\varphi_2(s; x, y)\, ds,$$

φ_1 et φ_2 étant solutions du système suivant, obtenu en faisant tendre H vers C_1 et C_2,

$$U[X_1(s), s; x, y] = -\varphi_1(s; x, y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{s}^{y} V[X_1(s), s; X_1(t), t]\varphi_1\, dt$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{s}^{y} V[X_1(s), s; X_2(t), t]\varphi_2\, dt$$

et une autre équation analogue.

Il est clair, d'après cela, que H (et par suite G) admettra, quels que soient H et P *à l'intérieur* de S, *des dérivées de tous ordres en* ξ, η *et* x, y qui seront solutions de $\delta_1 u = 0$ en ξ, η et de $\delta z = 0$ en x, y. On obtiendra les premières en dérivant V dans la formule donnant H

et les secondes en dérivant φ_1 et φ_2. Si X_1 et X_2 sont dérivables, la dérivation en ξ, η sera possible même si H est au bord, quand P est dans S, d'après ce que nous avons vu à la fin du paragraphe 2, formule (7). Dans les mêmes conditions (H au bord, P dans S), si X_1 et X_2 satisfont à (Γ), la dérivation en (x, y) sera possible également. Nous obtiendrions des conclusions analogues en intervertissant le rôle des points P et H.

Étudions, par exemple, la dérivée $\frac{\partial G}{\partial x}$ qui joue un rôle important dans la solution des problèmes aux limites. La dérivée $\frac{\partial H}{\partial x}$ est donnée par la formule

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{y} V[\xi, \eta; X_1(s), s]\frac{\partial \varphi_1(s; x, y)}{\partial x}ds \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{y} V[\xi, \eta; X_2(s), s]\frac{\partial \varphi_2(s; x, y)}{\partial x}ds,\end{aligned}$$

et, si nous posons $\frac{\partial \varphi_1(s; x, y)}{\partial x} = \bar{\varphi}_1(s)$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \bar{\varphi}_2(s)$ et

$$2\sqrt{\pi}\, V_{ij}(s, t) = V[X_i(s), s; X_j(t), t] \qquad (i, j = 1, 2),$$

$\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ seront déterminées par les deux équations

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & -\frac{1}{2}V[X_1(s), s; x, y] \\ & \quad = -\bar{\varphi}_1(s) + \int_s^y V_{11}(s, t)\bar{\varphi}_1(t)\,dt + \int_s^y V_{12}(s, t)\bar{\varphi}_2(t)\,dt, \\ & -\frac{1}{2}V[X_2(s), s; x, y] \\ & \quad = -\bar{\varphi}_2(s) + \int_s^y V_{21}(s, t)\bar{\varphi}_1(t)\,dt + \int_s^y V_{22}(s, t)\bar{\varphi}_2(t)\,dt.\end{aligned}\right.$$

Or si nous voulions former la solution de $\delta_1 u = 0$ nulle pour $\eta = y$ et prenant au bord la valeur $-\frac{1}{2}V[X(\eta), \eta; x, y] = \frac{\partial}{\partial x}V[X(\eta), y; x, y]$, nous aurions à écrire précisément les équations qui déterminent $\frac{\partial H}{\partial x}$. Il résulte de là que $\frac{\partial G}{\partial x}$, qui est égale à $\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}$, *s'annule quand le point* H *est sur* C_1 *ou* C_2 *et* P *à l'intérieur de* S, et ceci est vrai pour toutes les dérivées de G en (x, y), ce qui était d'ailleurs facile à prévoir puisque G est nul au bord, quel que soit P dans l'aire S. Il résulte de

la symétrie de la fonction de Green que *toutes les dérivées en* (ξ, η) *sont également nulles quand* P *est sur* C_1 *ou* C_2 *et* H *à l'intérieur.*

4* Proposons-nous maintenant d'obtenir une limitation de $\frac{\partial G}{\partial x}$ valable quels que soient P et H à l'intérieur ou au bord [1]. Pour cela, envisageons les deux séries qui vont représenter $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$: en opérant la résolution des équations (8) par approximations successives, nous pouvons écrire

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \theta'_0 + \theta'_1 + \theta'_2 + \ldots \qquad \bar{\varphi}_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \theta''_0 + \theta''_1 + \theta''_2 + \ldots$$

les θ étant fonctions de x, y et s : par suite nous obtiendrons $\frac{\partial H}{\partial x}$ sous forme de série également

$$\frac{\partial H}{\partial x} = h_0 + h_1 + h_2 + \ldots$$

or θ'_0, θ''_0 et h_0 ont pour expression

$$\theta'_0 = \frac{1}{2} V[X_1(s), s; x, y], \qquad \theta''_0 = -\frac{1}{2} V[X_2(s), s; x, y].$$

(9) $$h_0 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{y} V[\xi, \eta; X_1(s), s] V[X_1(s), s; x, y]\, ds - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{y} V[\xi, \eta; X_2(s), s] V[X_2(s), s; x, y]\, ds.$$

Voyons maintenant les termes suivants. De l'inégalité (Γ) résulte que

$$|V_{ij}| < \frac{L}{|s-t|^{1-\frac{\alpha}{2}}},$$

car cette inégalité, qui a lieu pour $i = j$, est vraie *a fortiori* pour $i \neq j$, à la condition que les points A_1 et A_2 ne coïncident pas. Par consé-

---

(1) Conformément à ce que nous avons dit dans l'introduction, nous marquons d'un astérisque les paragraphes concernant les calculs qui se simplifient notablement dans le cas d'un contour rectangulaire : le lecteur trouvera ces calculs dans la Note placée à la fin du Mémoire.

En ce qui concerne la fonction de Green, on pourrait lui appliquer, dans le plan, une méthode analogue à celle que nous avons employée dans l'espace (§ 39-40), pour limiter les intégrales où elle figure.

quent, les θ' et θ'' seront majorés par les quantités θ données par

$$\theta_p(s) = \lambda \int_s^y \frac{\theta_{p-1}(t)}{|t-s|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\, dt,$$

λ étant un coefficient numérique égal à $2\,\mathrm{L}$. Or, nous avons

$$\theta'_1 = \frac{1}{2}\int_s^y \mathrm{V}_{11}(s,t)\,\mathrm{V}[\mathrm{X}_1(t), t;\, x, y]\, dt - \frac{1}{2}\int_s^y \mathrm{V}_{12}(s,t)\,\mathrm{V}[\mathrm{X}_2(t), t;\, x, y]\, dt$$

et une formule analogue pour θ''_1.

Ouvrons ici une parenthèse. Nous avons, dans le paragraphe **2**, envisagé les intégrales de la forme

$$\mathfrak{J}(x, y) = \int_{y_1}^{y} \mathrm{V}[\mathrm{X}(t), t;\, x, y]\,\psi(t)\, dt$$

et nous avons vu que, si Ψ est le maximum de ψ dans l'intervalle (y_1, y_2) on peut déterminer un nombre (L) tel que

$$(6) \qquad \mathfrak{J}(x, y) < (\mathrm{L})\Psi \qquad \text{pour} \qquad y_1 \leqq y \leqq y_2.$$

Supposons maintenant que ψ soit de la forme

$$\psi(y) = \frac{\psi_1(y)}{(y-y_1)^\beta}, \qquad |\psi| < \Psi_1, \qquad 0 < \beta < 1,$$

$\psi_1(y)$ étant une fonction bornée, continue dans l'intervalle (y_1, y_2) sauf peut-être pour la valeur y_1. Appelons $\mathfrak{J}^{(1)}$ l'intégrale $\mathfrak{J}$ relative à cette nouvelle fonction et décomposons l'intervalle d'intégration (y_1, y) en deux intervalles *égaux*. Dans le premier de ces intervalles nous prendrons, comme limitation de V, $\dfrac{(\mathrm{L})}{y-y_1}$ et, dans le second, nous appliquerons la formule (6) en prenant comme limitation de ψ, $\dfrac{\Psi_1}{\left(\frac{y-y_1}{2}\right)^\beta}$; il vient alors

$$\mathfrak{J}^{(1)} = \int_{y_1}^{\frac{y+y_1}{2}} + \int_{\frac{y+y_1}{2}}^{y} < (\mathrm{L})\frac{\Psi_1}{y_1-y}\int_{y_1}^{\frac{y+y_1}{2}} \frac{dt}{(t-y)^\beta} + (\mathrm{L})\frac{\Psi_1}{(y-y_1)^\beta} < (\mathrm{L})'\frac{\Psi_1}{(y-y_1)^\beta}.$$

Cela posé, remarquons que θ'_1 est une intégrale du type $\mathfrak{J}^{(1)}$,

avec $\beta = 1 - \frac{\alpha}{2}$. De même pour θ''_1. Par suite, nous pouvons poser

$$\theta_1(s) = \frac{\mu}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}},$$

μ étant une constante qui dépend de y_2 et y_1. On déduit de là

$$\theta_2 = \mu\lambda \int_s^y \frac{dt}{(y-t)^{1-\frac{\alpha}{2}}(t-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} = \mu \mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)(y-s)^{\alpha-1}$$

$$= \frac{\mu \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \frac{\lambda \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)(y-s)^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\alpha)},$$

$$\theta_3 = \mu\lambda^2 \mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \int_s^y \frac{dt}{(y-t)^{1-\alpha}(t-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \mu\lambda^2 \mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}, \alpha\right)(y-s)^{\frac{3\alpha}{2}-1}$$

$$= \frac{\mu \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \frac{\left[\lambda \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)(y-s)^{\frac{\alpha}{2}}\right]^2}{\Gamma\left(\frac{3\alpha}{2}\right)}.$$

et, d'une manière générale,

$$\theta_p = \frac{\mu \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \frac{\left[\lambda \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)(y-s)^{\frac{\alpha}{2}}\right]^{p-1}}{\Gamma\left(\frac{p\alpha}{2}\right)}.$$

Donc

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots = \frac{\sigma}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}},$$

σ étant une série convergente. Il résulte des calculs précédents que nous pouvons écrire

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \theta''_0 + \frac{\overline{\theta}_1}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}}, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \theta''_0 + \frac{\overline{\theta}_2}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}},$$

$\overline{\theta}_1$ et $\overline{\theta}_2$ étant des fonctions toujours *bornées*, *continues en* x, y, s, *sauf peut-être pour* $x = X_i(y)$, $y = s$.

Nous avons donc, en définitive, h_0 étant donné par la formule (9),

$$(10)\qquad \frac{\partial H}{\partial x} = h_0 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{y} V[\xi, \eta; X_1(s), s] \frac{\overline{\theta}_1}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{y} V[\xi, \eta; X_2(s), s] \frac{\overline{\theta}_2}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

et, par suite, d'après ce que nous avons vu plus haut sur les intégrales du type $s^{(1)}$

$$(11)\qquad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2}V(\xi, \eta; x, y) - h_0 - \frac{g_1}{(y-\eta)^{1-\frac{\alpha}{2}}},$$

g_1 étant une fonction continue, sauf quand P et H tendent vers un même point de C_1 ou de C_2, mais bornée quels que soient P ou H à l'intérieur de S ou au bord.

La détermination de G comme solution de $\overline{\delta}z = 0$ nous aurait conduits également à la formule

$$(12)\qquad \frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{1}{2}V(\xi, \eta; x, y) - h_0 - \frac{\gamma_1}{(y-\eta)^{1-\frac{\alpha}{2}}},$$

γ_1 jouissant des mêmes propriétés que g_1.

Quant à G, puisqu'elle est positive, il est clair qu'on pourra l'écrire

$$(13')\qquad G = gU(\xi, \eta; x, y) \qquad 0 \leq g \leq 1,$$

g étant une *fonction bornée*, nulle quand l'un des deux points est sur C_1 ou C_2, continue sauf si P et H tendent vers un même point de C_1 ou de C_2.

Remarquons enfin que nous pouvons former une fonction analogue à la fonction de Green, quand on se donne sur C_i la valeur de z ou celle de $\frac{\partial z}{\partial x}$ ou bien encore une relation de la forme $l_i(y)\frac{\partial z}{\partial x} + m_i(y)z = \chi_i(y)$. On détermine alors la fonction de Green par la condition que χ_i seul

subsiste dans les intégrales ([1]) et l'on sera ramené à calculer une solution satisfaisant sur C_i à une relation de même forme que z. Nous ne nous étendrons pas sur ce sujet qui ne présente pas de difficultés.

5. Remarques sur l'existence des dérivées au voisinage du contour. — Soient $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$, $\Phi(x)$ les valeurs données sur C_1, C_2, A_1A_2 (*fig.* 1). Posons

$$\bar{z}(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{a_1}^{a_2}\frac{1}{\sqrt{y-y_1}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-y_1)}}\Phi_0(\xi)\,d\xi;$$

dans cette intégrale y_1 est l'ordonnée de A_1A_2, a_1 et a_2 sont tels que $a_1<x_1<x_2<a_2$, x_1 et x_2 étant les abscisses des points A_1 et A_2 et $\Phi_0(\xi)$ est une fonction continue dans l'intervalle (a_1, a_2) coïncidant avec $\Phi(x)$ dans l'intervalle (x_1, x_2) ([2]). Ainsi que nous l'avons dit plus haut, si l'on pose

$$z=z_1+\bar{z},$$

z_1 sera la solution de $\mathcal{F}z=0$ *s'annulant sur* A_1A_2 et se réduisant sur C_1, C_2 à des fonctions continues données, *nulles en* A_1 *et* A_2 et nous pourrons la représenter par la somme de deux intégrales du type $\mathfrak{I}$.

Or, nous avons

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{\partial \bar{z}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}=\frac{-1}{4\sqrt{\pi}}\int_{a_1}^{a}\frac{x-\xi}{(y-y_1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-y_1)}}\Phi_0(\xi)\,d\xi$$

et le changement de variable $x-\xi=2s\sqrt{y-y_1}$ montre immédiatement que $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ devient infini sur A_1A_1 comme $\frac{1}{\sqrt{y-y_1}}$. La dérivée $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ s'étudie de même et l'on peut donc écrire

$$(14)\qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}=\frac{\zeta}{\sqrt{y-y_1}},\qquad \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2}=\frac{\zeta'}{y-y_1},$$

([1]) Dans un problème de ce genre il convient de faire l'hypothèse que X_i soit dérivable, afin de n'avoir, dans la formule fondamentale, que des intégrales portant sur la variable η.

([2]) On peut supposer $a_1=-\infty$, $a_2=+\infty$.

ζ et ζ' étant bornées et continues (et même, il est facile de voir que ζ tend vers zéro quand y tend vers y_1).

Si $\Phi'(x)$ existe, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ tend vers cette valeur en tout point appartenant au segment A_1A_2; il est d'ailleurs aisé de le vérifier par une intégration par parties immédiate. Dans le cas intermédiaire où l'on a sur A_1A_2 $|\Phi(x)-\Phi(\xi)|<K|x-\xi|^\beta$ il suffit de remplacer, dans l'intégrale $\bar{z}$, $\overline{\Phi}_0(\xi)$ par $[\Phi_0(\xi)-\Phi_0(x)]+\Phi_0(x)$; $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ se décompose alors en deux autres intégrales : à la première on applique le changement de variable indiqué plus haut, la seconde est nulle si $a_1=-\infty$ et $a_2=+\infty$ et l'on voit aisément que, dans ce cas [1],

$$(14')\qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}=\frac{\zeta}{(y-y_1)^{\frac{1-\beta}{2}}},\qquad \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2}=\frac{\zeta}{(y-y_1)^{1-\frac{\beta}{2}}}.$$

5*. Passons maintenant à $\frac{\partial z_1}{\partial x}$. D'après ce que nous avons vu plus haut [formule (6')], cette dérivée peut, dans le cas de simple continuité des données, se mettre sous la forme

$$(15)\qquad \frac{\partial z_1}{\partial x}=\frac{\zeta_1}{PM_1}+\frac{\zeta_2}{PM_2},$$

ζ_1 et ζ_2 étant bornées dans S, bord compris, et continues en tout point intérieur. Proposons-nous maintenant de chercher dans quel cas $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ est continue, même au bord.

Pour étudier $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, il sera commode ici de mettre z_1 sous la forme

$$z_1=\int_{y_1}^{y} U[X_1(\eta),\eta;x,y]\,\varphi_1(\eta)\,d\eta+\int_{y_1}^{y} U[X_2(\eta),\eta;x,y]\,\varphi_2(\eta)\,d\eta,$$

car $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ est alors représenté par une somme de deux intégrales du type $\mathfrak{z}$ et l'on a, sur C_i par exemple,

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}=-\sqrt{\pi}\,\varphi_1(y)-\frac{1}{2}\int_{y_1}^{y} V[X_1(\eta),\eta;X_1(y),y]\,\varphi_1\,d\eta$$
$$-\frac{1}{2}\int_{y_1}^{y} V[X_2(\eta),\eta;X_1(\eta),\eta]\,\varphi_2\,d\eta.$$

---

[1] Si Φ' existe et satisfait à la même condition que nous supposons ici pour Φ, dans les relations (14') il faut remplacer $\bar{z}$ par $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ ou β par $1+\beta$ (*voir* § 7).

Cette façon de calculer z_1, qui est celle qu'avait indiquée M. Holmgren, est avantageuse ici à cause du calcul de la dérivée, mais elle conduit à un système d'équations intégrales de première espèce (¹)

$$
(16) \quad \left\{ \begin{aligned} F_1(y) &= \int_{y_1}^{y} U_{11}(\eta, y)\,\varphi_1(\eta)\,d\eta + \int_{y_1}^{y} U_{21}(\eta, y)\,\varphi_2(\eta)\,d\eta, \\ F_2(y) &= \int_{y_1}^{y} U_{12}(\eta, y)\,\varphi_1(\eta)\,d\eta + \int_{y_2}^{y} U_{22}(\eta, y)\,\varphi_2(\eta)\,d\eta, \end{aligned} \right.
$$

en posant

$$
(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & F_i = \Phi_i(y) - \bar{z}[X_i(y), y], \qquad U_{ij}(\eta, y) = U[X_i(\eta), \eta; X_j(y), y] \\ & \qquad\qquad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \right.
$$

Ce système se ramène au système d'équations intégrales de deuxième espèce (*voir* Holmgren, *loc. cit.*) :

$$
(16\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1'(y) &= \pi\,\varphi_1(y) + \int_{y_1}^{y} \overline{U}_{11}(\eta, y)\,\varphi_1(\eta)\,d\eta + \int_{y_1}^{y} \overline{U}_{21}(\eta, y)\,\varphi_2(y)\,d\eta, \\ f_2'(y) &= \pi\,\varphi_2(y) + \int_{y_1}^{y} \overline{U}_{12}(\eta, y)\,\varphi_1(\eta)\,d\eta + \int_{y_1}^{y} \overline{U}_{22}(\eta, y)\,\varphi_2(y)\,d\eta, \end{aligned} \right.
$$

en posant

$$
f_i'(y) = \frac{d}{dy}\int_{y_1}^{y} \frac{F_i(s)\,ds}{\sqrt{y-s}}, \qquad \overline{U}_{ij} = \frac{d}{dy}\int_{\eta}^{y} \frac{ds}{\sqrt{(y-s)(s-\eta)}}\, e^{-\frac{[X_i(s) - X_j(\eta)]^2}{4(s-\eta)}}.
$$

Il faut que les fonctions f_i', U_{ij} existent. Or on a, par un procédé bien connu,

$$
(17') \qquad f_i'(y) = \frac{F_i(y)}{\sqrt{y - y_1}} - \frac{1}{2}\int_{y_1}^{y} \frac{F_i(s) - F_i(y)}{(y-s)^{\frac{3}{2}}}\,ds.
$$

Si nous voulons que $\frac{\partial z}{\partial x}$ soit continue en tous les points de (C) même

---

(¹) Nous reprenons ici, sous des hypothèses plus générales, le calcul de M. Holmgren (*Arkiv för Matematik*, Bd III, 1907).

Cette représentation de z_1 est commode quand on donne les valeurs de $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ sur C_1 et C_2 : si leur module est inférieur à $M_1 y^{\beta}$, on voit aisément qu'on peut écrire dans S, bord compris,

$$
|z_1| < (L)\, M_1\, B\left(\frac{1}{2}, \beta + 1\right) y^{\beta + \frac{1}{2}},
$$

B étant la fonction eulérienne.

en A_i ($i = 1, 2$), il faudra que $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ soit nul en ces points, puisque $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ est égal en ces points à $\Phi'(x_i)$, qui doit être la valeur de $\frac{\partial z}{\partial x}$. Il sera donc nécessaire que $\varphi_1(y_1) = \varphi_2(y_1) = 0$, ce qui exigera tout d'abord que $\frac{F_i(y)}{\sqrt{y - y_1}}$ tende vers zéro avec $y - y_1$. D'après la formule (17), il suffira donc que $\frac{\Phi_i(y) - \Phi_i(y_1)}{\sqrt{y - y_1}}$ et $\frac{\bar{z}[X_i(y), y] - \bar{z}(x_i, y_1)}{\sqrt{y - y_1}}$ tendent vers zéro avec $y - y_1$. Nous supposerons donc ces deux conditions vérifiées : la seconde le sera certainement si $\Phi'(x)$ existe ([1]). Enfin il faudra également que l'intégrale de (17') ait un sens et tende vers zéro avec $y - y_1$: d'après la formule (17) nous sommes conduits à faire cette hypothèse pour $\int_{y_1}^{y} \frac{\Phi_i(s) - \Phi_i(y)}{(y - s)^{\frac{3}{2}}}$ et, d'autre part, nous avons

$$\bar{z}[X_i(y), y] - \bar{z}[X_i(s), s] = [X_i(y) - X_i(s)] \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\right)' + (y - s) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right)',$$

$\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\right)'$ et $\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right)'$ désignant les valeurs des dérivées de $\bar{z}$ en un point intermédiaire (x', y'). $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ est partout continue. $X_i(y) - X_i(s)$ est de l'ordre de $(y - s)^{\frac{1+\alpha}{2}}$. Quant à $\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right)' = \left(\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2}\right)'$ d'après ce que nous avons vu plus haut, elle est de la forme $\frac{\zeta}{\sqrt{y' - y_1}}$ lorsque $\Phi'(x)$ existe, ζ tendant vers zéro avec $y - y_1$. Il résulte de là que l'intégrale

$$\int_{y_1}^{y} \frac{\bar{z}[X_i(y), y] - \bar{z}[X_i(s), s]}{(y - s)^{\frac{3}{2}}} ds$$

a un sens et est continue pour $y \geqq y_1$: elle tend vers zéro quand y tend vers y_1.

Passons maintenant à $\bar{U}_{ij}$: quand $i \neq j$, cette dérivée existe et est continue pour y et $\eta \geqq y_1$. Pour $i = j$, nous l'écrivons en supprimant l'indice,

$$\bar{U}_{ii} - \bar{U} = -e^{-\frac{[X(y) - X(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} \frac{d}{dy} \int_{y_1}^{y} \frac{ds}{\sqrt{(y - s)(s - \eta)}}$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y} \frac{ds}{(y - s)^{\frac{3}{2}} \sqrt{s - \eta}} \left\{ e^{-\frac{[X(y) - X(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} - e^{-\frac{[X(s) - X(\eta)]^2}{4(s-\eta)}} \right\}.$$

([1]) On le vérifierait en écrivant, dans $\bar{z}$, $\Phi_0(\xi) = \Phi_0(x_i) + (\xi - x_i)[\Phi'_0(x_i) + \varepsilon_i]$. ε_i tendant vers zéro avec $\xi - x_i$.

La première intégrale étant égale à π, le premier terme s'évanouit. Dans la deuxième intégrale, le crochet est en valeur absolue inférieur à

$$A\left\{\frac{[X(y)-X(\eta)]^2}{y-\eta}-\frac{[X(s)-X(\eta)]^2}{s-\eta}\right\},$$

A restant fini. Cette différence s'écrit

$$\frac{[X(s)-X(\eta)]^2(s-y)}{(y-\eta)(s-\eta)}+\frac{y-\eta}{1}[X(y)-X(s)][X(y)-X(\eta)+X(s)-X(\eta)],$$

et, en utilisant la condition (Γ), nous voyons que cette expression est inférieure en valeur absolue à

$$\frac{K^2}{y-\eta}\left\{(s-\eta)^\alpha(y-s)+(y-s)^{\frac{1+\alpha}{2}}\left[(y-\eta)^{\frac{1+\alpha}{2}}+(s-\eta)^{\frac{1+\alpha}{2}}\right]\right\}.$$

On en déduit sans peine que la deuxième intégrale a un sens et est de l'ordre de $\frac{1}{(y-\eta)^{1-\alpha}}$. On peut donc écrire

$$U_{ij}=\frac{u_{ij}}{(y-\eta)^{1-\alpha}},$$

u_{ij} étant bornée, continue pour y et $\eta > y_1$. Il résulte de là que la résolution du système (16 *bis*) s'effectue sans difficulté : φ_1 et φ_2 sont continues et nulles pour $y=y_1$, si l'intégrale $\int_{y_1}^{y}\frac{\Phi_i(y)-\Phi_i(s)}{(y-s)^{\frac{3}{2}}}$ a un sens, si, ainsi que $\frac{\Phi_i(y)-\Phi_i(y_1)}{\sqrt{y-y_1}}$, elle tend vers zéro avec $y-y_1$, et si $\Phi'(x)$ admet une dérivée continue. Et, dans ces conditions, $\frac{\partial z}{\partial x}$ existe et est continue sur le bord, même aux points A_1 et A_2 [1].

---

[1] Lorsque Φ_i admet, par rapport à y, un accroissement d'ordre $\frac{1+\beta}{2}$ et Φ', par rapport à x, un accroissement d'ordre β' (β et $\beta' < 1$), on voit sans peine que $|f_i'(y)| < (L)(y-y_1)^{\frac{\gamma}{2}}$, γ étant le plus petit des nombres α, β et β', et, par suite, M' étant le maximum de $|\Phi(x)|$,

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < (L)(y-y_1)^{\frac{\gamma}{2}}, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < (L)(y-y_1)^{\frac{\gamma}{2}}+M',$$

$\frac{\gamma}{2}$ sera remplacé par un nombre $> \frac{1}{2}$, si Φ_i' et $\Phi''(x)$ existent et admettent des accroissements d'ordre non nul. Si Φ n'est que continu, on a $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < \frac{(L)}{\sqrt{y-y_1}}$.

6. Quant à $\frac{\partial z}{\partial y}$, la plus simple hypothèse qu'on puisse faire, pour être assuré de son existence au bord, est que X_1 *et* X_2 *admettent une dérivée première ainsi que* Φ_1 *et* Φ_2 *et que* Φ *admette des dérivées première et seconde.*

Tout d'abord, dans ces conditions, la dérivée $\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}$, qui est égale à $\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2}$, tend vers $\psi''(x)$ en tout point de $A_1 A_2$: une double intégration par parties le montre immédiatement. De plus, $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ existe au bord et il est facile d'avoir, par un autre procédé que plus haut, ses valeurs sur C_1 et C_2 au moyen d'équations intégrales. Si, en effet, on dérive la formule (α) par rapport à x, puis qu'on fasse tendre le point P vers C_1 puis vers C_2, on obtient facilement, en utilisant la formule de transformation de $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x}$, un système de deux équations intégrales de deuxième espèce, qui déterminent $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ sur chaque bord ([1]).

Quand à la dérivée $\frac{\partial z_1}{\partial y}$, si elle existe sur C_i, elle est évidemment donnée par l'équation

$$F'_i(y) = \frac{\partial z_1}{\partial x} X'_i(y) + \frac{\partial z_1}{\partial y}. \tag{18}$$

Ceci ne prouve pas que $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ tende vers la valeur ainsi déterminée, mais on peut le vérifier aisément. En effet, la valeur limite de $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ $\left(\text{qui est égale à } \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right)$, si elle existe, est solution du système d'équa-

([1]) Ce procédé ne pourrait être utilisé avec les hypothèses que nous avons faites plus haut sur X_1 et X_2, car il suppose l'existence des intégrales curvilignes en $d\xi$. Dans le cas où C_1 et C_2 sont rectifiables, il peut s'appliquer en supposant que les données au bord admettent, pour un accroissement de y, un accroissement d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$. Nous nous bornerons ici à signaler cette méthode, sans entrer dans les détails de calcul. Disons aussi que le système d'équations intégrales peut être remplacé par deux équations relatives à chaque courbe C_i respectivement, en supprimant les termes en $\frac{\partial z}{\partial x}$ relatifs à l'autre bord par l'emploi de deux fonctions de Green.

tions intégrales obtenu en appliquant la formule (β) à la solution $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ de $\delta z = 0$ et en l'écrivant successivement pour les bords droit et gauche. Or, on retrouve sans peine, en remplaçant dans ce système $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ par la valeur tirée de (18), le système qui est vérifié par $\frac{\partial z_1}{\partial x}$.

Il est clair que, si nous voulons que z soit *régulière dans* S, *bords compris*, l'équation $\delta z = 0$ devra être vérifiée en A_1 et A_2. Or, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont données en ces points par les équations

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_i = \Phi''(x_i), \qquad \Phi_i'(y_1) = \Phi'(x_i)\,X_i'(y_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_i \qquad (i = 1, 2).$$

Il faut donc que

$$(19) \qquad \Phi''(x_i) - \Phi'(x_i)\,X_i'(y_1) - \Phi_i'(y_1) = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Cette condition est aussi *suffisante* : en effet, $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ devra être la solution de $\delta z = 0$ prenant sur C_i la valeur fournie par l'équation (18), et comme

$$F_i(y) = \Phi_i(y) - \bar{z}[X_i(y), y],$$

on voit immédiatement que, en vertu de (17), $F_i(y_1) = 0$, ce qui assure bien la continuité de $\frac{\partial z}{\partial y}$ dans S, bords compris.

6*. Nous avons cherché plus haut des conditions *suffisantes* pour l'existence de $\frac{\partial z}{\partial x}$ au bord. D'autre part, quand on ne fait pas d'autres hypothèses que la continuité des données, nous avons indiqué [formules (14) et (15)] quelle était l'allure de $\frac{\partial z}{\partial x}$. Mais il existe des *cas intermédiaires*. Si, par exemple, Φ_1 et Φ_2 admettent, relativement à y, des accroissements d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ et si, à partir des valeurs x_1 et x_2, $\Phi(x)$ admet un accroissement d'ordre inférieur à 1, la formule (15) doit être remplacée par la suivante

$$(20) \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\zeta_1}{\overline{M_1 P}^{\beta}} + \frac{\zeta_2}{\overline{PM_2}^{\beta}} \qquad (0 < \beta < 1).$$

Il est préférable de ne pas nous étendre trop longtemps sur ces considérations : bornons-nous à dire que, pour établir la formule (20), il suffirait d'envisager le système d'équations intégrales de deuxième espèce auquel conduit la représentation de z par des fonctions $\mathfrak{J}$.

Quand X_1 et X_2 sont dérivables, la démonstration est plus aisée et le lecteur pourra la reconstituer en remarquant que, si φ admet par rapport à *y un accroissement d'ordre non nul*, autrement dit si l'on a (*condition de Lipschitz généralisée* avec $0 < \gamma < 1$)

(21) $|\varphi(y) - \varphi(s)| < (L)\,|y - s|^{\gamma}$, c'est-à-dire $|\Delta\varphi| < (L)\,\Delta y^{\gamma}$,

l'intégrale $\mathfrak{J}$ correspondante peut s'écrire ($X = X_1$ ou X_2)

$$\mathfrak{J} = \varphi(y)\int_{y_1}^{y} V[X(s), s; x, y]\,ds + \int_{y_1}^{y} V[\varphi(s) - \varphi(y)]\,ds,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial x} = \varphi(y)\frac{\partial}{\partial x}\int_{y_1}^{y} V\,ds + \int_{y_1}^{y}\frac{\partial V}{\partial x}[\varphi(s) - \varphi(y)]\,ds.$$

Le premier terme se transforme par la formule (7), le deuxième est continu dans tout le plan si $\gamma > \frac{1}{2}$ et, si $\gamma < \frac{1}{2}$, il est inférieur en valeur absolue à $\frac{L}{|x - X(y)|^{1-2\gamma}}$, comme on le verrait immédiatement par le même procédé qui nous a servi à calculer la limitation de $\mathfrak{J}$ [1].

Or, si l'on représente z_1 par la somme de deux intégrales du type $\mathfrak{J}$, les deux fonctions φ correspondantes vérifient l'inégalité (21), avec $\gamma < \frac{1}{2}$ si $\Delta\Phi_i$ est d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ et si $\Delta\Phi$ est d'ordre inférieur à *un*, et $\gamma > \frac{1}{2}$ si $\Delta\Phi_i$ est d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$ et si $\Phi'(x)$ existe, $\Delta\Phi'$ étant d'ordre inférieur à *un* [2].

Toutes ces questions pourraient également se traiter en utilisant la fonction de Green, et leur étude est particulièrement simple dans le

---

[1] Si $\lim\limits_{y'=y} \frac{\varphi(y) - \varphi(y')}{\sqrt{y - y'}} =$ zéro, le deuxième terme est une intégrale d'un type analogue à $\mathfrak{J}$.

[2] Ceci n'exige pas d'ailleurs que X_i soit dérivable : il suffit que la condition (Γ) soit vérifiée. Nous n'avons pas reproduit ici les calculs relatifs au cas général, mais nous les avons indiqués dans le cas du contour rectangulaire.

cas d'un contour rectangulaire. (*Voir* la Note relative à ce sujet pour les démonstrations.)

7. Accroissements d'une solution. — Au cours de ce Mémoire ([1]), l'étude des *accroissements d'une solution* pour un accroissement de x ou de y jouera un rôle capital. Il est clair que ces accroissements seront du premier ordre pour tout point *intérieur* à S. Mais il est très important d'avoir des formules qui soient valables *quel que soit le point choisi, même au bord.*

Envisageons tout d'abord la fonction $\bar{z}$ (§ 5) *et supposons* $y_1 = 0$: $\bar{z}$ tend vers $\Phi(x)$ quand y tend vers zéro, mais la différence $\bar{z}(x, y) - \Phi(x)$ n'a pas en général un ordre infinitésimal différent de zéro en y. Si, pour deux valeurs x et ξ de l'intervalle $(x_1 x_2)$, on a

$$|\Phi(x) - \Phi(\xi)| < K_1 |x - \xi|^\beta,$$

hypothèse déjà faite plus haut, nous écrirons de nouveau (*cf.* § 5)

$$\bar{z} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Phi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, 0; x, y)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} U[\Phi_0(\xi) - \Phi_0(x)]\, d\xi.$$

Le premier terme est égal à $\Phi(x)$, le second tend vers zéro comme $y^{\frac{\beta}{2}}$. Par suite, $\bar{z} - \Phi(x)$ est d'ordre $\frac{\beta}{2}$ en y.

On pourra alors écrire, dans toute région finie du demi-plan supérieur,

$$(21') \qquad \left|\bar{z}(x, y+k) - \bar{z}(x, y)\right| < (L) K_1 k^{\frac{\beta}{2}}.$$

En effet, nous verrons plus loin (§ 18) qu'une solution de l'équation $\delta z = 0$ régulière dans une région $\mathcal{R}$ ne peut admettre ni maximum positif, ni minimum négatif. Si donc Φ_0 est choisi tel que $\bar{z}$ soit nul à l'infini, son module maximum sera atteint sur Ox. Mais $\bar{z}(x, y+k) - \bar{z}(x)$ est aussi une solution nulle à l'infini ; donc son module est inférieur au maximum de $\left|\bar{z}(x, k) - \bar{z}(x, 0)\right|$, donc inférieur à $(L) K_1 k^{\frac{\beta}{2}}$.

([1]) Du moins pour tout ce qui concerne l'équation $r = f(x, y, z, p, q)$. Les paragraphes 7, 14 et 15 *ne seront utiles que pour cette équation seulement.*

Le même raisonnement montre que

$$|\bar{z}(x+h, y) - \bar{z}(x, y)| < (L) K_1 h^\beta.$$

Enfin, si $\Phi'(x)$ existe sur $A_1 A_2$ et admet un accroissement d'ordre β, dans l'inégalité (21′) il faut remplacer β par $1+\beta$ ou $\bar{z}$ par $\frac{\partial z}{\partial x}$ (*Cf.* § 5).

7*. Conservant toujours la même hypothèse que plus haut sur Φ, supposons que Φ_1 et Φ_2 admettent par rapport à y un accroissement d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}\cdot$ D'après ce que nous avons dit au paragraphe 6*, si nous représentons z_1 par la somme de deux intégrales telles que

$$\mathfrak{z}(x, y) = \int^y V[X(s), s; x, y]\,\varphi(s)\,ds,$$

φ admettra un accroissement d'ordre $\frac{\gamma}{2}$, $(\gamma < 1)$. Nous écrirons alors, P et M ayant pour ordonnée y [1], pour abscisses x et $X(y)$,

$$\Delta\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_P - \mathfrak{z}_M = \varphi(y)\,\Delta\int_0^y V\,ds + \Delta\int_0^{y'} V[\varphi(s) - \varphi(y)]\,ds$$
$$+ \int_{y'}^{y} V_P[\varphi(s) - \varphi(y)]\,ds - \int_{y'}^{y} V_M[\varphi(s) - \varphi(y)]\,ds,$$

avec $y - y' = \overline{MP}^2$. Si X est dérivable, le premier terme est de l'ordre de $MP = h$ puisque $\int_0^y V\,ds$ admet une dérivée de chaque côté de la courbe [formule (7) ou dérivation de la formule (α) appliquée à $z = 1$].

Le deuxième terme se transforme par la formule des accroissements finis ce qui, en remarquant que $\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| < \frac{(L)}{(y-s)^{\frac{3}{2}}}$, donne une limitation de la forme

$$(L)\,h\int_0^{y'} \frac{ds}{(y-s)^{\frac{3-\gamma}{2}}} < (L)\frac{h}{(y-y')^{\frac{1-\gamma}{2}}} = (L)\,h^\gamma.$$

Voyons le troisième terme : pour les valeurs de h inférieures à une limite fixe, on aura certainement $|X(y) - X(y')| < \frac{h}{2}$ [φ formule (5)]. Alors le troisième terme, se limitant comme dans la formule (5′),

---

[1] $\mathfrak{z}_M$ désigne ici la valeur limite de $\mathfrak{z}(x, y)$ quand le point (x, y) tend vers M d'un certain côté de la courbe.

est comparable à

$$\int_{y'}^{y} \frac{h}{(y-s)^{\frac{3-\gamma}{2}}} e^{-\frac{h^2}{16(y-s)}},$$

ce qui est de l'ordre de h^γ. Le quatrième est d'ordre $\alpha+\gamma$. Au total, on a (ce qui n'exigerait pas d'ailleurs la dérivabilité de X)

$$\Delta\vartheta < (\mathrm{L})h^\gamma.$$

Si nous considérons alors la fonction $\vartheta(x+h, y) - \vartheta(x, y)$ solution de $\mathcal{F}z = 0$, nulle à l'infini et sur $\mathrm{A}x$, admettant sur AB la limitation que nous venons de donner, elle l'admettra également dans tout le demi-plan supérieur.

Il résulte de là que (*Cf.* le 1° de la Note additionnelle)

$$|z_1(x+h, y) - z_1(x, y)| < (\mathrm{L})h^\gamma.$$

Passons maintenant à l'accroissement de z_1 relativement à y. Chacune des intégrales, dont la somme représente z_1, prend sur la courbe correspondante des valeurs dont l'ordre d'accroissement est $\frac{\gamma}{2}$. Remarquons tout d'abord que $\vartheta(x, 0) = 0$, et $\vartheta(x, k) < (\mathrm{L})k^{\frac{\gamma}{2}}$, car $|\varphi| < (\mathrm{L})y^{\frac{\gamma}{2}}$. Cela posé, faisons subir à la courbe AB la translation MP et soit $\mathrm{P}''(x+h, y+k)$ le point de l'arc ainsi obtenu qui a pour ordonnée $y+k$. La fonction $\vartheta(x+h, y+k) - \vartheta(x, y)$ est une solution de $\mathcal{F}z = 0$ nulle à l'infini et prenant sur AB et sur $\mathrm{A}x$ des valeurs dont le module est inférieur à $(\mathrm{L})k^{\frac{\gamma}{2}}$. Donc (voir *fig.* 2)

$$|\vartheta(x+h, y+k) - \vartheta(x, y)| < (\mathrm{L})h^{\frac{\gamma}{2}}.$$

mais on a

$$\vartheta_{\mathrm{P}'} - \vartheta_{\mathrm{P}} = \vartheta_{\mathrm{P}'} - \vartheta_{\mathrm{P}''} + \vartheta_{\mathrm{P}''} - \vartheta_{\mathrm{P}},$$

$$|\vartheta_{\mathrm{P}'} - \vartheta_{\mathrm{P}''}| < (\mathrm{L})h^\gamma, \qquad h < \mathrm{K}k^{\frac{1+\alpha}{2}}, \qquad [\text{condition } (\Gamma)].$$

Donc

$$|\vartheta_{\mathrm{P}'} - \vartheta_{\mathrm{P}}| < (\mathrm{L})k^{\gamma\frac{1+\alpha}{2}} + (\mathrm{L})k^{\frac{\gamma}{2}} < (\mathrm{L})k^{\frac{\gamma}{2}},$$

et, par suite,

$$|z_1(x, y+k) - z_1(x, y)| < (\mathrm{L})k^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Il résulte en définitive de toute cette étude que, *si les données* $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$, *admettent des accroissements d'ordre inférieur à* $\frac{1}{2}$ *et* $\Phi(x)$ *un accroissement d'ordre non nul, on peut déterminer un nombre* $\gamma < 1$, *tel que les inégalités*

$$(21'') \qquad |z(x+h,y)-z(x,y)|<(L)h^{\gamma}, \qquad |z(x,y+k)-z(x,y)|<(L)k^{\frac{\gamma}{2}}$$

aient lieu pour tous les points de S, *bords compris.*

Si l'accroissement de Φ_i *est d'ordre supérieur à* $\frac{1}{2}$ *et si* $\Phi'(x)$

Fig. 2.

existe et admet un accroissement d'ordre non nul, $\frac{\partial z}{\partial x}$ existe au bord et l'on a

$$(21''') \qquad |z(x,y+k)-z(x,y)|<(L)k^{\gamma} \qquad \left(\frac{1}{2}<\gamma<1\right).$$

Envisageons maintenant $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}+\frac{\partial z_1}{\partial x}$: $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ a déjà été étudié. Quant à la dérivée $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, nous pouvons la considérer comme une solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) des valeurs données. Celles-ci s'obtiennent aisément en représentant z_1 par des intégrales $\mathfrak{J}$ et en utilisant la formule (7) : on voit alors que, si X'_i, Φ'_i, $\Phi''(x)$ existent, satisfont à la condition (19) et admettent des accroissements d'ordre non nul, la valeur de $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ sur C_i est une fonction de y admettant un accroissement

d'ordre $> \frac{1}{2}$ et elle est nulle sur A_1A_2 (¹). D'où les accroissements de $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Conservons toujours les mêmes hypothèses sur les données et le contour. Alors $\frac{\partial z}{\partial y}$ sera la solution de $\delta z = 0$ prenant au bord les valeurs suivantes :

$$\text{Sur } C_i \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_i = \Phi_i'(y) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_i X_i'(y);$$
$$\text{Sur } A_1A_2 \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = \Phi''(x).$$

Ces valeurs admettent des accroissements d'ordre non nul et nous pourrons écrire pour $\frac{\partial z}{\partial y}$ les inégalités (21″) ou (21‴).

Il résulte de cette analyse que, si $\Phi_i'(y)$, $\Phi'(x)$, $\Phi''(x)$, $X_i'(y)$ *existent et admettent des accroissements d'ordre non nul*, en tout point de S, bord compris, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ existent, et l'on pourra déterminer un nombre $\gamma < 1$ tel que, pour un accroissement donné de y, on ait, Δy étant la valeur absolue de cet accroissement,

$$|\Delta z| < (L)\,\Delta y, \qquad \left|\Delta \frac{\partial z}{\partial x}\right| < (L)\,\Delta y^{\gamma+\frac{1}{2}}, \qquad \left|\Delta \frac{\partial z}{\partial y}\right| < (L)\,\Delta y^{\gamma},$$

Si $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ existe dans S, bords compris, la deuxième inégalité doit être remplacée par $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < (L)\Delta y$, et l'on peut écrire, en définitive [*voir* la démonstration spéciale au *contour rectangulaire*, formule (3′)],

$$(22) \qquad |\Delta z| < (L)\,\Delta y, \qquad \left|\Delta \frac{\partial z}{\partial x}\right| < (L)\,\Delta y^{\beta+\gamma}, \qquad \left|\Delta \frac{\partial z}{\partial y}\right| < (L)\,\Delta y^{\gamma},$$

en appelant β le plus petit des deux nombres $\frac{1}{2}$ et $1-\gamma$.

Remarquons que tout ce que nous venons de dire s'appliquerait à la solution de $\delta z = \varphi(x)$ prenant sur (C) les valeurs données, au cas où φ satisfait aux mêmes conditions que Φ. Cette solution s'obtient, en effet, en ajoutant à une intégrale régulière quelconque ζ de $\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \varphi(x)$

(¹) $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y}$ peut même exister au bord. *Voir* la Note sur le contour rectangulaire.

la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) les mêmes valeurs que $z - \zeta$: ces valeurs jouissent des mêmes propriétés d'accroissement que les valeurs données. Donc la solution z vérifie les inégalités (22).

II. — Étude des solutions de l'équation $\delta z = f(x, y)$.

8. La fonction $Z(x, y)$ solution de $\delta z = f$. — Dans la formule fondamentale (α), les intégrales curvilignes qui figurent au second membre sont solutions de $\delta z = 0$; z étant solution de $\delta z = f$, il est donc à prévoir que *la fonction*

$$(23)\quad Z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_y}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_y} U_P f\,dS$$

sera solution de l'équation $\delta z = f$ [1].

Des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi ont été données par M. Levi. Nous allons chercher des conditions plus larges. Mais tout d'abord M. Levi remarque (p. 229 sqq.) que Z est un cas particulier des intégrales de la forme

$$(23')\qquad I_{pq} = \int\int_{S_y}\frac{(x-\xi)^p}{(y-\eta)^q}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}f\,d\xi\,d\eta$$

et le changement de variable $\xi - x = 2\sqrt{st}$, $y - \eta = t$ montre que ces intégrales ont un sens si $p + 1 > 0$ et $r = p - 2q + 3 > 0$, f étant une fonction *intégrable*.

Si F est le maximum de $|f|$ dans S et y_1 l'ordonnée de A_1A_2, on a

$$(24)\qquad I_{pq} \leqq \frac{2^{p+2}}{r}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)F(y-y_1)^{\frac{r}{2}},\qquad \text{donc}\qquad Z < F(y-y_1).$$

Si f satisfait à une limitation de la forme $|f| < F_1(y-y_1)^{\gamma}$, on a

$$(24')\quad I_{pq} \leqq 2^{p+1}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)B\left(\frac{r}{2}, \gamma+1\right)F_1(y-y_1)^{\gamma+\frac{r}{2}},\quad \text{donc}\quad Z < \frac{F(y-y_1)^{\gamma+1}}{\gamma+1},$$

Γ et B étant les fonctions eulériennes.

---

[1] U_P désigne ici la fonction $U(H, P)$ dans laquelle P est fixe, H étant le point par rapport auquel se fait l'intégration.

Nous concluons de là que $\frac{\partial Z}{\partial x}$ *sera donnée par la formule de Leibniz*, car l'intégrale

$$\int\int_{S_y} \frac{x-\xi}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

est uniformément convergente quand ε tend vers zéro $\Big($ici on a $p = 1$, $q = \frac{3}{2}$; le raisonnement serait le même pour toute dérivée de I_{pq}, qui serait de la forme $I_{p'q'}$ avec $r' > 0\Big)$. On en déduit que

$$(24'')\quad \begin{cases} \text{si } |f| < F, & \dfrac{\partial Z}{\partial x} < \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} F(y-y_1)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{si } |f| < F_1(y-y_1)^{\gamma}, & \dfrac{\partial Z}{\partial x} < \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} B\left(\dfrac{1}{2}, \gamma+1\right) F_1(y-y_1)^{\gamma+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Mais nous ne pouvons opérer de cette façon pour $\frac{\partial Z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$; la singularité de la fonction à intégrer, pour $\xi = x$, $\eta = y$, empêche la formule de Leibniz de s'appliquer, car la quantité appelée plus haut r serait alors nulle.

Citons tout d'abord un cas très simple où $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ se calcule aisément : supposons que f admette *une dérivée par rapport à x*. On peut alors effectuer la transformation

$$2\sqrt{\pi}\frac{\partial Z}{\partial x} = -\int\int \frac{\partial U}{\partial x} f\, d\xi\, d\eta$$

$$= \int\int \frac{\partial U}{\partial \xi} f\, d\xi\, d\eta = \int_{M_1A_1+A_2M_2} U f\, d\eta - \int\int_{S_y} U \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi\, d\eta.$$

Or, ceci peut être dérivé par rapport à x :

$$2\sqrt{\pi}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \int_{M_1A_1+A_2M_2} \frac{\partial U}{\partial x} f\, d\eta - \int\int_{S_y} \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi\, d\eta.$$

Revenons maintenant au *cas général :* nous pouvons alors isoler le point P du reste de l'aire par un petit rectangle R tel que *mabn* (*fig.* 3). L'intégrale Z sera donc décomposée en deux autres, Z' et Z'', étendues aux domaines $S_y - R$ et R. Pour la première, la formule de dérivation sous le signe $\int$ s'applique évidemment. Pour calculer la dérivée de Z''

posons

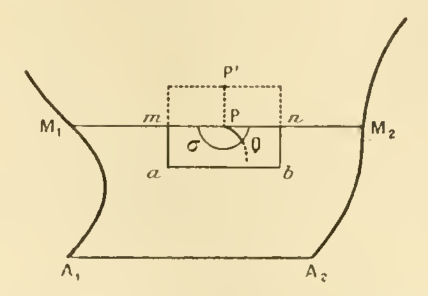
$$f(\xi, \eta) = \psi(\xi) + \varphi(\xi, \eta),$$

$\psi(\xi)$ étant une fonction de ξ que nous choisissons ainsi :

$$\psi(\xi) = f(\xi, y), \qquad \text{donc} \qquad \varphi(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) - f(\xi, y),$$

de telle sorte que $\varphi(\xi, \eta)$ tend vers zéro quand η tend vers y. Dans

Fig. 3.



ces conditions nous avons à dériver les deux intégrales

$$-2\sqrt{\pi}\,Z_1 = \int\int_R U\,\psi(\xi)\,d\xi\,d\eta, \qquad -2\sqrt{\pi}\,Z_2 = \int\int_R U\,\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

en posant $Z = Z' + Z_1 + Z_2$; or, la fonction

$$\Psi(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' \int_{\xi_0}^{\xi'} \psi(\xi'')\,d\xi''$$

est solution de l'équation $\delta z = \dot{\psi}(\xi)$. Si nous remplaçons z par Ψ dans la formule (α) appliquée au contour $mabn$, il vient

$$Z_1 = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_R U\psi\,d\xi\,d\eta = \mathcal{K}(x, y) + \Psi(x).$$

$\mathcal{K}$ étant une solution de $\delta z = 0$, mise sous forme d'une somme d'intégrales indéfiniment dérivables en x et y pour tout point P *intérieur* à R : donc $\dfrac{\partial Z_1}{\partial y}$ *existe* $\left(\text{ainsi que } \dfrac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2}\right)$ et l'on a $\delta Z_1 = \psi(x)$.

Il nous reste donc à prendre la dérivée de $\int\int_R U\varphi\,d\xi\,d\eta$. Si nous donnons à y un accroissement $\overline{PP'} = \Delta y > 0$, l'aire du rectangle subit

un accroissement ΔR et l'on a

$$(25)\qquad \frac{1}{\Delta y}\Delta\int\int_R = \frac{1}{\Delta y}\int\int_{\Delta R} U_{P'}\varphi\, d\xi\, d\eta + \int\int_R \frac{U_{P'}-U_P}{PP'}\varphi\, d\xi\, d\eta.$$

Or, d'après la formule (24), nous avons (ici $y - y_1 = \Delta y$)

$$|Z| < F\,\Delta y \qquad \text{si} \qquad |f| < F.$$

Par conséquent, dans le deuxième membre de (25), l'intégrale $\int\int_{\Delta R}$ est en valeur absolue inférieure à $2\sqrt{\pi}\,\mu\,\Delta y$, μ étant le maximum de φ dans ΔR. *Or μ tend vers zéro avec Δy*, et par suite $\frac{1}{\Delta y}\int\int_{\Delta R}$ tend aussi vers zéro. *Il n'y a donc pas, dans la dérivée cherchée, de terme relatif à l'accroissement de l'aire*, et nous devons calculer simplement la limite du dernier terme de la formule (25).

Or, si dans l'intégrale $\zeta = \int\int_R U_{P'}\varphi\, d\xi\, d\eta$ nous considérons R comme fixe et P′ comme variable au-dessus de *mn*, nous obtenons une fonction de l'ordonnée y' de P′, dont la dérivée est continue et donnée par la règle de Leibniz, sauf peut-être quand P′ vient en P.

Soit alors σ un petit cercle de rayon ε et de centre P et envisageons l'intégrale

$$\zeta_\varepsilon = \int\int_{R-\sigma} U_{P'}\varphi\, d\xi\, d\eta.$$

Si nous montrons que la dérivée de ζ_ε, qui est donnée par la formule de Leibniz, même si P′ est en P, est, quel que soit P′, *uniformément convergente* quand ε tend vers zéro, il en résultera que

$$-2\sqrt{\pi}\frac{\partial Z_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int\int_R U\varphi\, d\xi\, d\eta = \int\int_R \frac{\partial U}{\partial y}\varphi\, d\xi\, d\eta.$$

Il nous suffit donc d'examiner si $\int\int_\sigma \frac{\partial U}{\partial y'}\varphi\, ds$ tend uniformément vers zéro. Ceci s'écrit

$$\int_{y-\varepsilon}^{y}\frac{d\eta}{(y'-\eta)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{x+\sqrt{\varepsilon^2-(y-\eta)^2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y'-\eta)}}\left[\frac{(x-\xi)^2}{4(y'-\eta)}-\frac{1}{2}\right]\varphi\, d\xi,$$

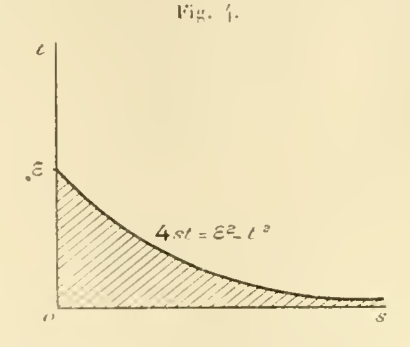
en n'envisageant que la partie relative au quadrant situé à droite, ce qui nous suffit.

Le changement de variable $y - \eta = t$, $\xi - x = 2\sqrt{st}$ nous donne, en posant $y' - y = k$,

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\sqrt{t}}{(k+t)^{\frac{3}{2}}}\,dt \int_0^{\frac{\varepsilon^2 - t^2}{4t}} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\left(\frac{st}{t+k} - \frac{1}{2}\right)\varphi\,ds,$$

intégrale étendue à l'aire ombrée ci-après comprise entre sot et un

Fig. 4.



arc de l'hyperbole $4st = \varepsilon^2 - t^2$; soit $t = \chi(s)$ l'équation de cette branche. Notre intégrale peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\,ds \int_0^{\chi(s)} \frac{\sqrt{t}}{(k+t)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{st}{t+k} - \frac{1}{2}\right)\varphi\,dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s}\sqrt{s}\,ds \int_0^{\chi(s)} \left(\frac{t}{k+t}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{\varphi\,dt}{t} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-s}}{2\sqrt{s}}\,ds \int_0^{\chi(s)} \left(\frac{t}{k+t}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\varphi\,dt}{t}. \end{aligned}$$

Or, si nous envisageons l'intégrale $\int_0^{\chi(s)} \frac{\varphi\,dt}{t}$, dans laquelle s est constant, elle s'écrit avec les variables primitives

$$\int_{\mathrm{PQ}} \frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\eta}{y-\eta} = \int_{\mathrm{PQ}} \frac{f(\xi,\eta) - f(\xi,y)}{y-\eta}\,d\eta,$$

intégrale curviligne prise le long d'un arc de parabole d'axe vertical et de sommet P, Q étant un point du petit cercle. Si ces intégrales ont un sens pour tous les points Q voisins de P, et si, quand Q tend vers P, elles tendent vers zéro *uniformément*, quelle que soit la parabole, les deux intégrales en dt qui figurent dans I tendront vers zéro uniformément avec ε, puisque $\frac{t}{k+t}$ est un facteur monotone et plus petit que *un*. C'est précisément ce résultat que nous voulions obtenir.

Nous avons supposé $\Delta y > 0$. Si $\Delta y < 0$, un calcul analogue nous donne les mêmes conclusions.

Si maintenant nous voulons calculer $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$, il n'y a aucune difficulté,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x^2},$$

le premier terme se calcule par la formule de Leibniz, le point (x, y) n'étant pas dans l'aire correspondante; le second terme a déjà été étudié, et le troisième se calcule comme le premier; car l'intégrale obtenue n'est autre que celle que nous venons d'étudier, pour $k = 0$. Ici le cas est analogue à celui du potentiel car, quand x varie, l'aire d'intégration reste fixe.

Nous avons donc en définitive

$$\delta Z = \delta Z' + \delta Z_1 + \delta Z_2;$$

or

$$\delta Z' = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S-R} \delta U f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0.$$

$$\delta Z_1 = \psi(x) = f(x, y), \qquad \delta Z_2 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{R} \delta U\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0.$$

Donc

$$\delta Z = f(x, y).$$

Il est à remarquer que les calculs que nous venons de faire ne supposent nullement *f continue en x, y*. En outre de la condition d'intégrabilité, nous avons simplement supposé que $f(\xi, \eta) - f(\xi, y)$ tend vers zéro quand η tend vers y, le point (ξ, η) étant voisin de (x, y). C'est ce que nous exprimons en disant que $f(\xi, \eta)$ est, *dans le voisinage de* P, *continue par rapport à η pour la valeur $\eta = y$*. Cette condition peut être réalisée sans que f soit continue par rapport à ξ, η pour $\xi = x$, $\eta = y$. Mais ce *second mode de continuité*, qui entraîne le premier [1], peut avoir lieu sans que l'intégrale $\int_{PQ}$ ait un

---

[1] En effet, le premier mode de continuité se traduit par les inégalités

$$|x - \xi| < \alpha, \qquad |y - \eta| < \alpha, \qquad |f(\xi, \eta) - f(\xi, y)| < \varepsilon.$$

et le second par

$$|x - \xi| < \alpha, \qquad |y - \eta| < \alpha, \qquad |f(\xi, \eta) - f(x, y)| < \varepsilon',$$

et, cette dernière inégalité ayant lieu pour $\eta = y$, il est clair qu'elle entraîne $|f(\xi, \eta) - f(\xi, y)| < 2\varepsilon'$.

sens. S'il en est ainsi, nous poserons

$$f(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + f(x, y),$$

φ sera nul au point P. Nous formerons encore deux intégrales Z_1 et Z_2, en considérant $f(x, y)$ comme une constante : il nous suffira, par exemple, de prendre, au lieu de Ψ, la fonction $-f\eta$. L'étude de Z_2 se fera par la même marche que plus haut, mais il s'introduira des intégrales de la forme

$$\int_{PQ} \frac{f(\xi, \eta) - f(x, y)}{y - \eta} d\eta,$$

que nous supposerons uniformément convergentes. Dans ces conditions Z sera encore solution de $\delta z = f$.

Nous pouvons enfin envisager un *troisième mode de continuité*, analogue au premier, le rôle des lettres ξ et η étant interverti. Nous supposons alors que $f(\xi, \eta) - f(x, \eta)$ tende vers zéro, quand ξ tend vers x, dans le voisinage de P. Cette fois nous poserons

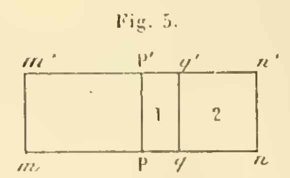
$$f(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + \chi(\eta), \qquad \chi(\eta) = f(x, \eta),$$

φ tend vers zéro quand ξ tend vers x. Nous formerons Z_1 en partant de la fonction

$$-\int_{\eta_0}^{\eta} \chi(\eta')\, d\eta'.$$

Quant à Z_2, sa dérivée s'étudiera toujours par le même procédé; mais ici il se présentera une *différence* en ce qui concerne *l'accroissement* ΔR *de l'aire* du rectangle.

Fig. 5.



Pour démontrer que $\frac{1}{\Delta y}\int\int_{\Delta R}$ tend vers zéro avec Δy, il nous suffit d'envisager la portion $Pnn'P'$. Partageons cette aire en deux (*fig.* 5) par la verticale qq' d'abscisse $x + \varepsilon$, ε tendant vers o avec $\Delta y = k$.

Nous avons ainsi décomposé $\int\int_{\Delta R}$ en deux parties $\int\int_1$ et $\int\int_2$; or

$$\left|\int\int_1\right| < k\mu,$$

μ étant le maximum de φ, qui tend vers zéro avec k. Donc $\frac{1}{k}\int\int_1$ tend vers zéro. Posant $Pu = \alpha$, le changement de variables déjà plusieurs fois employé nous donne

$$\left|\int\int_2\right| < \Phi\int_0^k dt \int_{\frac{\varepsilon^2}{t}}^{\frac{\alpha^2}{t}} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\, ds \qquad (\Phi > |\varphi|),$$

or la fonction $\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}$ étant toujours décroissante, elle est, dans l'intégrale, inférieure à $\frac{\sqrt{t}}{\varepsilon}e^{-\frac{\varepsilon^2}{t}}$. Donc

$$\left|\int\int_2\right| < \Phi\int_0^k \frac{\alpha^2-\varepsilon^2}{\varepsilon\sqrt{t}}e^{-\frac{\varepsilon^2}{t}}dt = \Phi(\alpha^2-\varepsilon^2)\int_0^{\frac{k}{\varepsilon^2}} \frac{e^{-\frac{1}{\theta}}}{\sqrt{\theta}}\, d\theta \qquad (t = \varepsilon^2\theta).$$

Si ε est choisi de telle sorte que $\frac{k}{\varepsilon^2}$ tende vers zéro avec k, cette intégrale tend vers zéro avec k. Il n'y a donc pas, dans la dérivée $\frac{\partial Z_2}{\partial y}$, de terme relatif à l'accroissement de l'aire.

Poursuivant l'étude de cette dérivée, on rencontre des intégrales curvilignes qui sont cette fois de la forme

$$\int_{PQ} \frac{f(\xi,\eta) - f(x,\eta)}{y-\eta}\, d\eta.$$

9. Les conditions (A). — En résumé pour que la fonction $Z(x, y)$ admette en un point $P(x, y)$ des dérivées $\frac{\partial Z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$, vérifiant la relation

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial Z}{\partial y} = f(x, y),$$

il *suffit* que $f(x, y)$ satisfasse, en outre de la condition d'intégrabilité dans S_y, à *l'un des groupes de conditions suivantes :*

A_1. — $f(\xi, \eta)$ est *continue pour* $\xi = x$, $\eta = y$, et, si l'on consi-

dère les paraboles (p) d'axe vertical et de sommet P, l'intégrale curviligne

$$I_1 = \int_{PQ} \frac{f(\xi, \eta) - f(x, y)}{y - \eta} d\eta,$$

prise le long de (p) est *uniformément convergente* pour tout point Q voisin de P, c'est-à-dire quelle que soit (p).

A_2. — $f(\xi, \eta)$ est, *dans le voisinage de* P, *continue par rapport à* ξ, *pour* $\xi = x$, et l'on a la même condition que plus haut pour l'intégrale

$$I_2 = \int_{PQ} \frac{f(\xi, \eta) - f(x, \eta)}{y - \eta} d\eta.$$

A_3. — $f(\xi, \eta)$ est, *dans le voisinage de* P, *continue par rapport à* η, *pour* $\eta = y$, et l'on a encore la même condition pour l'intégrale

$$I_3 = \int_{PQ} \frac{f(\xi, \eta) - f(\xi, y)}{y - \eta} d\eta.$$

Nous appellerons conditions (A) *un quelconque de ces groupes* [1]. Ces conditions seront réalisées par exemple si au voisinage de P on a

$$|f(\xi, \eta) - f(\xi, y)| < K|y - \eta|^\gamma \quad \text{ou} \quad |f(\xi, \eta) - f(x, y)| < K|x - \xi|^\gamma,$$

avec $0 < \gamma \leq 1$: les intégrales I_3 ou I_2 convergent alors uniformément. D'ailleurs dans ces deux cas, *qui seront très importants pour nous*, les dérivées de l'intégrale Z_2 se calculent immédiatement par la formule de Leibniz, *car* $\frac{\partial Z_2}{\partial y}$ *est une intégrale du type* I_{pq} [formule (23')] avec $r > 0$, et nous avons dit, à propos de $\frac{\partial Z}{\partial x}$, que ces intégrales étaient uniformément convergentes.

---

(1) Le produit de deux fonctions vérifiant une *même* condition A la vérifiera également : si, par exemple, f et φ satisfont à A_2, en écrivant

$$\begin{aligned} &f(\xi, \eta)\varphi(\xi, \eta) - f(x, \eta)\varphi(x, \eta) \\ &\quad = \varphi(\xi, \eta)[f(\xi, \eta) - f(x, \eta)] + f(x, \eta)[\varphi(\xi, \eta) - \varphi(x, \eta)], \end{aligned}$$

on voit immédiatement que $f\varphi$ satisfait aussi à la condition A_2.

Enfin les conditions (A) seraient vérifiées aussi dans le cas où les seconds membres des inégalités précédentes seraient $K \left| \xi \left| y - \eta \right| \right|^{-1-\gamma}$ ou un terme analogue en $x - \xi$, et aussi dans le cas où

$$|f(\xi, \eta) - f(x, y)| < K|x - \xi|^\gamma + K'|y - \eta|^{\gamma'};$$

$\frac{\partial Z_2}{\partial y}$ se décompose alors en une somme d'intégrales I_{pq}. Il serait facile de donner encore d'autres conditions particulières.

Un *cas très important* qui réalise manifestement aussi les conditions (A) est celui où $f(x, y)$ *admet une dérivée par rapport à x ou à y*. Nous avons déjà rencontré un de ces cas au début du paragraphe **8**.

Au reste, nous allons examiner de plus près le calcul effectif des dérivées de la fonction Z.

10. Calcul des dérivées de la fonction Z. — Quand $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe dans S, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ est donnée par la formule déjà citée

$$2\sqrt{\pi}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \int_{C_y} \frac{\partial U}{\partial x} f(\xi, \eta)\, d\eta - \int\int_{S_y} \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \xi}\, d\xi\, d\eta.$$

Supposons maintenant que f admette une *dérivée par rapport à y* dans S. On peut conclure de ce que nous avons vu plus haut (§ **8**) que

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_{y-\varepsilon}} U f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon = 0}\int\int_{S_{y-\varepsilon}} \frac{\partial U}{\partial y} f\, d\xi\, d\eta.$$

Transformons cette dernière intégrale (¹) (voir *fig.* 1) en utilisant $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial \eta}$,

$$\int\int_{S_{y-\varepsilon}} = \int_{M'_1 A_1 A_2 M_2 M'_1} U f(\xi, \eta)\, d\xi + \int\int_{S_{y-\varepsilon}} U \frac{\partial f}{\partial \eta}\, d\xi\, d\eta.$$

(¹) Il est entendu que, lorsque nous écrivons dans une formule la lettre U, simplement, cela signifie $U[\xi, \eta; x, y]$.

D'où, en utilisant la formule de Poisson (§ 2), quand ε tend vers o.

$$(26)\qquad 2\sqrt{\pi}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -\int_{(C_y)} U f(\xi,\eta)\,d\xi - \int\int_{S_y} U\frac{\partial f}{\partial \eta}\,d\xi\,d\eta + 2\sqrt{\pi} f(x,y).$$

Supposons maintenant, plus généralement, que les *conditions* (A_3) soient vérifiées. Nous pourrons écrire

$$2\sqrt{\pi}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\int_{S_y} U f(\xi,y)\,d\xi\,d\eta - \int\int_{S_y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}[f(\xi,\eta)-f(\xi,y)]\,d\xi\,d\eta.$$

Or, dans la première intégrale, $f(\xi,y)$ a une dérivée nulle par rapport à η. D'où, d'après la formule (26),

$$(26')\qquad 2\sqrt{\pi}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -\int_{(C_y)} U f(\xi,y)\,d\xi$$
$$-\int\int_{S_y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}[f(\xi,\eta)-f(\xi,y)]\,d\xi\,d\eta + 2\sqrt{\pi} f(x,y).$$

Un raisonnement analogue appliqué *au cas* (A_2) donnerait

$$(26'')\qquad 2\sqrt{\pi}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \int_{(C_y)}\frac{\partial U}{\partial x} f(x,\eta)\,d\eta - \int\int_{S_y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}[f(\xi,\eta)-f(x,\eta)]\,d\xi\,d\eta.$$

Si, enfin, f satisfait aux *conditions* (A_1), la formule s'écrit

$$2\sqrt{\pi}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -f(x,y)\int_{(C_y)} U\,d\xi$$
$$-\int\int_{S_y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}[f(\xi,\eta)-f(x,y)]\,d\xi\,d\eta + 2\sqrt{\pi} f(x,y)$$
$$= f(x,y)\int_{(C_y)}\frac{\partial U}{\partial x}\,d\eta - \int\int_{S_y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}[f(\xi,\eta)-f(x,y)]\,d\xi\,d\eta.$$

L'identité de ces deux formules résulte d'ailleurs de la formule (α) appliquée au cas où z est une constante (¹).

11. Retour sur les problèmes aux limites. — *Dans tout ce qui va suivre nous allons supposer l'ordonnée y_1 de A_1A_2 (fig. 1) nulle.*

(¹) Ces formules peuvent aussi s'établir en calculant les dérivées de la fonction Z_1 utilisée au paragraphe **8**, mais la marche suivie ici est plus rapide.

Si f satisfait aux conditions (A), et (C) à la condition (F), l'intégrale

$$Z_0(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S_y} G(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

est solution de $\delta z = f$, puisque $G = U - H$ et que H est solution régulière de $\delta z = 0$ en tout point (x, y) intérieur à S.

Cela posé, remarquons qu'il existe certainement une solution de $\delta z = f$ *s'annulant sur* (C), car il suffit pour l'obtenir d'ajouter à $Z(x, y)$ la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) les mêmes valeurs que $-Z$. Or, si nous appliquons à cette solution la formule (F) du paragraphe 4, nous voyons qu'elle *coïncide précisément avec* Z_0.

Le raisonnement précédent nous montre que nous avons *deux moyens* d'obtenir la solution de $\delta z = f$ prenant sur (C) des valeurs données : 1° *former la fonction de Green* et appliquer la formule (F); 2° *ajouter à la fonction* Z la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) les valeurs données plus les valeurs prises par la fonction $-Z$, cette solution étant formée par le moyen d'équations intégrales. La première méthode peut être préférable si le contour a toujours la même forme, en particulier si c'est un contour rectangulaire, c'est-à-dire si les arcs A_1B_1 et A_2B_2 se réduisent à deux verticales.

Remarquons enfin que, si les fonctions X_i et Φ_i sont dérivables et si Φ admet des dérivées première et seconde, on peut toujours *ramener les valeurs données à zéro;* il suffit pour cela de poser

$$(27) \quad z = \zeta + \Phi(x) + \frac{(x - X_1)\overline{\Phi}_1 - (x - X_2)\overline{\Phi}_2}{X_2 - X_1}, \quad \overline{\Phi}_i = \Phi_i(y) - \Phi[X_i(y)].$$

Solutions régulières au bord. — Si l'on veut obtenir une solution régulière dans S, bord compris, nous aurons évidemment la condition *nécessaire* [(*cf.* formule (19)] :

$$(28) \qquad \Phi''(x_i) - \Phi'(x_i)X'_i(0) - \Phi'_i(0) = f(x_i, 0).$$

Cette condition est aussi *susffiante.* En effet, supposons que, pour éviter toute difficulté aux points A_1 et A_2, nous ayons calculé l'intégrale Z pour une aire débordant un peu l'aire S à droite et à gauche. Nous appliquerons alors la deuxième méthode indiquée plus haut : la solution de $\delta z = 0$ que nous devons former correspondra à des

données aux limites $\overline{\Phi}_1$, $\overline{\Phi}_2$, Φ, telles que $\overline{\Phi}_i(y) = \Phi_i(y) - Z[X_i(y), y]$ et qui devront satisfaire à la relation (19).

Or, en tous les points de A_1A_2, Z, $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ sont nuls et $\frac{\partial Z}{\partial y} = f(x, 0)$: cela résulte en effet des formules du paragraphe précédent. Donc

$$\overline{\Phi}'_i(0) = \overline{\Phi}'_i(0) - f(x_i, 0).$$

En portant dans la relation (19), on trouve la formule (28) que nous voulions établir.

Autres problèmes aux limites. — Au sujet des problèmes aux limites, nous avons dit qu'on pourrait former une fonction de Green, si l'on se donnait d'une façon générale, sur C_i,

$$l_i(y)\frac{\partial z}{\partial x} + m_i(y) z = \chi_i(y),$$

et $z = \Phi(x)$ sur A_1A_2. Ce que nous avons dit au paragraphe 5 prouve que la solution existe. La formule (F) (§ 4) appliquée à la fonction de Green formée pour ce problème aux limites prouve, par le même raisonnement que plus haut, que cette solution est *unique*.

Il existe un cas particulier où la solution n'est pas unique : c'est celui où l'on se donne $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur (C) [1]; z sur A_1A_2 n'est alors déterminé qu'à une constante près et la solution dépend linéairement d'une fonction de x, y, qui est $\int_{A_1A_2} G\,d\xi$.

12. Limitation d'une solution de $\delta z = f$ et de sa dérivée par rapport à x. — Posons $z = z_0 + Z_0$, z_0 étant la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) les valeurs données : si M est le module maximum de celles-ci, on a donc $|z_0| < M$ (§ 18). Z_0 est la solution nulle sur (C), soit

$$Z_0(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_y} G(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = Z(x, y) - Z_1(x, y).$$

---

[1] Toutes les fois que l'on ne se donne pas à la fois $\frac{\partial z}{\partial x}$ seul sur C_1 et C_2, on ne peut connaître $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur A_1A_2 sans connaître en même temps z, à cause des conditions de raccordement en A_1 et A_2.

D'après la formule (13) Z_0 admettra la même limitation que Z, soit

$$(29) \qquad |Z_0| < \frac{F y^{\gamma+1}}{\gamma+1}, \qquad \text{si} \qquad |f| < F y^{\gamma} \qquad (\gamma > -1).$$

Envisageons maintenant la dérivée. En tout point P (x, y) intérieur à S nous avons évidemment

$$\frac{\partial Z_0}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S_y} \frac{\partial G}{\partial x} f \, d\xi \, d\eta = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial Z_1}{\partial x}.$$

Il est aisé de voir que si, d'une façon générale, f est telle que l'intégrale $\frac{\partial Z(x, y)}{\partial x}$ est une fonction continue de x, y *même au bord*, il en est de même de $\frac{\partial Z_1}{\partial x}$. Si, en effet, nous explicitons $\frac{\partial H}{\partial x}$ au moyen de la formule (10), il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z_1}{\partial x} &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S_y} \frac{\partial H}{\partial x} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\
&= -\frac{1}{8\pi} \int_0^y d\eta \int_{X_1(\eta)}^{X_2(\eta)} f(\xi, \eta) \, d\xi \\
&\quad \times \int_\eta^y V[\xi, \eta; X_1(s), s] \left\{ V[X_1(s), s; x, y] + \frac{\overline{\theta}_1}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \right\} ds
\end{aligned}$$

+ un terme de même forme contenant X_2.

Or cette intégrale triple se transforme ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z_1}{\partial x} &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^y \left\{ V[X_1(s), s; x, y] + \frac{\overline{\theta}_1}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \right\} ds \\
&\quad \times \int_0^s d\eta \int_{X_1(\eta)}^{X_2(\eta)} V[\xi, \eta; X_1(s), s] f(\xi, \eta) \, d\xi \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^y \left\{ V[X_1(s), s; x, y] + \frac{\overline{\theta}_1}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \right\} \frac{\partial Z[X_1(s), s]}{\partial x} ds;
\end{aligned}$$

ceci se décompose en une intégrale qui définit une fonction continue en tout point de S, *bord compris*, et une autre intégrale jouissant de la même propriété puisque $\overline{\theta}_1$ est continue [sauf peut-être pour $x = X_1(y)$ et $s = y$] et bornée. Même conclusion pour le terme de l'intégrale, contenant X_2.

Si maintenant f est une fonction intégrable satisfaisant à la limitation $|f| < Fy^\gamma$, il résulte de la formule trouvée, et des limitations (6) des intégrales $\mathfrak{z}$ et (24″) de $\frac{\partial Z}{\partial x}$, que

$$(29') \qquad \left|\frac{\partial Z_0}{\partial x}\right| < (L)\,FB\left(\frac{1}{2}, \gamma+1\right)y^{\gamma+\frac{1}{2}}\left[(L') + B\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma+\frac{3}{2}\right)y^{\frac{\alpha}{2}}\right] < (L)\,FB\left(\frac{1}{2}, \gamma+1\right)y^{\gamma+\frac{1}{2}},$$

(L) dépendant de α et de l'ordonnée maxima qu'on veut atteindre.

Il y a d'ailleurs avantage à réunir les deux limitations de Z_0 et $\frac{\partial Z_0}{\partial x}$ en une seule, qui aura alors la forme (29′).

Si maintenant, nous envisageons une solution de $\delta z = f$ prenant au bord des valeurs données, telles que $\frac{\partial z}{\partial x}$ existe sur (C), nous pourrons écrire, en utilisant pour $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ la note de la fin du § 5*,

$$(29'') \qquad |z| < M + \frac{Fy^{\gamma+1}}{\gamma+1}, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < M' + (L)y^\beta,$$

M' étant le maximum de $|\Phi'(x)|$ et β étant un nombre compris entre 0 et 1 qui dépend des accroissements de Φ_i, de Φ' et de X_i [1].

13. Étude des accroissements de Z et $\frac{\partial Z}{\partial x}$ quand f est supposée simplement intégrable. — Il nous sera utile dans la suite de savoir comment se comportent Z et $\frac{\partial Z}{\partial x}$ quand f satisfait simplement à la

---

[1] Considérons enfin la solution $\delta z = f$, telle que $\frac{\partial z}{\partial x}$ soit *nul sur* (C); il suffira pour l'avoir d'ajouter à la fonction Z la solution $\bar{z}$ de $\delta z = 0$, telle que, sur (C), $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial x}$; or $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ étant solution de $\delta z = 0$, limitée par ses valeurs extrêmes au bord, admettra donc la même limitation que $\frac{\partial Z}{\partial x}$. On pourra donc écrire

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < (L')\,FB\left(\frac{1}{2}, \gamma+1\right)y^{\gamma+\frac{1}{2}}.$$

D'où la limitation d'une solution dont on donne la dérivée sur C_i (*voir* la première Note du § 5*).

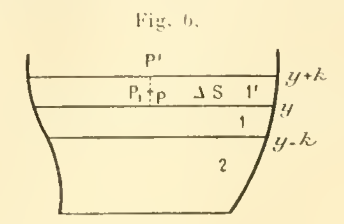
Dans le cas du *contour rectangulaire* tous les résultats du paragraphe **12** s'établissent au moyen des formules données dans la Note [*voir* la formule (1″).

condition d'intégrabilité. La dérivée $\frac{\partial Z}{\partial y}$ n'existe pas en général; proposons-nous de chercher, quand on donne à y un accroissement k, de quel ordre sera l'accroissement de Z. Nous pouvons toujours supposer k positif; nous avons alors (voir *fig.* 6)

$$Z(x, y+k) - Z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\int\int_{S+\Delta S} U_{P'} f\, dS - \int\int_{S} U_P f\, dS\right).$$

Partageons le domaine S en deux autres par la caractéristique d'or-

Fig. 6.



donnée $y-k$. Les intégrales du second membre peuvent s'écrire

$$(30)\quad \int\int_{S+\Delta S} - \int\int_{S} = \int\int_{1+1'} U_{P'} f\, dS - \int\int_{1} U_P f\, dS + \int\int_{2} (U_{P'} - U_P) f\, dS;$$

or [*voir* formules (24), § 8]

$$\left|\int\int_{1+1'} + \int\int_{1}\right| < 6\sqrt{\pi}\, F k, \qquad \int\int_{2} = k\int\int_{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{P_1} f\, dS,$$

nous avons étudié une intégrale analogue à cette dernière au paragraphe **8**; le changement de variable utilisé donne

$$\int\int_{2} < 2 F k \int_{k}^{y+k} \frac{dt}{t}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\left|s - \frac{1}{2}\right| ds < 2\sqrt{\pi}\, F k\, \mathcal{L}\left(1 + \frac{y}{k}\right),$$

nous obtenons donc un accroissement d'ordre < 1 :

$$|Z(x, y+k) - Z(x, y)| < F k\left[3 + \mathcal{L}\left(1 + \frac{y}{k}\right)\right] < \mu F k\, |\mathcal{L} k| \quad (^1),$$

μ étant une constante dépendant de l'aire d'intégration.

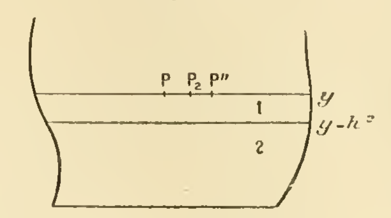
(1) Cette dernière limitation ne s'applique pas évidemment au cas où $y = 0$, car alors l'accroissement est $< Fk$. Il en est de même si k est $> y$, les deux intégrales de la première formule étant limitées en fonction linéaire de k.

Envisageons maintenant $\frac{\partial Z}{\partial x}$ qui n'admet pas de dérivées en général : étudions la différence

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x+h, y) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int\int_S (V_{P''} - V_P) f \, dS,$$

Partageons S en deux parties par la caractéristique d'ordonnée $y - h^2$,

Fig. 6 *bis*.



puis écrivons (voir *fig.* 6 *bis*)

$$\int\int_S (V_{P''} - V_P) f \, dS = \int\int_1 V_{P''} f \, dS - \int\int_1 V_P f \, dS + \int\int_2 (V_{P''} - V_P) f \, dS.$$

Les deux premières intégrales sont, en valeur absolue, inférieures à $8Fh$. La seconde est égale à

$$h \int\int_2 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{P_2} f \, dS = -2h \int\int \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{P_2} f \, dS,$$

et, toujours par la même méthode, nous obtenons comme limitation de cette intégrale

$$4Fh \int_{h^2}^{y} \frac{dt}{t} \int_0^{\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} \left| s - \frac{1}{2} \right| ds = 4\sqrt{\pi} F h \mathcal{L} \frac{y}{h^2}.$$

Il vient donc en définitive encore un accroissement d'ordre < 1 :

$$\left| \frac{\partial Z}{\partial x}(x+h, y) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y) \right| < Fh \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} + \mathcal{L} \frac{y}{h^2} \right) < \mu' F h | \mathcal{L} h |.$$

Il est à remarquer que les deux méthodes que nous venons d'employer s'appliquent d'une façon générale à l'étude des accroissements, relativement à x ou à y, *des intégrales de la forme* I_{pq}, dont nous

avons déjà parlé. On trouve aisément

$$|\Delta_x I_{pq}| < \begin{cases} \mu_{pq} F |\Delta x|^r & (r<1), \\ \mu_{pq} F |\Delta x \mathcal{L} |\Delta x|| & (r=1), \end{cases} \qquad (r = p - 2q + 3 > 0).$$

$$|\Delta_y I_{pq}| < \begin{cases} \mu'_{pq} F |\Delta y|^{\frac{r}{2}}. & (r<2), \\ \mu'_{pq} F |\Delta y \mathcal{L} |\Delta y|| & (r=2). \end{cases}$$

En particulier, en ce qui concerne $\frac{\partial Z}{\partial x}$,

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial x}(x, y+k) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y)\right| < \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + 4\right) F k^{\frac{1}{2}}.$$

14. Accroissements de $\frac{\partial Z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$. — La méthode que nous venons de suivre permet également de calculer les accroissements de $\frac{\partial Z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ quand ces dérivées existent. Supposons que nous ayons, par exemple,

$$|f(\xi, \eta) - f(\xi, y)| < K |y - \eta|^\gamma,$$

$\frac{\partial Z}{\partial y}$ est donné par la formule, déduite de (26′) grâce à $\partial Z = f$,

$$(31) \qquad 2\sqrt{\pi}\frac{\partial Z}{\partial y} = -\int_{(C_y)} U f(\xi, y)\, d\xi - \int\int_{S_y} \frac{\partial U}{\partial y}[f(\xi, \eta) - f(\xi, y)]\, d\xi\, d\eta.$$

Étudions l'accroissement de cette dérivée quand y subit un accroissement $y' - y = k$ et posons

$$f(\xi, y) = \overline{f}, \qquad f(\xi, y') = \overline{f}', \qquad U(\xi, \eta; x, y') = U'.$$

En décomposant l'aire comme dans la figure 6, nous écrivons de la façon suivante l'accroissement de l'intégrale double

$$(32) \qquad \Delta \int\int_{S_y} = \int\int_{1+1'} \frac{\partial U'}{\partial y'}(f - \overline{f}')\, dS - \int\int_1 \frac{\partial U}{\partial y}(f - \overline{f})\, dS$$
$$+ \int\int_2 \Delta \frac{\partial U}{\partial y}(f - \overline{f})\, dS - \int\int_2 \frac{\partial U'}{\partial y'}(\overline{f}' - \overline{f})\, dS.$$

Il suffit de calculer $\frac{\partial U}{\partial y}$ et $\Delta \frac{\partial U}{\partial y} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{P_1}$ pour voir [toujours avec le

même changement de variables] que les trois premières intégrales sont limitées par $(L)Kk^\gamma$. Il suffit pour cela de remarquer que, si y_1 est l'ordonnée de P_1, on a

$$|f-\bar{f}| < K(y-\eta)^\gamma < K(y_1-\eta)^\gamma,$$

Laissant de côté la quatrième intégrale, formons l'accroissement de l'intégrale simple

$$(32') \quad \Delta\int_{(C_y)} = \int_{(1)+(1')} U'\bar{f}'\,d\xi - \int_{(1)} U\bar{f}\,d\xi + \int_{(2)} (U'-U)\bar{f}\,d\xi + \int_{(2)} U'(\bar{f}'-\bar{f}),$$

les numéros (1), (1′), (2) désignant respectivement l'ensemble des bords droit et gauche des aires 1 et 1′, et le contour (C_{y-k}). Si X'_i existe, les deux premières intégrales sont $<(L)k^{\frac{1}{2}}$, et sont nulles si $X'_i = 0$. Quant à la dernière, il suffit de remarquer que $\frac{\partial U'}{\partial y'} = -\frac{\partial U'}{\partial \eta}$, pour voir qu'elle se détruit avec la quatrième intégrale de (32).

Il ne nous reste donc plus à étudier que la troisième intégrale de (32′). Comme pour les deux premières, ce qui, dans cette intégrale, concerne les arcs C_1 et C_2, *s'évanouit dans le cas d'un contour rectangulaire* et est, dans le cas général, limité par $(L)k^{\frac{1}{2}}$: il suffirait d'appliquer la formule des accroissements finis pour le voir immédiatement, en remarquant que $\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| < \frac{(L)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}$. Pour les applications que nous rencontrerons, $f(\xi, 0)$ sera nul et l'on aura donc $|f(\xi, y)| < Ky^\gamma$. Alors, la limitation sera $(L)Kk^{\frac{1}{2}}$.

Il nous reste enfin, si $k<y$ (avec $y<y_1<y'$),

$$(32'') \quad \left|\int_{A_1}^{A_2} (U'-U)f(\xi, y)\,d\xi\right| < Kky^\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y_1}}}{y_1^{\frac{3}{2}}} \left|\frac{(x-\xi)^2}{4y_1} - \frac{1}{2}\right| d\xi$$

$$< 2Kk\frac{y^\gamma}{y_1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\left|s^2-\frac{1}{2}\right| ds$$

$$= (L)K\left(\frac{k}{y_1}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{y}{y_1}\right)^\gamma k^\gamma < (L)Kk^\gamma.$$

Si $k>y$, cette transformation est inutile, l'intégrale elle-même étant $(L)Ky^\gamma < (L)Kk^\gamma$ [1]. Dans les conditions où nous sommes placés,

[1] Si $f(\xi, 0)$ n'est pas nul, on écrit $f(\xi, y) = [f(\xi, y) - f(\xi, 0)] + f(\xi, 0)$ et l'on est alors amené à faire une hypothèse sur l'accroissement de $f(\xi, 0)$, d'après ce qui a été vu sur l'intégrale Ξ (§ 7).

l'accroissement de $\frac{\partial Z}{\partial y}$ par rapport à y est donc d'ordre γ, si $\gamma < \frac{1}{2}$, et d'ordre au moins égal à $\frac{1}{2}$, si $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ (¹).

Quant à l'accroissement de $\frac{\partial Z}{\partial x}$, nous avons vu qu'il est d'ordre $\frac{1}{2}$, quand on ne fait aucune hypothèse sur f. D'autre part la formule (31) est dérivable par rapport à x, même au bord, si $\gamma > \frac{1}{2}$ [en supposant $f(\xi, 0) = 0$] (²) : donc $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ existe. Dans le cas intermédiaire $\gamma < \frac{1}{2}$, une méthode tout à fait semblable à celle que nous venons d'employer montre que l'accroissement de $\frac{\partial Z}{\partial x}$ est d'ordre $\gamma + \frac{1}{2}$.

En ce qui concerne l'accroissement de $\frac{\partial Z}{\partial y}$ par rapport à x, lorsque f en possède un, on l'étudierait par une analyse analogue : nous en parlons dans la Note sur le contour rectangulaire.

15. — Application aux problèmes aux limites. — Nous avons déjà envisagé dans le paragraphe **7**, au point de vue de l'étude des accroissements, l'équation $\delta z = \varphi(x)$, dont les solutions satisfont aux inégalités (22) dans les conditions indiquées. Considérons maintenant *la solution* Z_0, *nulle sur* (C), de l'équation $\delta z = f(x, y)$ avec ($\gamma' < 1$)

$$(33) \qquad |f(x, y+k) - f(x, y)| < K k^{\gamma'}, \qquad f(x, 0) = 0;$$

nous la formerons en ajoutant à Z la solution z_0 de l'équation $\delta z = 0$, s'annulant sur $A_1 A_2$ et prenant sur C_i la valeur $-Z[X_i(y), y]$. Si X'_i existe et admet un accroissement d'ordre non nul, nous serons placés, pour z_0, dans les conditions que nous avons supposées vérifiées dans le paragraphe **7** pour établir les formules (22) (³). En utilisant alors les résultats du paragraphe précédent, ainsi que les formules (24') et (24'') du paragraphe **8**, nous pouvons donc énoncer, pour $Z_0 = Z + z_0$, la propriété suivante : *Si f est nul sur* Ox *et si f et* X'_i

(¹) Nous entendons par là l'accroissement dans S, *bord compris*. A l'intérieur de S, il est sûrement d'ordre γ, car les intégrales curvilignes sont dérivables.

(²) Sinon, il faut supposer l'existence de $f'(\xi, 0)$.

(³) Et dans ce cas les coefficients (L) des formules (22) appliquées à z_0 contiendront le nombre K en facteur.

admettent, par rapport à y, un accroissement d'ordre non nul, on peut déterminer un nombre $\gamma \leqq \gamma'$ tel que les conditions (33) entraînent

$$(34) \begin{cases} |\Delta Z_0| < (L) K \Delta y, & \left|\Delta \frac{\partial Z_0}{\partial x}\right| < (L) K \Delta y^{\gamma+\beta}, & \left|\Delta \frac{\partial Z_0}{\partial y}\right| < (L) K \Delta y^{\gamma}, \\ |Z_0| < (L) K y^{\gamma+1}, & \left|\frac{\partial Z_0}{\partial x}\right| < (L) K y^{\gamma+\frac{1}{2}}, & \left|\frac{\partial Z_0}{\partial y}\right| < (L) K y^{\gamma}. \end{cases}$$

Ces inégalités diffèrent des inégalités (22) en ce que le nombre K, qui figure dans (33), figure aussi dans (34) : β est toujours le plus petit des nombres $\frac{1}{2}$ et $1-\gamma$. Le nombre $\gamma < 1$ que nous venons d'introduire est *inférieur ou égal* à l'ordre réel d'accroissement γ' de f. *Il lui est certainement égal si le contour est rectangulaire.* Ceci tient aux trois premiers termes de la formule (32') ([1]). Dans le cas général, il est cependant possible que γ soit réellement l'ordre d'accroissement de f, mais pour le voir il faudrait utiliser la fonction de Green. D'ailleurs, ceci nous importe assez peu. Ce dont nous sommes certains, c'est qu'on peut choisir γ tel que les formules (34) soient vraies *pour toutes les fonctions f admettant un accroissement d'ordre supérieur ou égal à γ* : K *seul variera pour toutes ces fonctions.*

16. Extension du symbole δZ quand les conditions (A) ne sont pas réalisées ([2]). — Quand la fonction *f ne satisfait pas aux conditions* (A), les deux termes de δZ n'existent pas, en général. On peut cependant, d'une manière analogue à ce qui a été fait pour le potentiel (Petrini, *Journal de Liouville*, 1909, et *Acta mathematica*, 1907), donner une extension du symbole δz, en posant

$$\delta' Z = \lim_{h=0,\ k=0} \left\{ \frac{1}{h}\left[\frac{\partial Z}{\partial x}(x+h, y) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y)\right] - \frac{1}{k}[Z(x, y+k) - Z(x, y)] \right\}.$$

([1]) Ce terme a, en effet, un accroissement d'ordre $\frac{1}{2}$, mais peut-être d'un ordre supérieur. Si le contour est rectangulaire, il s'évanouit. L'emploi de la fonction de Green permettrait peut-être de combiner cette intégrale avec celles qui proviennent de la fonction H.

([2]) Ce paragraphe constitue une analyse à part, dont la lecture n'est nullement nécessaire pour la suite.

Voyons dans quelles conditions *cette limite existera et sera égale à* $f(x, y)$. Nous supposerons f *continue au sens des conditions* (A_2) *ou* (A_3), puisque la continuité au sens de la condition (A_1) entraîne les deux autres.

Supposons par exemple que, dans le voisinage de P, $f(\xi, \eta) - f(\xi, y)$ tende vers zéro, quand η tend vers y. Nous isolons P par un rectangle où cette propriété a lieu. Suivant la même marche qu'au paragraphe 8, nous décomposerons Z en trois parties :

$$Z = Z' + Z_1 + Z_2, \qquad \delta' Z' = \delta Z' = 0, \qquad \delta' Z_1 = \delta Z_1 = f(x, y).$$

Il nous reste donc à former le symbole $\delta' Z$ pour la fonction

$$Z_2 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_R U_P \varphi \, dS. \qquad \varphi = f(\xi, \eta) - f(\xi, y),$$

et à chercher dans quelles conditions il est égal à zéro.

Étudions tout d'abord le second terme de la parenthèse : nous donnons à y un accroissement $k > 0$, et nous avons, comme au paragraphe 8 (*fig.* 7),

$$(35) \quad \frac{1}{k}[Z_2(P') - Z_2(P)]$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k} \int\int_{1+1'} U_{P'} \varphi \, dS - \frac{1}{k} \int\int_1 U_P \varphi \, dS + \int\int_2 \frac{U_{P'} - U_P}{PP'} \varphi \, dS \right).$$

D'après un raisonnement déjà fait, lorsque k tend vers zéro, les deux premiers termes du second membre de l'égalité précédente tendent vers zéro, puisque φ tend vers zéro. Quant au dernier terme, qui représente le rapport incrémental de l'intégrale $\int\int_2 U_P \varphi \, ds$ supposée étendue à l'aire fixe 2, nous pouvons lui appliquer la formule de Taylor :

$$(36) \quad \int\int_2 \frac{U_{P'} - U_P}{PP'} \varphi \, dS$$
$$= \int\int_2 \frac{\partial U_P}{\partial y} \varphi \, dS + \frac{k}{2} \int\int_2 \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y_1-\eta)}}}{4(y_1-\eta)^{\frac{5}{2}}} \left[3 - 3\frac{(x-\xi)^2}{y_1-\eta} + \frac{(x-\xi)^4}{4(y_1-\eta)^2} \right] \varphi \, dS$$

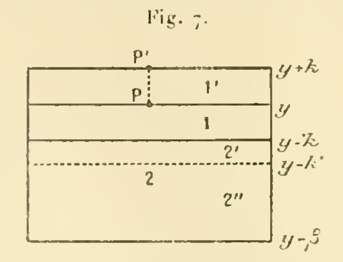
avec $y < y_1 < y + k$. Pour étudier le dernier terme, partageons l'aire 2

en deux parties par la caractéristique d'ordonnée $y - k'$ $(k' > k)$. Le changement de variable $\xi - x = 2\sqrt{s(y-\eta)}$ montre que

$$\left|\frac{k}{2}\int\int_{2'}\right| < k\Phi'\int_{y-k'}^{y-k}\frac{d\eta}{(y_1-\eta)^2}\int_0^\infty\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\left|s^2-2s+\frac{3}{4}\right|ds$$
$$< \mathrm{L}\Phi'\left(\frac{k}{y_1-y+k}-\frac{k}{y_1-y+k'}\right),$$

Φ' étant le maximum de $|\varphi|$ et L un coefficient numérique. Or, quand k tend vers zéro, Φ' tend vers zéro et les deux termes de la parenthèse

Fig. 7.



restent finis. Donc, la partie relative à $2'$ tend vers zéro avec k.

Nous avons de même, Φ'' étant le maximum de $|\varphi|$ dans $2''$,

$$\left|\frac{k}{2}\int\int_{2''}\right| < \mathrm{L}\Phi'' k\int_{y-\beta}^{y-k'}\frac{d\eta}{(y_1-\eta)^2} = \mathrm{L}\Phi''\left(\frac{1}{\dfrac{y_1-y}{k}+\dfrac{k'}{k}}-\frac{k}{y_1-y+\beta}\right).$$

Si k' est infiniment petit d'ordre inférieur à celui de k, $\dfrac{k'}{k}$ tend vers l'infini et l'expression envisagée tend vers zéro (puisque $y_1 - y < k$).

En définitive, le dernier terme de l'égalité (36) tend vers zéro avec k. Laissant de côté le premier pour le moment, passons à l'étude de l'accroissement de $\dfrac{\partial Z_2}{\partial x}$, que nous écrivons (*fig.* 8)

$$(37)\qquad \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{h}\int\int_{\bar{1}}\mathrm{V}_{\mathrm{P}''}\varphi\,d\mathrm{S}-\frac{1}{h}\int\int_{\bar{1}}\mathrm{V}_{\mathrm{P}}\varphi\,d\mathrm{S}+\int\int_{\bar{2}}\frac{\mathrm{V}_{\mathrm{P}''}-\mathrm{V}_{\mathrm{P}}}{\mathrm{PP}''}\varphi\,d\mathrm{S}\right),$$

les deux parties $\bar{1}$ et $\bar{2}$ étant séparées par la caractéristique d'ordonnée $y - h^2$.

Si nous nous reportons à ce qui a été fait au paragraphe **8**, nous

voyons que les deux premiers termes tendent vers zéro, puisque le maximum de $|\varphi|$ dans $\overline{1}$ tend vers zéro.

Quant au dernier terme, il s'écrit

$$(38)\quad \iint_{\overline{2}} \frac{V_{P''} - V_P}{PP''} \varphi \, dS$$
$$= \iint_{\overline{2}} \frac{\partial V}{\partial x} \varphi \, dS + \frac{h}{2} \iint_{\overline{2}} \frac{e^{-\frac{(x_1-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{(y-y)^{\frac{5}{2}}} (x_1 - \xi) \left[\frac{(x_1-\xi)^2}{4(y-\eta)} - \frac{3}{2} \right] \varphi \, dS.$$

avec $x < x_1 < x + h$. Nous envisagerons encore dans l'aire $\overline{2}$ les deux

Fig. 8.

parties $\overline{2'}$ et $\overline{2''}$ séparées par la caractéristique d'ordonnée $y - h'^2$ (dans la figure 8, au-dessus de $y - h'^2$, lire $\overline{2'}$ au lieu de $\overline{2}$). En posant, dans le dernier terme de la formule précédente,

$$\xi - x_1 = 2\sqrt{s(y-\eta)},$$

il vient

$$\left| \frac{h}{2} \iint_{\overline{2'}} \right| < 2h\Phi \int_{y-h'^2}^{y-h^2} \frac{d\eta}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty e^{-s} \left| s - \frac{3}{2} \right| ds < L\Phi \left(1 - \frac{h}{h'} \right),$$

et ceci tend vers zéro quand h et h' tendent vers zéro, puisque Φ' tend vers zéro.

De même

$$\left| \frac{h}{2} \iint_{\overline{2''}} \right| < L\Phi'' h \int_{y-\beta}^{y-h'^2} \frac{d\eta}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} = 2L\Phi'' \left(\frac{h}{h'} - \frac{h}{\sqrt{\beta}} \right).$$

Si h' est choisi de telle sorte que $\frac{h}{h'}$ tende vers zéro, ceci tend encore vers zéro.

En définitive, nous voyons que, au sens où nous avons pris le sym-

bole δ', nous aurons

$$(38') \qquad \delta' Z_2 = \lim_{h=0}\lim_{k=0}\left(\int\int_{\Sigma} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \varphi \, dS - \int\int_{2} \frac{\partial U}{\partial y} \varphi \, dS\right)$$

puisque tous les autres termes étudiés tendent vers zéro. Comme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

il reste

$$\int\int_{\sigma} \frac{\partial U}{\partial y} \varphi \, dS = \int\int_{\sigma} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)} - \frac{1}{2}\right] \varphi \, d\xi \, d\eta,$$

σ étant l'aire comprise entre $y - k$ et $y - h^2$. Or, si $|\varphi| < \Phi$,

$$\left|\int\int_{\sigma}\right| < L''\Phi \int_{h^2}^{k} \frac{dt}{t} = L''\Phi \left| \mathfrak{L} \frac{k}{h^2} \right|,$$

ainsi que le changement de variables usuel le montre immédiatement; et ceci est la seule limitation que nous puissions donner si nous ignorons la façon dont Φ tend vers zéro avec h et k. Il nous faut donc supposer que $\frac{k}{h^2}$ reste fini et non nul. Alors $\int\int_{\sigma}$ tend vers zéro et $\delta' Z_2 = 0$. D'où $\delta' z = f$.

Étudions maintenant le cas de *la continuité par rapport à* ξ : dans le voisinage de P, $f(\xi, \eta) - f(x, \eta)$ tend vers zéro. Nous formons encore

$$\frac{1}{k}[Z_2(x, y+k) - Z_2(x, y)]$$

que nous écrivons sous la forme (35) en posant, cette fois,

$$f(\xi, \eta) - f(x, \eta) = \varphi(\xi, \eta).$$

Pour démontrer que les deux premiers termes du second membre de cette formule sont infiniment petits avec k, nous n'avons qu'à reproduire le raisonnement du paragraphe 8. Il nous reste donc à envisager le terme $\int\int_{2} \frac{U_{P'} - U_P}{PP'} \, dS$ que nous mettrons ici encore sous la forme (36). Dans cette formule le dernier terme est en valeur absolue

inférieur à

$$(39)\qquad k\Phi'\int_{y-\beta}^{y-k}\frac{d\eta}{(y_1-\eta)^2}\int_0^{\frac{\varepsilon^2}{y_1-\eta}}\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\left|s^2-3s+\frac{3}{4}\right|ds$$
$$+k\Phi''\int_{y-\beta}^{y-k}\frac{d\eta}{(y_1-\eta)^2}\int_{\frac{\varepsilon^2}{y_1-\eta}}^{\frac{\alpha^2}{y_1-\eta}}\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\left|s^2-3s+\frac{3}{4}\right|ds$$

en désignant par 2α la plus grande des distances de P aux côtés verticaux du rectangle, par 2ε le demi-côté horizontal d'un rectangle intérieur contenant P, que nous ferons tendre vers zéro avec k (*cf.* § 8, *fig.* 5), par Φ' et Φ'' les valeurs maxima de $|\varphi|$ dans les deux domaines d'intégration.

Le premier terme de cette expression admet comme limite supérieure

$$k\Phi'\int_{y-\beta}^{y-k}\frac{d\eta}{(y_1-\eta)^2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\left|s^2-3s+\frac{3}{4}\right|ds$$

et nous avons vu plus haut que ceci est infiniment petit avec k, quand Φ' l'est aussi.

Pour étudier le second terme de (39), remarquons que l'on peut toujours déterminer un nombre H tel que, s_0 et s_1 étant deux valeurs quelconques appartenant à l'intervalle $(0, \infty)$, on ait

$$\int_{s_0}^{s_1}\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\left|s^2-3s+\frac{3}{4}\right|ds<\mathrm{H}\int_{s_0}^{s_1}\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}ds.$$

Dès lors, le second terme de (39) sera inférieur à

$$k\Phi''\int_{y-\beta}^{y-k}\frac{d\eta}{(y_1-\eta)^2}\int_{\frac{\varepsilon^2}{y_1-\eta}}^{\frac{\alpha^2}{y_1-\eta}}\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}ds<(\alpha^2-\varepsilon^2)\Phi''\frac{k}{\varepsilon}\int_{y-\beta}^{y-k}\frac{e^{-\frac{\varepsilon^2}{y_1-\eta}}}{(y_1-\eta)^{\frac{5}{2}}}d\eta,$$

en remarquant que $\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}$ décroît constamment. En posant $y_1-\eta=\varepsilon^2\theta$, nous obtenons comme limitation

$$(\alpha^2-\varepsilon^2)\Phi''\frac{k}{\varepsilon^4}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{\theta}}}{\theta^{\frac{5}{2}}}d\theta,$$

et, si $\frac{k}{\varepsilon^4}$, est infiniment petit, ceci tend vers zéro.

Si nous passons maintenant à l'étude de

$$\frac{1}{h}\left[\frac{\partial Z_2}{\partial x}(x+h, y) - \frac{\partial Z_2}{\partial x}(x, y)\right],$$

nous le décomposerons encore par la formule (37), dans laquelle les deux premiers termes tendent vers zéro, et le troisième se met sous la forme (38). Dans cette dernière expression on traite le terme $\frac{h}{2}\int\int_2$ par la méthode que nous venons d'employer à l'instant, et qui montre aussi aisément qu'il tend vers zéro avec h.

Avec ce genre de continuité, nous sommes donc encore conduits à l'équation (38') qui nous donne les mêmes conclusions.

En définitive, nous avons obtenu le résultat suivant : *quand la fonction $f(\xi, \eta)$ est continue au sens des conditions* (A_1) *ou* (A_2) *ou* (A_3), *le symbole $\delta' Z$ a un sens et est égal à $f(x, y)$, si k est du deuxième ordre par rapport à h.*

Si, par conséquent, dans une région $\mathcal{R}$, f satisfait aux conditions (A_1) [1], sauf en un certain nombre de points ou sur certaines lignes, où seule la continuité subsiste, nous pouvons déterminer dans cette région des solutions régulières de l'équation, sauf aux points envisagés où les dérivées cesseront d'exister, mais satisferont néanmoins à la relation $\delta z = f$, *leurs parties infinies se détruisant.* En effet, étant donné un tel point P_0, les symboles δz et $\delta' z$ coïncident dans le voisinage de ce point, et, comme $\delta' z$ est continu dans $\mathcal{R}$, $\delta' z_{P_0}$ est donc la limite de δz_P quand P tend vers P_0.

---

[1] Nous disons ici *aux conditions* (A_1), parce que, si l'on veut avoir ce que nous avons appelé une solution régulière de l'équation, il faut que f soit continue en x, y. Mais il est évident que, si l'on ne se préoccupe que de l'existence des dérivées en chaque point, ce que nous disons dans la suite du paragraphe est également vrai dans le cas des conditions (A_2) ou (A_3).

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES AUX LIMITES POUR LES ÉQUATIONS DU TYPE PARABOLIQUE.

I. — L'équation linéaire à deux variables du type parabolique.

L'équation linéaire à deux variables du type parabolique peut se mettre sous la forme

$$(E) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

a, b, c, f étant des *fonctions continues de* x, y, dans une région $\mathcal{R}$. La première hypothèse qui s'impose est de supposer que b *a un signe constant*, car nous avons vu que, dans le cas où $a = c = 0$ et $b = \pm 1$, la disposition du contour portant les données des problèmes aux limites changeait suivant que b était égal à $+1$ ou à -1.

17. Forme canonique. — Faisons dans (E) le changement de variables défini par

$$x' = x'(x, y), \qquad y' = \pm y.$$

Il vient

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} + \left(\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} + a\frac{\partial x'}{\partial x} + b\frac{\partial x'}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x'} \pm b\frac{\partial z}{\partial y'} + cz + f = 0.$$

Nous prendrons le signe + ou le signe — suivant que b sera négatif ou positif, et nous déterminerons x' par la condition

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 = |b|, \qquad x' = \int |b|^{\frac{1}{2}} dx.$$

Nous supposerons, pour la possibilité de ce changement de variable et de l'inversion qui en résulte, que b admet dans $\mathcal{R}$ des dérivées du premier ordre continues et qu'il ne s'annule jamais.

Nous obtenons ainsi le type canonique suivant, que nous utiliserons

dans les calculs

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + cz + f.$$

en supprimant maintenant les accents [1]. a, c, f sont supposés *continus* dans la région envisagée.

Cas de réduction à des formes plus simples. — Si nous posons $z = uv$, l'équation ($\mathcal{E}$) devient (*cf.* H. Block cité dans l'Introd.)

$$v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(-2\frac{\partial v}{\partial x} + av\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + cv\right)u + f.$$

Nous voyons donc que, en déterminant v par l'équation

$$(40) \qquad 2\frac{\partial v}{\partial x} = av, \qquad v = e^{\int \frac{a}{2}dx},$$

nous pouvons *faire disparaître le terme en* $\frac{\partial u}{\partial x}$. Ceci suppose que u admet *des dérivées partielles du premier ordre* en chaque point de $\mathcal{R}$. Chaque fois que la chose sera possible, il conviendra d'effectuer cette réduction, car la forme ainsi trouvée ($a = 0$) est, comme nous le verrons, *très commode pour les calculs d'approximations successives*. Mais ce n'est pas elle que nous utiliserons dans la théorie générale, car elle ne se prête pas aux généralisations que nous avons en vue.

Ayant annulé le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial x}$, peut-on faire disparaître également, par un choix convenable de v, le terme en u, de manière à obtenir la forme $\delta u = f$? Il suffit pour cela que l'on ait

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + cv = 0,$$

ce qui s'écrit, en tenant compte de l'équation (40),

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{a^2}{4} - c\right)v;$$

---

[1] Lorsque b est fonction de y seul, il est plus simple d'effectuer le changement de variable $y' = -\int \frac{dy}{b}$.

on a donc

$$\frac{\partial \log v}{\partial x} = \frac{a}{2}, \qquad \frac{\partial \log v}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{a^2}{4} - c.$$

D'où la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - a\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} - 2\frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

qui sera réalisée en particulier si *a est constant et c fonction de y*. On posera dans ce cas

$$v = e^{\frac{ax}{2} - \frac{a^2 y}{4} - \int c\, dy},$$

d'où la réduction immédiate de l'équation (E) à la forme $\delta z = f$, si $a =$ const., b et $c =$ fonctions de y.

18. Propriétés des solutions de l'équation générale (E′). — Dans l'équation

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0.$$

supposons que a, b, c soient, dans une région $\mathcal{R}$, située tout entière à distance finie, des fonctions continues. Nous allons montrer dans quels cas toute solution, *régulière* dans une région $\mathcal{R}$, ne peut admettre à l'intérieur de $\mathcal{R}$, ni *maximum positif*, ni *minimum négatif;* suivant les cas, il conviendra d'ailleurs d'apporter quelques précisions au sujet du sens des mots *maximum* et *minimum*. Nous allons nous inspirer pour cela des méthodes suivies par M. Picard dans l'étude du type elliptique.

Dans le cas particulier où c est négatif dans $\mathcal{R}$, l'impossibilité d'un maximum positif, *propre* ou *impropre*, est immédiate : dans l'hypothèse contraire, on aurait, en effet, au point envisagé

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \leqq 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad cz < 0.$$

et l'équation (E′) ne pourrait être vérifiée. De même, un minimum négatif ne peut avoir lieu, la solution $-z$ ayant alors un maximum positif.

La remarque précédente est vraie quel que soit b. Nous pouvons

même lui donner une forme plus précise : si en un point $P(x_0, y_0)$, b est négatif ou nul et c négatif, z ne peut prendre une valeur positive supérieure ou égale (ou une valeur négative inférieure ou égale) aux valeurs prises aux points voisins de P pour lesquels $y \leqq y_0$; en d'autres termes, il ne peut y avoir de maximum positif (ou de minimum négatif) propre ou impropre, *relativement aux points d'ordonnée inférieure ou égale à celle de* P. Et, en effet, dans l'hypothèse contraire, on aurait en P

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \leqq 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad b\frac{\partial z}{\partial y} \leqq 0, \qquad cz < 0.$$

Si b est positif ou nul, on obtient des propriétés analogues pour la région où $y \geqq y_0$.

Les résultats précédents montrent que, si c est négatif et $b \leqq 0$ dans la région $\mathcal{R}$, à l'intérieur d'un contour (C) [1] situé dans $\mathcal{R}$ une solution z de (E′) satisfait en P à l'inégalité $-M' < z_P < M$, $-M'$ et M désignant la valeur minimum négative et la valeur maximum positive de z sur la partie du contour située *au-dessous* de la caractéristique passant par P.

De là résulte, avec les hypothèses faites sur b et c, *l'unicité* d'une solution régulière de (E) prenant des valeurs données sur (C), toute solution régulière de (E) qui s'annule sur (C) étant nulle à l'intérieur. Mais ceci est vrai quel que soit c, à la condition de supposer *b négatif et non nul quand c est positif ou nul.* En effet, la substitution $z = u e^{K(y-y_0)}$ donne une équation en u de même forme que (E′), mais dans laquelle le coefficient c est remplacé par $bK + c$; on peut donc choisir K de telle façon que $bK + c$ soit négatif dans $\mathcal{R}$: d'où l'unicité de u et par suite de z.

Il est facile d'avoir, quand c peut être $\geqq 0$, une *limitation de z à l'intérieur de* (C).

Si, en effet, y_1 est l'ordonnée de la caractéristique inférieure de (C), on a certainement $-M'e^{K(y_0-y_1)} < u_P < M e^{K(y_0-y_1)}$. Donc

$$-M'e^{K(y_0-y_1)} < z_P < M e^{K(y_0-y_1)},$$

puisque $z_P = u_P$.

---

[1] Dans ce paragraphe, le sens du mot contour (C) peut être étendu : il suffit que (C) soit continu, simple et tel qu'il forme, avec toute caractéristique qui le coupe, un ou plusieurs *contours continus fermés sans point double.*

Ceci nous montre que la propriété, établie plus haut, sur l'impossibilité d'un maximum positif aux points où *c est négatif*, est vraie également si *c est nul, mais reste* $\leqq 0$ *dans le voisinage*. Mais, cette fois, le mot maximum est pris au sens *propre* et b doit être supposé *négatif et non nul*. En effet, si l'on applique l'inégalité précédente à un petit contour (C) contenant P, le nombre K peut être pris aussi petit qu'on le veut, ce qui montre que z_P est $\leqq M$, et, par suite, qu'un maximum positif propre est impossible.

Il résulte de ce que nous venons de voir que, si b est négatif, une solution régulière prenant des valeurs positives sur un contour (C) ne peut devenir négative à l'intérieur de (C), mais elle peut fort bien s'y annuler. *Dans le cas où* $c \equiv 0$, il existe une propriété plus précise : en un point P on a $m \leqq z_P \leqq M$, M et m étant le maximum et le minimum de z sur la portion de (C) située au-dessous de la caractéristique passant par P. Ceci résulte de ce que $M - z$ et $z - m$ sont solutions et prennent sur le contour des valeurs positives ou nulles.

Nous allons dorénavant, dans ce Chapitre, supposer *b essentiellement négatif*. Nous reviendrons plus tard sur le cas où b peut s'annuler. Nous avons montré *l'unicité de toute solution régulière de l'équation* (E) *prenant des valeurs données sur* (C) : nous allons former cette solution après avoir ramené l'équation à la forme ($\mathcal{E}$).

19. L'ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE DU PROBLÈME AUX LIMITES. — Soit donc l'équation ($\mathcal{E}$) : en lui appliquant la formule (F) du paragraphe **4**, nous avons

$$(41)\quad 2\sqrt{\pi}\, z(x,y) = -\int_{M_1A_1+A_2M_2} z(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial \xi}\,d\eta + \int_{A_1A_2} G\, z\, d\xi$$
$$-\iint_{S_y}\left[a(\xi,\eta)\frac{\partial z}{\partial \xi} + c(\xi,\eta)\,z(\xi,\eta) + f(\xi,\eta)\right]G\,d\xi\,d\eta,$$

ce qui peut s'écrire

$$(e)\quad z(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\iint_{S_y}\left[a(\xi,\eta)\frac{\partial z(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right.$$
$$\left. + c(\xi,\eta)\,z(\xi,\eta)\right]G(\xi,\eta;x,y)\,d\xi\,d\eta + \zeta(x,y),$$

$\zeta(x,y)$ étant la solution de $\delta z = f$ répondant aux conditions aux

limites données : z égal à $\Phi_1(y)$ et $\Phi_2(y)$ sur C_1 et C_2, à $\Phi(x)$ sur A_1A_2 (nous supposerons l'ordonnée de A_1A_2 nulle).

Nous voyons donc que la solution cherchée satisfait à une *équation intégro-différentielle* d'un type facile à résoudre, car une des limites de l'intégrale est variable. Une fois la solution formée, il suffira, d'après ce que nous avons vu dans le paragraphe **9**, que $a\frac{\partial z}{\partial x} + cz$ et f satisfassent aux conditions (A) en tout point intérieur à S.

Supposons que *a, c, f vérifient ces conditions.* Il résulte de l'équation (41) que z a la forme

$$z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_y}\left(a\frac{\partial z}{\partial \xi} + cz + f\right)U_P\,d\xi\,d\eta + \psi(x, y),$$

où ψ admet des dérivées en tout point P intérieur à S : l'intégrale $\int\int_{S_y}$ n'est autre qu'une fonction Z [formule (23), § **8**] et par suite, en ce point P, il résulte de l'étude des accroissements de Z et $\frac{\partial Z}{\partial x}$ (§ **15**), que z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ satisfont aux conditions (A). Il en est donc de même de $a\frac{\partial z}{\partial x} + cz$ et, par conséquent, *z vérifie bien l'équation* ($\mathcal{E}$).

Pour calculer la solution de l'équation (e), nous procéderons par *approximations successives*, en posant

$$z = z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots,$$

$$z_0 = \zeta(x, y), \qquad \ldots, \qquad z_n = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_S\left(a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + cz_{n-1}\right)G\,d\xi\,d\eta.$$

Faisons ici l'hypothèse que les données $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$, sur C_1 et C_2, admettent en y des *accroissements d'ordre non nul.* Si cet ordre est supérieur à $\frac{1}{2}$, et si $\Phi'(x)$ est continue (§ **5-6**), ζ et $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ sont continus sur (C). Si Φ n'a pas de dérivée, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ existe sur C_1 et C_2, et, d'une façon générale, on a dans S, bords compris (*voir* la Note à la fin du § **5**, ou bien la Note sur le contour rectangulaire),

$$(42) \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\bar{\zeta}}{\sqrt{y}},$$

$\bar{\zeta}$ étant bornée et continue. Le second terme de la suite d'approximations est

$$z_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S_y} \left(a \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + c\zeta \right) G \, d\xi \, d\eta,$$

qui, d'après les propriétés des intégrales $I_{0\frac{1}{2}}$ et la forme de la fonction G [formule (13)]

$$G(\xi, \eta; x, y) = g\, U(\xi, \eta; x, y),$$

est une fonction continue dans S, et d'ailleurs s'annule sur (C).

L'intégrale

$$\int\int_{S_y} \left(a \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + c\zeta \right) V \, d\xi \, d\eta$$

est également continue dans S, bord compris : d'après ce que nous avons vu dans le paragraphe **12**, il en est de même de la dérivée $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, qui est donnée en tout point de S ou de (C) par la formule

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S_y} \left(a \frac{\partial \zeta}{\partial x} + c\zeta \right) \frac{\partial G}{\partial x} \, d\xi \, d\eta.$$

19*. Ce que nous venons de dire montre que z_1 et $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ *sont bornés et continus dans* S, *bord compris*. Voyons si cette conclusion subsiste au cas où les accroissements de Φ_1 et Φ_2 sont d'*ordre inférieur à* $\frac{1}{2}$. Il faut alors modifier la formule (42) et l'écrire [formule (20), § **6***]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\zeta_1}{|x - X_1(y)|^\beta} + \frac{\zeta_2}{|x - X_2(y)|^\beta} + \frac{\bar{\zeta}}{\sqrt{y}}.$$

Il est manifeste que z_1 sera continu dans S et s'annulera sur (C) : il suffit de l'écrire pour s'en convaincre. Quant à $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, si nous y remplaçons $\frac{\partial G}{\partial x}$ par sa valeur, nous savons qu'il nous suffit, pour étudier ce

terme dans S et sur (C), d'envisager les intégrales obtenues en remplaçant $\frac{\partial G}{\partial x}$ par V, soit par exemple

$$I = \int\int \frac{\zeta_1(\xi, \eta)}{|\xi - X_1(\eta)|^\beta} V(\xi, \eta; x, y)\, d\xi\, d\eta.$$

Cette intégrale aura évidemment un sens tant que P ne viendra pas sur C_1. Voyons ce que nous obtiendrons en faisant $x = X_1(y)$: il vient

$$\bar{I} = \int\int \frac{\zeta_1}{|\xi - X_1(\eta)|^\beta} \frac{X_1(y) - \xi}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[X_1(y)-\xi]^2}{4(y-\eta)}} d\xi\, d\eta.$$

Or

$$|X_1(y) - \xi| \leqq |X_1(y) - X_1(\eta)| + |\xi - X_1(\eta)|.$$

D'où, en tenant compte de la condition (Γ) imposée au contour (C),

$$|\bar{I}| < \int\int \frac{K\, d\xi\, d\eta}{|\xi - X_1(y)|^\beta |y-\eta|^{1-\frac{\alpha}{2}}} + \int\int \frac{|\xi - X_1(\eta)|^{1-\beta}}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[X_1(y)-\xi]^2}{4(y-\eta)}} d\xi\, d\eta.$$

La première intégrale a évidemment un sens. Dans la seconde nous avons [1]

$$|\xi - X_1(\eta)|^{1-\beta} \leqq |X_1(y) - X_1(\eta)|^{1-\beta} + |\xi - X_1(y)|^{1-\beta},$$

et l'on voit que cette intégrale est plus petite qu'une somme de deux intégrales du type I_{pq} qui ont un sens toutes les deux.

Mais, si nous voyons ainsi que $\bar{I}$ a un sens, il ne s'ensuit pas que I soit une fonction continue en tout point du bord. Pour le voir il suffirait de montrer que cette intégrale est uniformément convergente. Pour ne pas allonger cette analyse, nous ne donnerons pas le détail de la démonstration. Pour établir ce point il conviendrait d'effectuer une

---

(1) En effet, si λ est un nombre inférieur ou égal à *un*, *a* et *b* deux nombres positifs, $a \geqq b$, on a, en utilisant la formule des accroissements finis,

$$(a+b)^\lambda = a^\lambda \left(1 + \frac{b}{a}\right)^\lambda \leqq a^\lambda \left(1 + \frac{\lambda b}{a}\right) \leqq a^\lambda \left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^\lambda\right] = a^\lambda b^\lambda;$$

si λ est > 1 on peut écrire $(a+b)^\lambda < 2^\lambda (a^\lambda + b^\lambda)$ (*cf.* Levi, *loc. cit.*, p. 235).

décomposition de l'aire d'intégration par la caractéristique d'ordonnée y' définie comme au paragraphe **2**, formule (5).

20. Il résulte en définitive des considérations précédentes que *si* Φ_1 *et* Φ_2 *admettent des accroissements d'ordre non nul,* z_1 *et* $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ *sont des fonctions bornées et continues en tout point de* S, *bord compris et* z_1 *s'annule sur* (C).

La suite des approximations se poursuit alors aisément. Soit, en tout point de S ou de (C),

$$|a| < A, \qquad |c| < C,$$
$$|z_1| < M, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < M.$$

Nous pourrons alors écrire, en utilisant les résultats du paragraphe **12**,

$$|z_2| \text{ et } \left|\frac{\partial z_2}{\partial x}\right| < LM\,(A+C)\,B\left(\frac{1}{2}, 1\right)y^{\frac{1}{2}} = M\frac{L(A+C)\sqrt{\pi y}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)},$$

$$|z_3| \text{ et } \left|\frac{\partial z_3}{\partial x}\right| < ML^2(A+C)^2\,B\left(\frac{1}{2}, 1\right)B\left(\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right)y = M\frac{\left[L(A+C)\sqrt{\pi y}\right]^2}{\Gamma(2)},$$

et, d'une manière générale [1], z_n étant d'ailleurs nul sur (C),

$$|z_n| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < M\frac{\left[L(A+C)\sqrt{\pi y}\right]^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sont ainsi représentés par *deux séries absolument et uniformément convergentes de fonctions continues à l'intérieur de* S, et même au bord en ce qui concerne z. D'après ce que nous avons dit plus haut, z est donc bien la solution cherchée, prenant sur (C) les valeurs données, car nous savons d'autre part que cette solution est *unique*.

---

[1] Il est à peine besoin de faire remarquer combien plus simple est toute cette étude quand $a = 0$. On obtient alors, *sans faire d'autre hypothèse sur les données que celles de la continuité*, une série de comparaison entière en y.

21. Examen des hypothèses sur les coefficients, le contour et les données. — Dans ce qui précède nous avons supposé *que le contour satisfaisait à la condition* (Γ), *que* Φ_1 *et* Φ_2 *admettaient des accroissements d'ordre non nul, et que les coefficients de l'équation vérifiaient les conditions* (A) *à l'intérieur de* S.

Dans le cas où X_1 et X_2 sont *dérivables*, le changement de variable

$$(V) \qquad x' = \frac{l[x - X_1(y)]}{X_2(y) - X_1(y)}$$

dont nous avons déjà parlé dans l'Introduction, ramène l'équation (ℰ) à une équation de même forme et le contour à un *contour rectangulaire* porté par les droites $x' = 0$, $x' = l$, $y = 0$.

Nous pourrons alors profiter des facilités qui s'offrent dans ce cas (*voir* la formation de la fonction de Green dans la Note).

Voyons maintenant dans quel cas on peut intégrer l'équation sans faire sur les données d'autre hypothèse que *celle de la continuité*. Nous avons dit que, dans ce cas, $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ peut se mettre sous la forme [*cf.* formule (15) § 5*]

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\zeta_1}{x - X_1(y)} + \frac{\zeta_2}{x - X_2(y)} + \frac{\bar{\zeta}}{\sqrt{y}}.$$

Si nous voulons que z_1 et $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ soient *bornés dans* S, *contour compris*, il nous faudra faire quelque hypothèse sur la valeur du coefficient a au voisinage de C_1 et C_2. Il est à remarquer que, si nous supposons que a soit une fonction *continue et monotone* de x dans un intervalle arbitrairement petit ayant pour borne l'abscisse $\bar{x}_0$ d'un point de C_1 ou C_2, les deux intégrales

$$I = \int\int a\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} G\, dS, \qquad \frac{\partial I}{\partial x} = \int\int a\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\frac{\partial G}{\partial x}\, ds,$$

ont un sens et restent bornées en tout point intérieur à S. On le voit aisément en remarquant que $\int_{x_0}^{x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}d\xi = \zeta - \zeta_0$.

Or, quand une intégrale $\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$ a un sens, quelle que soit la nature de φ pour $x = x_0$, l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f\varphi\,dx$ a aussi un sens, si f est monotone et continue au voisinage de $x = x_0$, et sa valeur absolue est inférieure à $F\left|\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx\right|$, F étant le maximum de $|f|$ dans l'intervalle (x_0, x). On déduit aisément de là que I est une fonction bornée et continue dans S, bords compris. Quant à la dérivée $\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x}$, elle est continue à l'intérieur de S, mais ne reste pas bornée quand P tend vers le bord : il faudrait donc étudier ce qui se passe dans ce cas. Nous nous bornerons à signaler simplement cette analyse qui donnerait sans doute pour $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ une limitation de la forme

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < \frac{L_1 y^{\frac{1}{2}}}{|x - X_1(y)|} + \frac{L_2 y^{\frac{1}{2}}}{|x - X_2(y)|},$$

d'où l'on déduirait aisément de proche en proche que les séries $\sum z_n$ et $\sum \frac{\partial z_n}{\partial x}$ convergent uniformément dans toute région intérieure à S, la série $\sum z_n$ convergeant aussi sur le contour.

Donc, même avec l'hypothèse de la simple continuité des données, il semble qu'on puisse former la solution.

Lorsque $\frac{\partial a}{\partial x}$ *existe dans* S, la détermination de cette solution se simplifie, ainsi que nous allons le voir.

22. Résolution du problème aux limites par le moyen d'une équation intégrale ordinaire. — Reprenons l'équation

$$z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\!\!\int_{S} \left(a \frac{\partial z}{\partial \xi} + c z\right) G \, d\xi \, d\eta + \zeta(x, y).$$

Désignons par [illegible] et [illegible] les domaines limités respectivement par

$M'_1 A_1 A_2 M'_2$ et $M_1 M'_1 M'_2 M_2$ (*fig.* 1). Nous posons donc

$$(43) \qquad \int\int a \frac{\partial z}{\partial \xi} G \, dS = \int\int_{\Gamma} + \int\int_{1},$$

$$\int\int_{1} = -\int\int_{1} z \frac{\partial a G}{\partial \xi} dS + \int_{M'_1 A_1 + A_2 M'_2} a G z \, d\eta.$$

L'intégrale curviligne est nulle puisque G est nul au bord. Si $M'_1 M'_2$ tend vers $M_1 M_2$, $\int\int_{\Gamma}$ tend vers zéro et $\int\int z \frac{\partial a G}{\partial \xi} dS$ tend vers

$$\int\int_{S_y} z \frac{\partial a G}{\partial \xi} ds.$$

Cette intégrale est, d'après le paragraphe **12**, une fonction continue de (x, y). Nous obtenons donc en définitive l'équation intégrale

$$(e') \quad z(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S_y} \left[\frac{\partial a(\xi, \eta) G}{\partial \xi} - c(\xi, \eta) G \right] z(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta + \zeta(x, y).$$

Nous parlerons plus loin de sa résolution. Pour l'instant, supposons que nous ayons une fonction *continue*, solution de l'équation (e') : vérifie-t-elle l'équation $(\mathcal{E})$ avec les conditions aux limites données ? Une démonstration est nécessaire, car nous avons admis, dans (43), que $\int\int_{\Gamma}$ tendait vers zéro et il faudrait le justifier : or *z n'est pas dérivable au bord.* Aussi, au lieu de remonter de l'équation (e') à l'équation (e), nous allons *passer directement de* (e') *à l'équation* $(\mathcal{E})$.

Tout d'abord, z prend bien au bord les valeurs données, c'est-à-dire que l'intégrale double de (e') est alors nulle. En effet, d'après le raisonnement que nous avons donné dans le paragraphe **4**, on voit que $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ est nul quand P est au bord et H dans S. Par suite, si l'on isole C_1 et C_2 du reste de l'aire par deux bandes très étroites, les intégrales doubles étendues à ces deux bandes seront très petites, d'après la formule (12) (§ **4***), et l'intégrale étendue au reste sera nulle : donc l'intégrale totale doit être nulle.

Montrons maintenant que l'équation $(\mathcal{E})$ est vérifiée par z en tout point $P(x, y)$ *intérieur à* S. Tout d'abord, nous allons établir que z admet pour un accroissement h de x, un accroissement d'ordre inférieur à *un*. Soit en effet un petit rectangle R, contenant le

point P (x, y) ainsi que le point P' $(x+h, y)$. Nous avons $G = U - H$, H étant déterminée comme solution de $\delta z = 0$: soit $\mathcal{K}_1$ la partie du noyau de l'équation (e') relative à U, $\mathcal{K}_2$ la partie relative à $-H$, $\mathcal{K}$ le noyau total. Posons $z = z' + \zeta$, donc

$$(44)\quad z' = \int\int_S \mathcal{K} z\,dS = \int\int_R \mathcal{K}_1 z\,dS + \int\int_R \mathcal{K}_2 z\,dS + \int\int_{S-R} \mathcal{K} z\,dS,$$

H et $\frac{\partial H}{\partial \xi}$ admettent en (x, y) des dérivées de tous ordres à l'intérieur de S; la seconde intégrale est donc dérivable par rapport à x; la troisième aussi, puisque le domaine d'intégration ne contient pas le point (x, y). Quant à la première, nous avons vu au paragraphe **15** qu'elle admettait un accroissement d'ordre voisin de *un*. Enfin $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ existe à l'intérieur de S. Donc z a bien la propriété énoncée.

Mais alors, puisque a satisfait aux conditions (A), $\frac{\partial z}{\partial x}$ existe en tout point intérieur à S, car la première intégrale de la formule (44) admet une dérivée par rapport à x; les autres également. Nous pouvons alors effectuer la transformation

$$\int\int_R \mathcal{K}_1 z\,dS = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_R\left(\frac{\partial a U}{\partial \xi} - c U\right) z\,dS$$
$$= \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_R\left(a\frac{\partial z}{\partial \xi} + c z\right) U\,dS + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int a U z\,d\eta.$$

Remplaçant le premier terme de z' par sa nouvelle expression, nous pouvons maintenant calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$, dont nous avons démontré l'existence, par la formule de Leibniz, et la formule ainsi obtenue permet de voir, par la même analyse, que, si c satisfait à la condition (A_2), $\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}$ existe dans S. On s'assurerait de même de l'existence de $\frac{\partial z'}{\partial y}$, et l'on aurait des démonstrations analogues, à l'aide des formules du paragraphe **15**, si c satisfaisait aux conditions (A_1) ou (A_3).

Si maintenant nous formons $\delta z = \delta z' + \delta \zeta$, tous les termes de $\delta z'$ sont nuls, sauf celui qui provient de la première intégrale du second membre de (44), et qui est égal à $a\frac{\partial z}{\partial x} + cz$. D'autre part $\delta\zeta = f$. Donc, *en tout point intérieur à* S,

$$\delta z = a\frac{\partial z}{\partial x} + cz + f. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

25. Revenons maintenant à la *résolution* de l'équation (e'). Opérant toujours par approximations successives, nous poserons

$$(45)\qquad z_0 = \zeta, \qquad \ldots, \qquad z_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S_y} \left(\frac{\partial a G}{\partial \xi} - cG\right) z_{n-1}\, d\xi\, d\eta.$$

L'emploi de la formule (12) permet, sans aucune difficulté, de déterminer une série majorante, qui, à cause du terme $\frac{\gamma_1}{(y-\eta)^{1-\frac{\alpha}{2}}}$, est de la forme $\sum \frac{\left(N_1^{\frac{\alpha}{2}}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n\alpha}{2}\right)}$. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant.

Auparavant, il convient de résumer les hypothèses faites dans le présent paragraphe : *a admet une dérivée bornée et intégrable en tout point de* S, *bord compris; les coefficients a, c et f sont continus dans* S, *bornés au bord, et satisfont aux conditions* (A) *à l'intérieur; les données sont continues; le contour satisfait à la condition* (Γ). Il va sans dire que la continuité des coefficients en x, y ne sert qu'à assurer la régularité de la solution, au sens où nous l'avons entendu. Si a, c, f n'étaient pas continus, toutes les autres conditions étant vérifiées, z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ seraient continues dans S, mais $\frac{\partial z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ne le seraient pas, bien qu'existant en chaque point.

La *limitation des dérivées de* z se déduirait aisément du raisonnement que nous avons fait plus haut et qui permet de calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ au moyen de la fonction z elle-même par une sorte d'itération. On trouverait ainsi :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\zeta_1}{x - X_1(y)} + \frac{\zeta_2}{x - X_2(y)} + \frac{\zeta_3^*}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\zeta_1'}{[x - X_1(y)]^2} + \frac{\zeta_2}{[x - X_2(y)]^2} + \frac{\zeta_4}{\sqrt{y}}.$$

Mais, quoi qu'il en soit de l'allure de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ vers les bords, il est manifeste que, dans toute région complètement intérieure à S, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ seront limités en fonction linéaire de la valeur absolue maxima M des données sur le contour. Si $l\text{M} + n$ est la forme de cette limitation, le coefficient n ne dépend que de f.

24. Remarques sur l'emploi de la fonction de Green. — La *fonction de Green* permet de ramener la résolution du problème aux limites que nous nous sommes proposé à celle d'une équation intégrale ou intégro-différentielle. Mais son emploi n'est nullement indispensable et serait même *inutile*, dans certains cas où l'on voudrait se borner à *démontrer l'existence de la solution*.

Nous avons dit plus haut comment, en utilisant la formule (12), on pouvait trouver une série majorante pour z, entière en $y^{\frac{\alpha}{2}}$. En réalité il existe une série de comparaison qui ne dépend pas de α, c'est-à-dire du contour. Il y a en effet une façon très simple d'étudier les intégrales de la forme $\int\int_{S_y} \frac{\partial G}{\partial \xi} f \, d\xi \, d\eta$, sans s'appuyer sur les calculs de limitation du paragraphe 4*. Pour ne pas trop allonger cette étude, nous ne donnerons ce procédé que dans l'espace : il s'appliquerait ici sans modification essentielle.

Pour le moment, nous allons voir comment on peut majorer les approximations sans utiliser la fonction de Green. Dans la relation (15) qui donne z_n, posons dans le second membre

$$\int\int_{S_y} = \int\int_{S'_y} + \int\int_{S_y - S'_y},$$

S'_y désignant le domaine limité par un contour (C') très voisin de (C). On a [1]

$$\int\int_{S'_y} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S'_y} \left(a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + c\, z_{n-1} \right) G \, dS + \int_{(C'_y)} a\, z_{n-1} G \, d\eta.$$

Si (C') tend vers (C), la dernière intégrale s'évanouit, le premier

---

[1] En admettant l'existence de $\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}$ à l'intérieur de S : ce qui suit montrera que l'existence de cette dérivée est assurée de proche en proche.

membre tend vers $\int\int_{S_y}$: donc la première intégrale du second membre tend aussi vers cette limite; c'est-à-dire que

$$\int\int_{S_y}\left(a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}+c\,z_{n-1}\right)G\,d\xi\,d\eta$$

a un sens. Donc, en tout point $P(x, y)$ intérieur à S, z_n est solution de

$$\delta z_n = a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}+c\,z_{n-1},$$

et nous savons d'ailleurs que z_n s'annule sur (C). Nous pouvons donc écrire

$$(46)\qquad z_n=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_y}\left(\frac{\partial a\,U}{\partial \xi}-c\,U\right)z_{n-1}\,d\xi\,d\eta-\bar{z}_n,$$

$\bar{z}_n$ étant la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) les mêmes valeurs que l'intégrale. Il suffit alors de se reporter au raisonnement du paragraphe **20**, pour voir de proche en proche que z_n est majoré par le terme $\dfrac{\left(N y^{\frac{1}{2}}\right)^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

Nous voyons donc, d'après cela, que, pour démontrer l'existence de la solution sans se servir de la fonction de Green, il suffirait de faire une suite d'approximations de la forme (46), ce qui donnerait, par sommation, l'équation

$$z=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_y}\left(\frac{\partial a\,U}{\partial \xi}-c\,U\right)z\,d\xi\,d\eta-\bar{z},$$

d'où l'on passerait directement à l'équation (e'), comme dans le paragraphe précédent.

Il est clair que, au point de vue de la résolution effective d'un problème aux limites, un tel procédé serait fort incommode, puisque, à chaque approximation, il faudrait résoudre un nouveau problème aux limites pour l'équation $\delta z = 0$. Au contraire, quand nous nous placerons au point de vue d'un théorème d'existence, nous aurons parfois avantage à nous passer de la fonction de Green.

25. Théorème sur les séries de solutions. — Soit un *contour continu simple* $\mathfrak{S}$ (courbe de M. Jordan), ouvert du côté des y positifs, coupé en un nombre pair de points par les caractéristiques, de façon à former avec toute caractéristique qui le coupe *un ou plusieurs contours continus fermés sans points multiples*, limités supérieurement par cette caractéristique. Tout point intérieur à l'un de ces contours relatifs à la caractéristique d'ordonnée maxima sera dit *intérieur à* $\mathfrak{S}$.

Envisageons une série

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots \tag{47}$$

de fonctions, dont les termes sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + cz, \tag{$\mathcal{E}'$}$$

en tout point *intérieur* à $\mathfrak{S}$, et qui *converge uniformément sur* $\mathfrak{S}$. Pour $n > N$, on aura donc sur $\mathfrak{S}$, quel que soit p,

$$|z_n + z_{n+1} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Or la somme $z_n + \ldots + z_{n+p}$ est solution de l'équation ($\mathcal{E}'$) à l'intérieur de $\mathfrak{S}$ et, d'après ce que nous avons vu dans le paragraphe **18**, en tout point intérieur à Γ, on aura

$$|z_n + z_{n+1} + \ldots + z_{n+p}| < K\varepsilon, \tag{48}$$

K étant un nombre fixe dépendant des coefficients et des dimensions du contour. Or, étant donnée une région $\mathcal{R}$ *intérieure* à $\mathfrak{S}$, nous pourrons tracer un contour (C) contenant $\mathcal{R}$ à son intérieur, et sur lequel l'inégalité (48) sera vérifiée. D'après ce que nous avons dit plus haut, en tout point de $\mathcal{R}$ nous pourrons écrire

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x} + \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z_{n+p}}{\partial x}\right| < K_1\varepsilon,$$

K_1 étant un nouveau coefficient indépendant de n et de p. On aura une inégalité analogue pour les dérivées en y et pour la dérivée seconde en x. Par suite les séries formées par les dérivées en question des termes de la série (47) convergeront uniformément dans $\mathcal{R}$ et la série (47) représentera dans cette région une solution de l'équation ($\mathcal{E}'$). Nous pouvons donc en définitive énoncer le théorème sui-

vant : étant donné un contour Γ, de l'espèce définie plus haut, *si une série de solutions de l'équation* ($\mathcal{E}'$) *converge uniformément sur* Γ, *elle converge uniformément dans toute région intérieure et y représente une solution de l'équation* [1].

Il va sans dire que ce théorème s'applique également à l'équation (E'), § **18**, si b garde un signe constant, sans s'annuler.

26. Application du théorème précédent au cas où le contour présente des singularités [2]. — Étant donné un contour (C), il peut se faire que, en certains points isolés, *la condition* (Γ) *cesse d'être vérifiée*, ou bien encore que le segment de caractéristique inférieur se réduise à zéro, *c'est-à-dire que* A_1 *et* A_2 *coïncident*. Les méthodes précédentes alors ne s'appliquent plus. L'ingénieuse méthode indiquée par M. Lévi dans l'étude de l'équation de la chaleur, peut s'étendre à l'équation ($\mathcal{E}$) et permet de tourner la difficulté.

Remarquons tout d'abord que, si les coefficients vérifient les conditions (A) un peu au delà de S, il est toujours possible de former une intégrale particulière de l'équation ($\mathcal{E}$) régulière dans S et sur (C). Il suffit, par exemple, de prendre la solution de l'équation

$$(49) \qquad z_0(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S'_y} \left(a \frac{\partial z_0}{\partial \xi} + c z_0 + f \right) U(\xi, \eta; x, y)\, d\xi\, d\eta,$$

S' étant un domaine limité par un contour (C'), bien régulier et contenant S. z_0 prend sur le contour donné des valeurs continues et la résolution de l'équation ($\mathcal{E}$) se ramène, par le procédé classique, à celle de l'équation ($\mathcal{E}'$) sans terme indépendant : il suffit d'ajouter à z_0 la solution de l'équation ($\mathcal{E}'$) prenant au bord les valeurs données, plus les valeurs prises par $-z_0$. On peut même, en ajoutant au second membre de l'équation (49) la solution de $\delta z = 0$ prenant sur $A_1 A_2$ les valeurs données, obtenir une fonction z_0 y prenant également ces valeurs et avoir ainsi à déterminer une solution de l'équation ($\mathcal{E}'$) nulle sur $A_1 A_2$ (en supposant S' limité inférieurement par $A_1 A_2$).

Cela posé, *si les points* A_1 *et* A_2 *coïncident*, ou bien *si la condi-*

[1] Ce théorème est démontré ici avec les hypothèses faites dans le paragraphe 23; on pourrait sans doute le démontrer en supposant simplement que a et c satisfassent aux conditions (A).

[2] En ce qui concerne les singularités possibles des coefficients, on pourrait introduire des considérations analogues à celles qui terminent le paragraphe 16.

tion (Γ) *cesse d'être vérifiée en* A_1 *et* A_2, voyons comment on peut obtenir la solution de ($\mathcal{E}$) nulle sur A_1A_2 et prenant sur C_1 et C_2 les valeurs $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$ nulles en A_1 et A_2. Soit $A_1^n\,A_2^n$ une caractéristique coupant C_1 et C_2 en $A_1^n\,A_2^n$ et tendant vers A_1A_2 quand n tend vers l'infini; soit z_n la solution de ($\mathcal{E}$) égale à Φ_1 et Φ_2 sur C_1 et C_2 et se réduisant sur $A_1^n\,A_2^n$ à la fonction linéaire se raccordant avec Φ_1 et Φ_2 en A_1^n et A_2^n. Les fonctions z_n convergent uniformément vers une fonction limite car, pour toute région $\mathcal{R}$ intérieure à S, on peut choisir n assez grand pour que $|\Phi_1|$ et $|\Phi_2|$ soient inférieurs à ε au-dessous de A_1^n et A_2^n, et que $A_1^n\,A_2^n$ soit située au-dessous de $\mathcal{R}$; et, dans ces conditions, $|z_{n+p} - z_n|$, qui est nul sur $A_1^n\,B_1$, $A_2^n\,B_2$ (*fig.* 1) et inférieur à 2ε sur $A_1^n\,A_2^n$, sera également inférieur à 2ε dans $\mathcal{R}$, quel que soit p, ce qui démontre la proposition. La fonction limite z est, d'après le paragraphe précédent, la solution de ($\mathcal{E}'$) qui prend sur C_1 et C_2 les valeurs données et s'annule sur A_1A_2 : c'est donc la fonction cherchée.

Passons maintenant au cas où la *condition* (Γ) *n'est plus vérifiée en un point* $M(x, y_0)$ *de* C_1 *ou de* C_2; on partagera (C) en deux contours (C′) et (C″) : la caractéristique issue de M limite (C′) supérieurement et (C″) inférieurement. Soit $x_0 y_0$ un point de cette caractéristique : si nous déterminons la solution de l'équation ($\mathcal{E}$) dans la région $S_{y-\varepsilon}$, elle sera inférieure en valeur absolue à un nombre fixe quel que soit ε. Donc, si nous envisageons un contour ($\overline{C}$) bien régulier, intérieur à (C′) et contenant (x_0, y_0) à son intérieur, et par suite enveloppant un demi-cercle de centre (x_0, y_0), les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ qui sont limitées en fonction des valeurs de z sur ($\overline{C}$) (*voir* § 25), resteront bornées dans ce demi-cercle : la formule des accroissements finis montre alors que la différence des valeurs de z en deux points quelconques intérieurs au demi-cercle tend vers zéro avec le rayon de celui-ci, ce qui prouve que $z(x, y)$ a une limite quand le point (x, y) tend vers le point (x_0, y_0). Cette fonction limite est évidemment continue pour $y = y_0$, et nous sommes ramenés pour le contour (C″) au problème précédent [1].

---

[1] Ces considérations permettent également la résolution des problèmes aux limites pour tout contour pouvant être décomposé en une succession de contours (C).

27. Autres problèmes aux limites. — Les problèmes aux limites dans lesquels on se donnerait la relation

$$l_i(y)\frac{\partial z}{\partial y} + m_i(y)z = \chi_i(y) \tag{50}$$

sur C_i, et z ou $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur A_1A_2, peuvent être ramenés, par l'usage d'une *fonction de Green*, à l'étude d'une équation *intégro-différentielle* ou *intégrale;* mais il est à remarquer que, si l'on veut obtenir la forme intégrale, la fonction inconnue sera engagée dans une intégrale double et une intégrale simple.

Nous ne nous occuperons pas de la résolution de ces équations : il est à peine besoin de faire remarquer que le point de vue auquel nous nous sommes placés dans le paragraphe **24** fournirait un moyen expéditif de démontrer l'existence de la solution et d'établir la rapidité de convergence des approximations, sans déterminer la fonction de Green.

Sauf dans le cas où l'on se donne partout sur (C) la valeur de $\frac{\partial z}{\partial x}$, la solution est *unique*, si on la suppose continue, ainsi que sa dérivée par rapport à x, même sur (C) $\left[\text{tout au moins sur les portions de (C) où la condition aux limites fait intervenir } \frac{\partial z}{\partial x}\right]$. En effet, son existence ayant été démontrée, il suffit d'établir que l'équation intégrale homogène obtenue en supposant $z(x, 0) \equiv 0$ et $\chi_i(y) \equiv 0$ n'admet pas de de solution bornée non identiquement nulle, ce qui se voit facilement par le procédé d'itération habituellement employé dans ce genre de questions.

II. — Les équations non linéaires à deux variables.

Nous distinguerons deux cas, suivant que l'équation est ou n'est pas linéaire en $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. Dans le premier cas, l'équation, qui peut alors s'écrire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

b gardant un signe constant, se ramène par un changement de

variables, à la forme

$$(\mathcal{E}_1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad \text{ou} \qquad \delta z = f(x, y, z, p).$$

Dans le second cas, nous supposerons l'équation mise sous la forme

$$(\mathcal{E}_2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad \text{ou} \qquad r = f(x, y, z, p, q).$$

28. L'Équation $\delta z = f(x, y, z, p)$. — Nous ferons sur f les hypothèses suivantes : quand le point (x, y) est dans une région $\mathcal{R}$, et que $|z|$ et $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$ sont inférieurs respectivement à deux nombres N et N', f est une fonction *continue de* x, y, satisfaisant aux conditions (A), et *lipschitzienne en* z, p, c'est-à-dire que

$$(51) \qquad |f(x, y, z', p') - f(x, y, z, p)| < C|z' - z| + A|p' - p|.$$

Nous cherchons à déterminer une solution de cette équation, régulière à l'intérieur d'un contour (C) situé dans $\mathcal{R}$ et *satisfaisant à la condition* (Γ), prenant une succession continue de valeurs sur (C), $\frac{\partial z}{\partial x}$ étant supposée également continue sur (C).

Unicité de la solution. — Pour démontrer l'unicité d'une telle solution, envisageons la différence $z_1 - z_2$ de deux solutions qui prendraient les mêmes valeurs sur (C) : c'est la solution, nulle sur (C), de l'équation

$$\delta z = \varphi(x, y), \qquad \varphi(x, y) = f(x, y, z_1, p_1) - f(x, y, z_2, p_2).$$

Si nous nous reportons aux formules (29') du paragraphe **12** (avec $\gamma = 0$), nous pouvons donner à la solution en question et à sa dérivée par rapport à x la même limitation et écrire, Φ étant le maximum de φ,

$$(52) \qquad |z_1 - z_2| \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial(z_1 - z_2)}{\partial x}\right| < L\Phi B\left(\frac{1}{2}, 1\right) y^{\frac{1}{2}},$$

en supposant que la caractéristique inférieure de (C) soit Ox, cas auquel on peut toujours être ramené. Il résulte alors des formules (51) et (52) que l'on a

$$|\varphi| < L(A + C)\Phi B\left(\frac{1}{2}, 1\right) y^{\frac{1}{2}}.$$

D'où, d'après la formule (29'),

$$|z_1 - z_2| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial(z_1 - z_2)}{\partial x}\right| < \Phi L^2 (A + C) B\left(\frac{1}{2}, 1\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) y$$
$$= \frac{\Phi}{A + C} \frac{[L(A + C)\sqrt{\pi y}]^2}{\Gamma(2)}.$$

On trouverait ainsi de proche en proche

$$|z_1 - z_2| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial(z_1 - z_2)}{\partial x}\right| < \frac{\Phi}{A + C} \frac{[L(A + C)\sqrt{\pi y}]^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)},$$

quel que soit n et, comme ce terme tend vers zéro quand n tend vers l'infini, on a $z_1 \equiv z_2$, ce que nous voulions établir [1].

Équation fonctionnelle du problème. — Elle est évidemment

$$z = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S_1} f\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) G(\xi, \eta; x, y)\, d\xi\, d\eta + \zeta(x, y),$$

ζ étant la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) les valeurs données. Si nous avons obtenu une solution de cette équation continue, ainsi que sa dérivée, dans S, bord compris, elle vérifiera l'équation aux dérivées partielles. Il suffit, pour le voir, de reproduire un raisonnement tout à fait analogue à celui du paragraphe **19**, en tenant compte de la condition (51).

Existence de la solution. — On trouve cette solution par approximations successives, comme limite d'une suite de fonctions $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$; z_0 étant égal à ζ et z_n étant la solution de l'équation

$$\delta z_n = f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}) \tag{53}$$

satisfaisant aux conditions aux limites. Si donc les valeurs de $|z_n|$ et $|p_n|$ restent inférieures respectivement à N et N', on pourra pour-

[1] La démonstration eût été immédiate, si l'on s'était borné à supposer l'existence des dérivées $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial p}$.

suivre les approximations et écrire

$$|z_{n+1}-z_n| < \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_y}\left[A\left|\frac{\partial(z_n-z_{n-1})}{\partial\xi}\right| + C|z_n-z_{n-1}|\right]|G|\,d\xi\,d\eta.$$

ce qui montre que la série $\sum_{n=0}^{\infty}(z_{n+1}-z_n)$ admettra comme série majorante la série majorante qu'on trouverait en déterminant, par la méthode du paragraphe **20**, la solution de l'équation

$$\delta z = A\frac{\partial z}{\partial x} + Cz$$

prenant sur (C) les valeurs données.

On peut d'ailleurs présenter ce calcul sous une forme légèrement différente et écrire, en partant d'une fonction z_0 arbitraire,

$$\delta z_1 = f(x, y, z_0, p_0),$$

z_1 prenant sur (C) les valeurs données, puis

$$(53')\quad \begin{cases} \delta\zeta_1 = f(x, y, z_1, p_1) - f(x, y, z_0, p_0) & [\zeta_1 \text{ nul sur } (C)], \quad z_2 = z_1 + \zeta_1, \\ \delta\zeta_2 = f(x, y, z_2, p_2) - f(x, y, z_1, p_1) & [\zeta_2 \text{ nul sur } (C)], \quad z_3 = z_2 + \zeta_2, \end{cases}$$

et ainsi de suite, ce qui nous donne z sous forme de série [1]

$$z = z_1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n + \ldots.$$

Il faut maintenant nous assurer que les valeurs de z_n et $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ ne sortent pas des intervalles $(-N, +N)$ et $(-N', +N')$. Si cela a lieu pour le rang $n-1$, z_n, qui est la solution de l'équation (53) prenant sur (C) les valeurs données, satisfera aux limitations [formules (29″)]

$$|z_n| < M + Fy, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < M' + \lambda y^{\beta},$$

F étant le maximum de $|f|$ dans le champ de variation de ses arguments, et λ un nombre dépendant de F (linéairement) et des données, M le module maximum des données, M′ le module maximum de

(1) Cette série serait ici majorée par celle qui proviendrait de la résolution de l'équation

$$\delta z = Ap + Cz + F.$$

$\Phi'(x)$ $[\Phi = z(x, 0)]$. Il faudra donc que l'on ait

$$M + Fy < N, \qquad M' + \lambda y^{\beta} < N',$$

$$y < \frac{N - M}{F}, \qquad y < \left(\frac{N' - M'}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\beta}};$$

y devra donc être inférieur à la plus petite de ces deux limitations, soit l. Dans ces conditions, on pourra effectuer le calcul d'approximations dans une *bande horizontale de hauteur l*. Il est possible d'ailleurs que, au cours du calcul, on constate l'existence de la solution dans une région beaucoup plus étendue.

Hypothèses sur les données. — Celles-ci se dégagent d'elles-mêmes de l'analyse qui précède : il suffit tout d'abord que les données soient telles que la solution de $\delta z = 0$, qui correspond aux mêmes conditions aux limites, admette une *dérivée* par rapport à x *aux points du contour* (C). Nous savons que cela est réalisé *si* $\Phi'(x)$ *existe et si* $\Phi_i(y)$ *admet par rapport à* y *un accroissement d'ordre supérieur à* $\frac{1}{2}$. Enfin pour appliquer les formules (29″) nous supposons aussi que $\Phi'(x)$ *admette un accroissement d'ordre non nul.*

Cas particuliers. — Lorsqu'on pourra ramener les données à zéro, il y aura évidemment avantage à le faire, puisqu'il suffira de résoudre les équations successives

$$z_n = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S_y} f\left(\xi, \eta, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}\right) G \, d\xi \, d\eta.$$

Nous avons vu que cette transformation était possible quand X_1, X_2, Φ_1, Φ_2, Φ' sont dérivables [formule (27), § **11**]. Il conviendra alors, dans ce cas, d'effectuer le changement de variables (V) qui transforme (C) en un contour rectangulaire, afin de profiter des facilités de calcul qu'on rencontre dans ce cas.

Autres problèmes aux limites. — Les autres problèmes aux limites, que nous avons indiqués dans l'étude de l'équation linéaire, peuvent également être résolus ici par les mêmes méthodes que nous venons d'employer. Supposons, par exemple, que l'on donne z sur $A_1 A_2$ et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur C_1 et C_2 : nous déterminerons successivement les

solutions des équations (53) satisfaisant à ces conditions, ou bien nous partirons d'une telle fonction z_1, solution de $\delta z_1 = f(x, y, z_0, p_0)$ et nous déterminerons les solutions ζ_n des équations (53'), nulles sur A_1A_2 et ayant leur dérivée nulle sur C_1 et C_2. On voit aisément (*cf.* les notes des § 3 et **12**) que les fonctions z_n et $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ resteront dans les limites fixées, si y vérifie des inégalités de la forme

$$M + L y^{\beta+\frac{1}{2}} < N, \qquad M + L' F y^{\beta} < N',$$

et l'on obtiendra ainsi la hauteur de la bande dans laquelle on sera assuré de l'existence de la solution.

29. L'ÉQUATION $r = f(x, y, z, p, q)$. FORME NORMALE. — Envisageons maintenant l'équation ($\mathcal{E}_2$). Nous supposerons tout d'abord que f est, dans une région $\mathcal{R}$ du plan, une *fonction continue de x et y*, les valeurs de z, p, q restant comprises dans un intervalle $(-N, +N)$, et que, dans ces conditions, f admet *des dérivées continues par rapport à z, p, q, $\frac{\partial f}{\partial q}$ étant essentiellement positive* (ou du moins gardant un signe constant qu'on peut toujours rendre positif).

Dans ces conditions, il ne peut exister deux solutions régulières z_1 et z_2 prenant sur un contour (C) des valeurs données, car on aurait alors

$$(54) \quad r_1 - r_2 = (p_1 - p_2)\frac{\partial f(x, y, z', p', q')}{\partial p'} + (q_1 - q_2)\frac{\partial f}{\partial q'} + (z_1 - z_2)\frac{\partial f}{\partial z'},$$

z', p', q' étant des fonctions intermédiaires entre z_1 et z_2, p_1 et p_2, q_1 et q_2; cette équation en $z_1 - z_2$ admettrait donc une solution nulle sur (C), le coefficient de la dérivée par rapport à y étant positif; nous savons que cela est impossible.

Proposons-nous donc de déterminer la solution dont on donne les valeurs sur (C); il faudra supposer cette solution *régulière, même sur* (C), puisque z, p, q sont engagés dans la fonction f, et il conviendra tout d'abord que les valeurs données, et celles de $\Phi'(x)$ [1],

[1] $\Phi(x)$ est la valeur donnée sur A_1A_2, caractéristique inférieure de (C) *que nous supposons placée sur* Ox; nous employons toujours les mêmes notations pour les données et le contour (*voir* § 5).

appartiennent à l'intervalle $(-N, +N)$. Il faudra de plus que l'on puisse *calculer les valeurs de* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *sur* Ox, c'est-à-dire que l'équation

$$(55)\qquad \Phi''(x) = f[x, 0, \Phi(x), \Phi'(x), \theta(x)], \qquad \left[\theta(x) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y=0}\right]$$

définisse une fonction $\theta(x)$ comprise entre $-N$ et $+N$; cette fonction, si elle existe, sera unique, d'après ce que nous avons dit plus haut. Ses valeurs aux points A_1 et A_2 sont d'ailleurs données par la relation

$$\Phi_i'(0) = \Phi'(x_i)X_i'(0) + \theta(x_i) \qquad (i = 1, 2).$$

et il faudra que ces deux valeurs vérifient l'équation (55).

Nous aurons également, relativement à f, d'autres conditions suffisantes, que la suite du calcul indiquera. Mais, avant de procéder à la recherche de notre solution, il convient de mettre l'équation sous une autre forme, à savoir

$$(\mathcal{E}_2') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = \psi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad \text{ou} \qquad \delta z = \psi(x, y, z, p, q).$$

Nous verrons plus loin que la dérivée $\frac{\partial \psi}{\partial q}$ doit pouvoir être rendue telle qu'elle s'annule sur la caractéristique inférieure Ox du contour (C). Voyons donc comment, dans les cas les plus généraux, nous pourrons transformer l'équation $(\mathcal{E}_2)$ en une équation $(\mathcal{E}_2')$ satisfaisant à cette condition. Faisons le changement de variable

$$(56)\qquad \bar{x} = \int \sqrt{f_q'[x, 0, \Phi(x), \Phi'(x), \theta(x)]}\, dx \qquad (f_q' > 0),$$

θ étant la fonction définie par la relation (55). L'équation $(\mathcal{E}_2)$ devient

$$[\varphi(x)]^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x}^2} + \varphi'(x)\frac{\partial z}{\partial \bar{x}} = f\left[x, y, z, \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}\varphi(x), \frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

$\varphi(x)$ désignant le radical de la formule (56). Posant

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x}^2} = \bar{r}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} = \bar{p},$$

nous pouvons écrire cette équation

$$(\mathcal{E}'_2) \qquad \bar{r} - q = \frac{f(x, y, z, \bar{p}\varphi, q)}{\varphi^2} - q - \frac{p\varphi'}{\varphi^2} = \psi(\bar{x}, y, z, \bar{p}, q);$$

donc

$$\frac{\partial\psi}{\partial q} = \frac{f'_q(x, y, z, \bar{p}\varphi, q) - f'_q[x, 0, \Phi(x), \Phi'(x), \theta(x)]}{f'_q[x, 0, \Phi(x), \Phi'(x), \theta(x)]}.$$

Soit m le minimum de $|f'_q| = \varphi^2$, $\mathfrak{M}$ le maximum de φ : supposons que, dans le champ de variation de ses arguments, $\frac{\partial f}{\partial q}$ soit une fonction *lipschitzienne de* y, z, p, q, c'est-à-dire que

$$\left|\Delta\frac{\partial f}{\partial q}\right| < \mathrm{F}_2[|\Delta y| + |\Delta z| + |\Delta p| + |\Delta q|].$$

Dans ces conditions, en posant $\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi}{d\bar{x}}\varphi(x) = \overline{\Phi}'\varphi$, $\overline{\Phi}'$ sera la valeur de $\bar{p}$ sur Ox et nous pourrons écrire

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial q}\right| < \frac{\mathrm{F}_2}{m}[y + |z - \Phi| + \mathfrak{M}|\bar{p} - \overline{\Phi}'| + |q - \theta|];$$

et cette expression s'annule bien sur Ox.

Le changement de variable utilisé ayant transformé l'équation $(\mathcal{E}_2)$ en l'équation $(\mathcal{E}'_2)$, la relation (55) vérifiée par la fonction θ, valeur de q sur Ox, se transformera dans la relation

$$(57) \qquad \overline{\Phi}''(\bar{x}) = \theta - \psi[\bar{x}, 0, \Phi(\bar{x}), \overline{\Phi}'(\bar{x}), \theta].$$

Nous pouvons maintenant supprimer la notation $\bar{x}$ et envisager l'équation

$$(\mathcal{E}'_2) \qquad \delta z = \psi(x, y, z, p, q), \qquad (|z|, |p|, |q| < \mathrm{N}),$$

z prenant sur Ox la valeur $\Phi(x)$, sur C_i la valeur $\Phi_i(y)$ $(i = 1, 2)$ avec

$$(58) \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial q}\right| < \frac{\mathrm{F}_2}{m}(y + |z - \Phi| + \mathfrak{M}|p - \Phi'| + |q - \theta|) \leq \Psi'';$$

θ étant la fonction de x définie par la relation

$$(57') \qquad \Phi''(x) - \theta = \psi[x, 0, \Phi(x), \Phi'(x), \theta].$$

C'est la forme $(\mathcal{E}'_2)$ ainsi définie, que nous appelons *forme normale*.

30. Détermination de la solution. — Nous utiliserons, comme toujours, la méthode si féconde des approximations successives, en partant de la fonction z_1, prenant sur (C) les valeurs données et solution de l'équation

(59) $$\delta z_1 = \psi[x, y, \Phi(x), \Phi'(x), \theta(x)],$$

$\theta(x)$ étant la fonction définie par la relation (57').

Puis nous poursuivrons les approximations de la façon suivante

(60) $$\left\{\begin{aligned} \delta\zeta_1 &= \psi(x, y, z_1, p_1, q_1) - \psi(x, y, \Phi, \Phi', \theta), & z_2 &= z_1 + \zeta_1, \\ \delta\zeta_2 &= \psi(x, y, z_2, p_2, q_2) - \psi(x, y, z_1, p_1, q_1), & z_3 &= z_2 + \zeta_2, \end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite, les ζ étant nuls sur (C), de sorte que la fonction

$$z_n = z_1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_{n-1}$$

sera la solution de l'équation

$$\delta z_n = \psi(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})$$

prenant sur (C) les valeurs données.

Ce qui constitue *la difficulté* de ces approximations c'est la présence, dans le *second membre de l'équation*

$$\delta\zeta_n = \psi(x, y, z_n, p_n, q_n) - \psi(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}),$$

c'est-à-dire

(61) $$\begin{aligned} \delta\zeta_n = \psi\left(x, y, z_{n-1} + \zeta_{n-1}, p_{n-1} + \frac{\partial\zeta_{n-1}}{\partial x}, q_{n-1} + \frac{\partial\zeta_{n-1}}{\partial y}\right) \\ - \psi(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}), \end{aligned}$$

de la dérivée $\frac{\partial\zeta_{n-1}}{\partial y}$ de la fonction donnée par l'équation précédente. Il nous faudra donc établir la convergence de la série $\sum \frac{\partial\zeta_n}{\partial y}$ et, par conséquent, donner une *limitation de* $\frac{\partial\zeta_n}{\partial y}$. Nous savons le faire, mais en utilisant *les accroissements du second membre* de l'équation (61), ce qui exige que nous nous servions des *accroissements des dérivées* $\frac{\partial\zeta_{n-1}}{\partial y}$ *elles-mêmes*.

Pour simplifier les notations, nous allons appeler ψ_n le second membre

de l'équation (61) et poser

$$\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial x} = \varpi_{n-1}, \qquad \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial y} = \chi_{n-1}.$$

Nous allons former l'accroissement de ψ_n quand y subit un accroissement Δy, et par suite z_{n-1}, ζ_{n-1}, ..., des accroissements correspondants Δz_{n-1}, $\Delta \zeta_{n-1}$, ... Nous aurons donc à appliquer la formule des accroissements finis à une fonction ψ_n de *sept* variables y, z, p, q, ζ, ϖ, χ, *en supprimant les indices*. Désignons par y', z', ..., des quantités comprises entre les valeurs extrêmes de y, z, ..., puis posons

$$\psi^{(1)} = \psi(x, y', z', p', q'), \qquad \psi^{(2)} = \psi(x, y', z' + \zeta', p' + \varpi', q' + \chi').$$

Nous aurons alors

$$\begin{aligned} \Delta\psi = \Delta y\left(\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial y'} - \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial y'}\right) + \Delta z\left(\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z'} - \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z'}\right) + \Delta p\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial p'} - \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial p'}\right) \\ + \Delta q\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial q'} - \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial q'}\right) + \Delta\zeta\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\zeta'} + \Delta\varpi\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\varpi'} + \Delta\chi\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\chi'}. \end{aligned}$$

Nous supposons que les arguments des fonctions ψ restent toujours dans le champ de variation que nous avons défini : dans ces conditions, soit Ψ' le module maximum de $\frac{\partial\psi}{\partial q}$ [formule (58)], Ψ_1 le module maximum de $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial p}$, et faisons l'hypothèse que $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$, $\frac{\partial\psi}{\partial p}$, $\frac{\partial\psi}{\partial q}$ *soient lipschitziennes en* z, p, q, c'est-à-dire que, pour un accroissement Δ' de ces quantités, l'accroissement correspondant des quatre dérivées soit inférieur en valeur absolue à

$$\Psi_2(|\Delta' z| + |\Delta' p| + |\Delta' q|).$$

Nous pourrons alors écrire, en désignant par $|\zeta|$, $|\varpi|$, $|\chi|$ le module maximum de ζ, ϖ, χ, dans l'intervalle Δy, et en rétablissant les indices,

$$\begin{aligned} (62) \qquad |\Delta\psi_n| < \Psi_1(|\Delta\zeta_{n-1}| + |\Delta\varpi_{n-1}|) + \Psi'|\Delta\chi_{n-1}| \\ + \Psi_2\{[\zeta_{n-1}] + [\varpi_{n-1}] + |\chi_{n-1}|\} \\ \times \{|\Delta y| + |\Delta z_{n-1}| + |\Delta p_{n-1}| + |\Delta q_{n-1}|\}. \end{aligned}$$

Cela posé, étudions les termes successifs de la chaîne d'approximations. Nous partons de la fonction z_1, qui est donnée par l'équation (59)

laquelle est de la forme $\delta z = \varphi(x)$, (*voir* § 7*). Supposons que les conditions énoncées dans le paragraphe **7*** concernant les données, le contour et le second membre de l'équation soient ici réalisées. Nous pourrons alors appliquer les formules (22), en supposant $\Delta y > 0$,

$$(62') \qquad |\Delta z_1| < L\,\Delta y, \qquad \left|\Delta \frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < L\,\Delta y^{\gamma+\beta}, \qquad \left|\Delta \frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < L\,\Delta y^{\gamma}.$$

γ étant < 1 et β étant le plus petit des nombres $\frac{1}{2}$ et $1-\gamma$. Si nous désignons par h la hauteur de la bande dans laquelle nous calculerons la solution, nous aurons donc, en remarquant que, d'après la relation (57'), $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ se réduit sur Ox, à la fonction $\theta(x)$,

$$(62'') \quad |z_1 - \Phi(x)| < Lh, \qquad |p_1 - \Phi'(x)| < Lh^{\gamma+\beta}, \qquad |q_1 - \theta(x)| < Lh^{\gamma}.$$

Nous pouvons alors appliquer à ψ_1, second membre de la première équation (60), la formule (62), en posant $n = 1$ et

$$(63) \quad z_0 = \Phi, \quad p_0 = \Phi', \quad q_0 = \theta, \quad \zeta_0 = z_1 - z_0, \quad \varpi_0 = p_1 - p_0, \quad \chi_0 = q_1 - q_0,$$

d'où il résulte que $\Delta\zeta_0$, $\Delta\varpi_0$ et $\Delta\chi_0$ sont égaux respectivement à Δz_1, Δp_1, Δq_1, puisque z_0, p_0, q_0 sont indépendants de y.

Nous voyons alors que ψ_1, qui d'ailleurs s'annule sur Ox, admet, relativement à y, un accroissement d'ordre γ, soit

$$|\Delta\psi_1| < K_1\,\Delta y^{\gamma}.$$

Par suite, d'après les formules (34) du paragraphe **15**,

$$(64) \quad \begin{cases} |\Delta\zeta_1| < \mu K_1\,\Delta y, & |\Delta\varpi_1| < \mu K_1\,\Delta y^{\gamma+\beta}, & |\Delta\chi_1| < \mu K_1\,\Delta y^{\gamma}, \\ |\zeta_1| < \mu K_1 h^{\gamma+1}, & |\varpi_1| < \mu K_1 h^{\gamma+\frac{1}{2}}, & |\chi_1| < \mu K_1 h^{\gamma}, \end{cases}$$

μ étant un coefficient qui ne dépend que des données et du contour : nous pouvons en effet toujours choisir γ tel qu'il soit le même dans les formules (62') et (64).

Supposons que, d'une manière générale, ψ_{n-1} soit nul sur Ox et que l'on ait

$$|\Delta\psi_{n-1}| < K_{n-1}\,\Delta y^{\gamma}$$

et que, de même, les inégalités (64) soient vérifiées pour l'indice $n-1$, c'est-à-dire

$$|\Delta\zeta_{n-1}| < \mu K_{n-1}\,\Delta y, \quad \ldots\ldots; \quad |\zeta_{n-1}| < \mu K_n h^{\gamma+1}, \quad \ldots\ldots$$

Nous pouvons alors écrire

$$(65)\qquad z_{n-1} = z_1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_{n-2}, \qquad S_{n-2} = K_1 + K_2 + \ldots + K_{n-2},$$

$$(66)\qquad \begin{cases} |z_{n-1} - z_1| < \mu S_{n-2} h^{\gamma+1}, \quad |p_{n-1} - p_1| < \mu S_{n-2} h^{\gamma+\frac{1}{2}}, \\ |q_{n-1} - q_1| < \mu S_{n-2} h^{\gamma}. \end{cases}$$

Nous aurons d'après les inégalités (62') et (66)

$$|\Delta z_{n-1}| < (L + \mu S_{n-2})\,\Delta y, \qquad |\Delta p_{n-1}| < (L + \mu S_{n-2})\,\Delta y^{\gamma+\beta},$$
$$|\Delta q_{n-1}| < (L + \mu S_{n-2})\,\Delta y^{\gamma}.$$

Par suite, d'après la formule (62), $\Delta\psi_n$ sera d'ordre γ et l'on pourra écrire

$$|\Delta\psi_n| < K_n\,\Delta y^{\gamma},$$

en posant (et en se rappelant comment est choisi β)

$$(67)\qquad \frac{K_n}{K_{n-1}} = 2\mu\Psi_1\,\Delta y^{\beta} + \Psi''\mu + \mu\Psi_2 h^{\gamma}\left(1 + h^{\frac{1}{2}} + h\right)$$
$$\times\left[\Delta y^{\beta} + (L + \mu S_{n-2})(2\,\Delta y^{\beta} + 1)\right].$$

Alors les inégalités (64) seront vérifiées pour l'indice *n avec le même exposant* γ (*voir* § **15**) et si l'expression (67) est inférieure à 1, la série ΣK_n sera convergente et, par suite, les séries $\Sigma\zeta_{\gamma_i}$, $\Sigma\varpi_{\gamma_i}$, $\Sigma\chi_{\gamma_i}$ le seront également. Il faut donc pouvoir déterminer une limite supérieure de cette expression qui soit égale à un nombre $\rho < 1$: remarquons que, dans ces conditions, on aura

$$S_{n-2} < \frac{K_1}{1-\rho},$$

par suite, d'après les formules (62''), (65) et (66),

$$(68)\qquad |z - \Phi(x)| < |z_1 - \Phi(x)| + |\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots| < L h + \frac{\mu K_1}{1-\rho} h^{\gamma+1}.$$

De même

$$(68')\qquad |p - \Phi'(x)| < L h^{\gamma+\beta} + \frac{\mu K_1}{1-\rho} h^{\gamma+\frac{1}{2}}, \quad |q - \theta(x)| < L h^{\gamma} + \frac{\mu K_1}{1-\rho} h^{\gamma}.$$

Par conséquent, d'après la formule (58), nous pouvons écrire

$$\Psi' = \frac{F_2}{m}\left[h + L(h + \mathfrak{M}\, h^{\gamma+\beta} + h^{\gamma}) + \frac{\mu K_1}{1-\rho}(h^{\gamma+1} + \mathfrak{M}\, h^{\gamma-\frac{1}{2}} + h)\right].$$

En portant cette valeur de Ψ' dans le second membre de (67) et remarquant que $\Delta y < h$, nous aurons donc une limite supérieure de $\frac{K_n}{K_{n-1}}$ et notre objet sera réalisé si cette limite est égale à ρ, car on voit alors, de proche en proche, que $\frac{K_n}{K_{n-1}}$ est $< \rho$ (*voir* la note de la page suivante). Nous obtenons ainsi une relation de la forme

$$(69) \qquad \rho = \frac{\mathcal{A}\, h^{\gamma}}{1-\rho} + \mathcal{B}\, h^{\beta} + \mathcal{C}\, h^{\gamma} \qquad (\rho < 1).$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ étant des polynomes en h.

Or ceci est une équation du second degré qui admet certainement une racine inférieure à 1 si h est assez petit, puisque, pour $h = 0$, elle admet les racines 0 et 1 et que le produit des racines est positif : il y a donc une racine positive infiniment petite avec h.

D'une façon plus précise, on voit que cette équation admet deux racines comprises entre 0 et 1, si

$$\mathcal{B}\, h^{\beta} + \mathcal{C}\, h^{\gamma} < 1 \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{B}\, h^{\beta} + \mathcal{C}\, h^{\gamma} - 1)^2 - 4\mathcal{A}\, h^{\gamma} \geqq 0.$$

Ceci nous donnera pour h une valeur maximum h_1.

Il nous faut maintenant écrire que les valeurs z_n, p_n, q_n restent comprises entre $-N$ et $+N$, ce qui, en vertu des formules (68) et (68'), s'écrit, en désignant par M, M', Θ les modules maximum de Φ, Φ', θ qui doivent être inférieurs à N,

$$(70) \qquad \left\{\begin{aligned} &M + Lh + \frac{\mu K_1}{1-\rho} h^{\gamma+1} < N, \\ &M' + L h^{\gamma+\beta} + \frac{\mu K_1}{1-\rho} h^{\gamma+\frac{1}{2}} < N, \\ &\Theta + L h^{\gamma} + \frac{\mu K_1}{1-\rho} h^{\gamma} < N. \end{aligned}\right.$$

On devra donc prendre une valeur de ρ, racine de l'équation (69) et satisfaisant à ces inégalités. Or celles-ci sont vérifiées pour $h = 0$,

$\rho = 0$; par suite, nous trouverons certainement ainsi pour h une seconde limite supérieure h_2 ([1]).

Nous prendrons pour h la plus petite des valeurs h_1 et h_2.

La convergence absolue et uniforme des séries $z_1 + \Sigma\zeta_n$, $p_1 + \Sigma\varpi_n$, $q_1 + \Sigma\chi_n$, dont les termes sont évidemment des fonctions continues, a lieu alors dans la bande de hauteur h, et nous obtenons ainsi une fonction z, limite des fonctions z_n, qui est la solution cherchée. Le problème est donc résolu.

51. Rappel des hypothèses dans lesquelles la méthode s'applique. — Énumérons ces hypothèses, en remarquant que toutes les hypothèses que nous avons faites dans le paragraphe précédent *sur la fonction* ψ sont également vérifiées *pour la fonction* f.

Fonction $f(x, y, z, p, q)$: continue pour (x, y) dans une région $\mathcal{R}$, $|z|$, $|p|$, $|q|$ inférieurs à N; elle admet, dans ces conditions, les dérivées f'_y, f'_z, f'_p, f'_q, la dernière étant essentiellement positive (ou négative); ces quatre dérivées satisfont à la condition de Lipschitz en z, p, q, et la dérivée f'_q y satisfait également par rapport à y [il suffirait même, comme on le verrait aisément en envisageant Ψ'', que $|\Delta f'_q| < (\mathrm{L})\Delta y^\alpha$, $\alpha < 1$].

Contour : X_1 et X_2 admettent une dérivée première dont l'accroissement est d'ordre non nul.

Données : Φ'_i, Φ', Φ'' existent et admettent des accroissements d'ordre non nul; $|\Phi_i|$, $|\Phi|$, $|\Phi'|$ sont inférieurs à N; z et ses dérivées étant

---

([1]) Il est aisé de voir que, quand bien même les deux valeurs de ρ vérifieraient les inégalités (70), on peut toujours choisir la plus petite ρ' pour majorer la série des K_n. En effet, si la racine ρ' majore les rapports successifs $\frac{K_n}{K_{n-1}}$ jusqu'à une certaine valeur de n, elle majore le rapport suivant, d'après la façon même dont on a obtenu l'équation (69). Or $\frac{K_2}{K_1}$ est inférieur à $\mathcal{A}h^\gamma + \mathcal{B}h^\beta + \mathcal{C}h^\gamma < \rho'$: d'où la conclusion de proche en proche.

connus en A_1 et A_2 (*Cf.* § 11), on a

$$\Phi''(x_i) = f[x_i, 0, \Phi(x_i), \Phi'(x_i), \Phi'_i(0) - \Phi'(x_i) X'_i(0)].$$

Enfin l'équation

$$\Phi''(x) = f[x, 0, \Phi(x), \Phi'(x), \theta]$$

définit une fonction θ, comprise entre $-N$ et $+N$, et admettant, pour un accroissement de x, un accroissement d'ordre non nul.

32. Remarques sur la méthode employée [1]. — I. Au cas où la seconde limitation h_2 de h serait *notablement inférieure* à la première h_1, il peut arriver qu'on obtienne par une autre voie une limitation h'_2 supérieure à h_2. En effet z_n est la solution de

$$\delta z_n = \psi(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}),$$

prenant les valeurs données sur (C) : z_n peut donc se limiter en fonction de l'accroissement du second membre pour un accroissement Δy,

$$|\Delta\psi(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})| < \Psi_1[\Delta y + |\Delta z_{n-1}| + |\Delta p_{n-1}|] + \Psi'\Delta q_{n-1}.$$

On peut alors déterminer une limite supérieure de l'accroissement de chaque second membre, en fonction de celle qui est relative à l'équation précédente et avoir ainsi une limite supérieure de z_n, p_n, q_n permettant d'obtenir, à l'aide des inégalités $|z_n|, |p_n|, |q_n| < N$, une bande plus étendue.

II. Au sujet du *changement de variables* utilisé, remarquons qu'il est *biunivoque* puisque $\frac{d\overline{x}}{dx} > 0$. Mais il est des cas où l'on peut utiliser *un changement de variables plus simple*, et par suite facilitant le calcul.

Si, en effet, nous nous reportons à la formule (67) et si nous n'explicitons pas Ψ', nous pourrons déterminer ρ par une équation de la forme

$$\rho = \frac{\mathcal{A}_1 h^\gamma}{1-\rho} + \mathcal{B}_1 h^\beta + \mathcal{C}_1 h^\gamma + \Psi'\mu,$$

[1] Ces remarques ne sont pas des remarques *essentielles*.

qui admettra deux racines comprises entre o et 1, si, le discriminant étant positif, on a de plus

$$\mathfrak{B} h^{\beta} + \mathfrak{C} h^{\gamma} + \Psi'' \mu < 1.$$

Ceci exige que Ψ'' soit inférieur à $\frac{1}{\mu}$. Les conditions $|z_n|, |p_n|, |q_n| < N$ donneraient aussi des inégalités relatives à Ψ'' : on voit sans peine que, si Ψ'' est inférieur à $\frac{N-M}{\mu}$, $\frac{N-M'}{\mu}$ et $\frac{N-\Theta}{\mu}$, le calcul de la solution sera possible.

Soit $\frac{1}{\mu'}$ la plus petite des limitations ainsi trouvées, nous allons voir que, dans certains cas, le simple changement de variables $\overline{x} = \lambda x$, appliqué à l'équation $(\mathcal{E}_2)$ permet d'arriver au résultat. L'équation proposée devient en effet

$$\overline{r} - q = \frac{f(\overline{x}, y, z, \lambda \overline{p}, q)}{\lambda^2} - q = \psi(\overline{x}, y, z, \overline{p}, q).$$

Or

$$\psi'_q = \frac{f'_q}{\lambda^2}, \qquad \text{donc} \qquad -\frac{1}{\mu'} < \frac{f'_q}{\lambda^2} - 1 < \frac{1}{\mu}.$$

Soient B et b les valeurs extrêmes de f'_q : λ doit être tel que

$$B < \lambda^2\left(1 + \frac{1}{\mu'}\right), \qquad b > \lambda^2\left(1 - \frac{1}{\mu'}\right).$$

Si $\mu' \leqq 1$, la seconde inégalité est vérifiée et la première donne une limite inférieure de λ. Si $\mu' > 1$, on doit avoir

$$\frac{B}{1 + \frac{1}{\mu'}} < \lambda^2 < \frac{b}{1 + \frac{1}{\mu'}},$$

ceci exige

$$\mu' < \frac{B + b}{B - b},$$

ce qui a lieu d'ailleurs si $\mu' \leqq 1$. En définitive *si cette inégalité a lieu*, on peut se passer du changement de variable primitivement indiqué.

III. Nous avons supposé que, dans la suite d'approximations, nous

partions des fonctions z_0, p_0, q_0 définies par les formules (63). Il est clair que cette hypothèse n'est pas indispensable et qu'il suffirait que z_0, p_0, q_0 soient égaux en A_1 et A_2 aux valeurs connues de z, p, q et que, sur Ox, $f(x, 0, z_0, p_0, q_0)$ admette un accroissement d'ordre non nul.

Mais alors le second membre des équations en ζ ne serait nul sur Ox qu'à partir de la *troisième* approximation.

33. Autre méthode pour déterminer la solution. — Dans la méthode que nous avons employée, *nous avons fait jouer à la variable y le rôle principal*, en faisant intervenir les accroissements des fonctions utilisées. Nous pourrions également faire jouer ce rôle à la variable x. Ici encore (*voir* la note sur le contour rectangulaire), il faudra que les fonctions ψ_n s'annulent sur Oy comme une puissance de y. Supposons que nous ayons démontré pour ζ_{n-1} des inégalités de la forme

$$(71)\quad |\Delta\zeta_{n-1}| < \mu K_{n-1}\,\Delta x, \qquad |\Delta\varpi_{n-1}| < \mu K_{n-1}\,\Delta x, \qquad |\Delta\chi_{n-1}| < \mu K_{n-1}\,\Delta x^{\gamma},$$

$$(72)\quad |\zeta_{n-1}| < \mu K_{n-1} y^{1+\frac{\gamma}{2}}, \qquad |\varpi_{n-1}| < \mu K_{n-1} y^{\frac{1+\gamma}{2}}, \qquad |\chi_{n-1}| < \mu K_{n-1} y^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Il résulte de là que ψ_n s'annule sur Ox comme $y^{\frac{\gamma}{2}}$.

En formant $\Delta\psi_n$ absolument par la même méthode que dans le paragraphe **30**, la lettre Δ désignant ici un accroissement par rapport à x, nous pourrons déterminer un nombre K_n tel que les inégalités (71) aient lieu pour l'indice $n-1$. La détermination de la région de convergence se fait par une méthode analogue à celle du paragraphe **30**.

L'application de cette méthode nous conduit aux mêmes conditions que la première relativement aux données et au contour. Pour f, les hypothèses sont les suivantes : $f(x, y, z, p, q)$ *admet des dérivées* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$ *lipschitziennes en* z, p, q, *la dérivée* $\frac{\partial f}{\partial q}$ *admettant en outre un accroissement d'ordre non nul relativement à* y (à cause de Ψ'').

34. Contour rectangulaire. — On peut toujours ramener le cas général à celui d'un contour rectangulaire par le changement de variable

$$(V)\qquad x = \frac{l(x - X_1)}{X_2 - X_1}.$$

Mais la formule

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = l\,\frac{\partial z(x',y)}{\partial x'}\,\frac{X_1X'_2 - X_2X'_1}{(X_2-X_1)^2} + \frac{\partial z(x',y)}{\partial y}\,\frac{l}{X_2-X_1}$$

nous montre que, si nous substituons cette valeur à q dans f, la fonction ainsi obtenue *n'admettra de dérivée par rapport à y que si X''_1 et X''_2 existent*. C'est pourquoi nous n'avons pas démontré les formules (34) du paragraphe **15**, qui trouvent leur emploi dans la *première méthode*, uniquement dans le cas d'un contour rectangulaire.

Dans la *deuxième méthode*, au contraire, qui n'exige relativement à y que la condition $|f'_q| < (L)\Delta y^\alpha$, on peut faire le changement de variable (V). Aussi nous n'avons démontré les formules d'accroissement par rapport à x, qui conduisent aux inégalités (71) et (72), que dans le cas d'un *contour rectangulaire* (*voir* la note).

III. — Équations du type parabolique à plus de deux variables.

Dans cette dernière section, nous allons indiquer rapidement comment on peut étendre les recherches précédentes aux *équations à $n+1$ variables*

$$\delta z \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + cz + f,$$

$$\delta z = f\left(x_i, y, z, \frac{\partial z}{\partial x_i}\right).$$

Pour simplifier l'exposition, nous allons nous placer dans le cas de *trois variables*.

53. Rappel de résultats antérieurement obtenus. — Envisageons l'équation

$$\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x_1, x_2, y),$$

dont l'étude a été faite par M. Levi. Les *plans caractéristiques* sont ici les plans horizontaux $y = \text{const}$.

La *solution fondamentale* est

$$U(H, P) = U(\xi_1, \xi_2, \eta; x_1, x_2, y) = \frac{1}{y-\eta} e^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}{4(y-\eta)}},$$

solution en x_1, x_2, y de l'équation proposée et en ξ_1, ξ_2, η de l'équation adjointe

$$\delta_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Envisageons une surface Σ, coupée par des plans caractéristiques suivant des courbes *fermées*, *sans points doubles*, admettant en chaque point un plan tangent, *jamais horizontal*, et une courbure totale *finie et continue*. Limitons inférieurement cette surface par une section horizontale S_0, que nous pouvons supposer dans le plan des $x_1 x_2$. Appelons *surface* (S) l'ensemble formé par la surface donnée et la section S_0. Soient V_y le volume limité par la surface (S) et par le plan caractéristique d'ordonnée $y > 0$, Γ_y la section par ce plan, Σ_y la portion de Σ située au-dessous de ce plan, S_y l'ensemble de Σ_y et de S_0.

Appliquons alors la formule de Green au volume $V_{y-\varepsilon}$ et à l'intégrale

$$(1) \quad \iiint_{V_{y-\varepsilon}} [u\,\delta z(\xi_1, \xi_2, \eta) - z\,\delta_1 u(\xi_1, \xi_2, \eta)]\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta$$
$$= -\iint_{S_{y-\varepsilon}} \left(u\frac{\partial z}{\partial \xi_1} - z\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right) d\xi_2\, d\eta + \left(u\frac{\partial z}{\partial \xi_2} - z\frac{\partial u}{\partial \xi_2}\right) d\eta\, d\xi_1 - z\,u\, d\xi_1\, d\xi_2$$
$$= \iiint_{V_{y-\varepsilon}} u\, f(\xi_1, \xi_2, \eta)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta,$$

les intégrales de surface étant prises sur le côté intérieur. Remplaçons u par U, puis faisons tendre ε vers zéro; il vient, en désignant par σ l'arc de courbe de la section Γ_η et n la normale *intérieure* à cette courbe

$$\left.\begin{array}{ll} \text{P intérieur}: & 4\pi \\ \text{P sur } \Sigma: & 2\pi \\ \text{P extérieur}: & 0 \end{array}\right\} z(x_1, x_2, y) = -\iint_{S_y} \left(U\frac{\partial z}{\partial n} - z\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma\, d\eta - U z\, d\xi_1\, d\xi_2$$
$$- \iiint_{V_y} U f(\xi_1, \xi_2, \eta)\, dV.$$

36. Les intégrales $\mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{K}$. — Nous obtenons ici des intégrales $\mathfrak{I}_0$,

$\mathfrak{I}$, $\mathfrak{K}$ qui sont, *en appelant* μ *un point de* Σ et en posant

$$r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2,$$

$$\mathfrak{I}_0 = \int\int_{\Sigma_y} \mathrm{U}(\mu, \mathrm{P})\,\varphi(\sigma, \eta)\,d\sigma\,d\eta, \qquad \mathfrak{I} = \int\int_{\Sigma_y} \mathrm{V}(\mu, \mathrm{P})\,\varphi\,d\sigma\,d\eta,$$

$$\mathrm{V} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r}\cos(r, n),$$

r désignant le rayon vecteur *partant du point* $\mathrm{P}(x_1, x_2, y)$. (Nous verrons $\mathfrak{K}$ plus loin.) Les intégrales $\mathfrak{I}_0$ et $\mathfrak{I}$ sont *continues* en tout point de l'espace, sauf peut-être *sur* Σ. En ce qui concerne $\mathfrak{I}_0$, il est facile d'en donner une limitation partout valable. Si, en effet, on compte l'arc σ sur chaque courbe Γ à partir du point où r est minimum, comme la courbure de Γ est toujours finie, on a $r > \mu\sigma$, μ étant indépendant de Γ. Ceci est valable, même si r devient nul. Il résulte de là que, $\overline{\Phi}(\eta)$ étant le module maximum de $\varphi(\sigma, \eta)$ quand σ varie,

$$|\mathfrak{I}_0| < \int_0^y \frac{\overline{\Phi}(\eta)\,d\eta}{y - \eta} \int_0^\infty e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4(y-\eta)}}\,d\sigma.$$

et ceci est une intégrale $\mathrm{I}_{0,1}$ qui est de l'ordre de $\sqrt{y}$. On en conclut que $\mathfrak{I}$ est uniformément convergente (*voir* Goursat, p. 173) et, par suite, est *continue, même sur* Σ.

Quant à $\mathfrak{I}$, on pourra en trouver une limitation par le procédé suivant : il suffit d'étudier le cas où la plus courte distance r_1 de P à Γ_y est inférieure au rayon de courbure minimum des courbes Γ. On décomposera alors l'intégrale double en deux autres, en partageant Σ en deux parties par un plan caractéristique, tel que pour la partie supérieure on ait toujours $r > \frac{r_1}{2}$. En remarquant que

$$d\sigma\cos(r, n) = r\,d\theta \qquad [\theta = (\widehat{r, r_1})]$$

et que, sur la partie supérieure de Σ, on peut déterminer deux membres positifs finis λ et μ tels que

$$\frac{r_1}{2} + \lambda\theta < r < r_1 + \mu\theta,$$

on arrivera sans peine à établir une limitation de la forme

$$(2) \qquad |\mathfrak{I}| < (\mathrm{L})\Phi,$$

valable dans tout domaine fini.

Il résulte de ce qui précède, par le même raisonnement que dans le plan, que $\mathfrak{z}$ est *discontinue* sur Σ, la *formule de discontinuité* étant

$$\lim_{P \to m}(\mathfrak{z}_P - \mathfrak{z}_m) = \pm 4\pi\varphi(m) + \int\int_{\Sigma_y} V(\mu, m)\varphi(\mu)\, d\sigma\, d\eta,$$

m étant, ainsi que μ, un point de Σ et $\varphi(\mu) = \varphi(\sigma, \eta)$.

L'intégrale double de cette formule se limite aisément, en remarquant que, si θ et r_1 sont, pour chaque courbe Γ, l'angle et le rayon vecteur issu de m désignés plus haut et σ l'arc correspondant à θ, on a certainement, λ, μ, ν étant encore des nombres positifs,

$$\lambda\theta < r < \sigma + r_1, \qquad \sigma < \mu\theta, \qquad r_1 < \nu(y - \eta),$$

la dernière inégalité tenant à ce fait que le lieu du pied de r_1 est normal à Γ_y au point m, et que par suite $\dfrac{r_1}{y-\eta}$ tend vers cotang $(\widehat{N, Oy})$ quand η tend verrs y, N étant la normale à Γ_y. Donc

$$\lambda\theta < r < \mu\theta + \nu(y - \eta).$$

Il résulte de là, en utilisant la formule $d\sigma \cos(r, n) = r\,d\theta$, qu'on peut écrire

$$(2') \qquad \left|\int\int_{\Sigma_y} V(\mu, m)\varphi(\sigma, \eta)\, d\sigma\, d\eta\right| < (L)\Phi\, B\left(\frac{1}{2}, \gamma + 1\right) y^{\gamma + \frac{1}{2}}.$$

Si nous posons maintenant

$$\mathfrak{K} = \int\int_{S_0} \frac{1}{y} e^{-\frac{r^2}{4y}} \psi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

$\mathfrak{K}$ tend vers $4\pi\psi(P_0)$ quand le point P tend vers un point P_0 intérieur à S_0. On déduit de là, quand $f = 0$, le calcul de la solution prenant sur (S) des valeurs données en posant

$$z = \bar{z} + z_1,$$

$\bar{z}$ étant exprimé par une intégrale $\mathfrak{K}$ et z_1 par une intégrale $\mathfrak{z}$, portant sur une fonction φ déterminée par une équation intégrale de première espèce pour la résolution de laquelle on utilisera la formule (2')

57. La fonction Z. — Quand f n'est pas identiquement nulle, la

fonction

$$Z(P) = \frac{-1}{4\pi}\iiint_{V_y} U(H, P) f(H)\, d\Omega_H \qquad (d\Omega_H = d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta)$$

est *solution de* $\delta z = f$ sous des conditions analogues aux conditions (A), § 9. Ici encore s'introduisent les paraboles de sommet P et d'axe vertical et l'on trouverait un ensemble de *quatre conditions*, dont une seule suffirait pour l'existence des dérivées $\frac{\partial Z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2}$, vérifiant l'équation $\delta z = f$.

Si

$$|f| < F\eta^\gamma,$$

on a, par l'emploi des coordonnées polaires,

$$|4\pi Z| < F\int_0^y \frac{\eta^\gamma\, d\eta}{y-\eta}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4(y-\eta)}} r\, dr$$

$$< 4\pi F\int_0^y \eta^\gamma\, d\eta \int_0^\infty e^{-s}\, ds = \frac{4\pi F y^{\gamma+1}}{\gamma+1}.$$

D'où

$$(3) \qquad |Z| \leq \frac{F y^{\gamma+1}}{\gamma+1}.$$

De même

$$(4) \qquad \left|\frac{\partial Z}{\partial x_1}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial Z}{\partial x_2}\right| < \sqrt{\pi}\, F\, B\left(\frac{1}{2}, \gamma+1\right) y^{\gamma+\frac{1}{2}}.$$

Quand f est simplement une fonction *intégrable*, les *mêmes conditions d'accroissement* sont réalisées. *Tous ces calculs sont absolument analogues à ceux que nous avons faits dans le plan*. La seule différence est que toutes les formules relatives à la variable x dans le plan se décomposent ici en deux autres, relatives à x_1 et x_2.

38. Dérivées des fonctions $\mathcal{J}_0$ et $\mathcal{J}$ [1]. — Si les intégrales $\mathcal{J}_0$ et $\mathcal{J}$ peuvent être considérées comme continues sur le bord intérieur de Σ,

---

[1] Dans ce paragraphe, nous esquissons seulement les calculs, qui sont toujours du même genre.

il n'en est pas de même des intégrales

$$\frac{\partial \mathfrak{I}_0}{\partial x_i} = \int\int_{\Sigma_y} \frac{\partial \mathrm{U}(\mu, \mathrm{P})}{\partial x_i} \varphi(\mu)\, d\sigma\, d\eta,$$

que nous aurons à envisager plus loin et qui deviennent, en général, infinies au bord. Cependant, si φ est fonction *de* η *seulement*, nous écrirons dans notre intégrale

$$-\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \sigma}\sin\alpha \qquad [\alpha = (\widehat{n, o x_i})].$$

La partie de l'intégrale contenant $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}$ est une intégrale $\mathfrak{I}$. L'autre peut s'écrire

$$-\int_0^y \varphi\, d\eta \int_{\Gamma_\eta} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \sigma}\sin\alpha\, d\sigma = \int_0^y \varphi\, d\eta \int_{\Gamma_\eta} \frac{\mathrm{U}\cos\alpha}{\rho}\, d\sigma,$$

ρ désignant le rayon de courbure de Γ_η : et ceci est une intégrale $\mathfrak{I}_0$. Donc, dans ce cas, $\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x_i}$ est continue sur le bord intérieur de Σ.

Supposons maintenant que sur chaque courbe Γ_η *l'accroissement de* φ *relativement à* σ soit d'ordre non nul. Si μ est le point de Σ vers lequel P tend, on mènera par ce point une ligne, par exemple la trajectoire orthogonale des Γ, qui coupera chaque courbe Γ en un point qu'on prendra comme origine des arcs. On décomposera alors, suivant le procédé habituel, l'intégrale en deux parties dont la première vient d'être étudiée et dont l'autre sera continue au bord.

Envisageons maintenant

$$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x_i} = \int\int_{\Sigma_y} \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial n\, \partial x_i} \varphi(\mu)\, d\sigma\, d\eta;$$

indiquons dans quelles conditions cette intégrale a une limite quand P tend vers le bord. De l'égalité $\frac{\partial}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ et de $\delta_1 \mathrm{U} = 0$ (écrite avec les variables σ, n, η), il résulte que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial n\, \partial x_i} &= -\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n} = -\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial n^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial n\, \partial \sigma}\sin\alpha \\ &= \quad \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \sigma^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial n\, \partial \sigma}\sin\alpha + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \eta}\cos\alpha,\end{aligned}$$

si φ est une *fonction de* η seul, l'intégrale se transforme aisément en

une somme d'intégrales qui ont un sens au bord, à la condition que le rayon de courbure de Γ admette un accroissement d'ordre non nul par rapport à σ.

Dans le cas général, on trouve que si $\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}$ *existe* et admet, *par rapport à* σ, un accroissement *d'ordre non nul*, et si φ admet, *par rapport à* η, un accroissement *d'ordre supérieur à* $\frac{1}{2}$, $\frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial x_i}$ existe au bord.

Les conditions ainsi trouvées sont également celles qui doivent être vérifiées par les données, dans un problème aux limites, pour que $\frac{\partial z_1}{\partial x_i}$ existe sur Σ.

Quant à $\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_i}$, le même procédé utilisé dans le plan montre que, si $\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}$ existe à l'intérieur de S_0, la limite de $\frac{\partial K}{\partial x_i}$ est $4\pi\frac{\partial\psi(x_1, x_2)}{\partial x_i}$ pour tout point (x_1, x_2) intérieur à S_0.

D'où les conditions pour que $\frac{\partial z}{\partial x}$ existe au bord (*voir* § 41).

39. La fonction de Green. — La *fonction de Green* est donnée par la formule

$$G(H, P) = U(H, P) - H(H, P),$$

H étant, relativement à H, la solution de $\delta_1 u = 0$, nulle pour $\eta = y$ et prenant sur Σ la même valeur que U. G est *solution de* $\delta z = 0$ *relativement à* $P(x_1, x_2, y)$ *et de* $\delta_1 u = 0$ *relativement à* $H(\xi_1, \xi_2, \eta)$.

Nous obtiendrons alors, en remplaçant u par G dans la formule (1) et désignant par $d\Omega$ l'élément de volume

$$4\pi Z(P) = \int\int_{S_y} z(\mu)\frac{\partial G(\mu, P)}{\partial n}\,d\sigma\,d\eta + zG\,d\xi_1\,d\xi_2 - \int\int\int_{V_y} G(H, P)f(H)\,d\Omega_H,$$

formule qui nous donne la solution de $\delta z = f$ prenant des valeurs données sur (S) : l'intégrale triple est *la solution nulle sur* (S).

Formons cette fonction de Green : pour cela, posons

$$H(H, P) = \frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma_{y,\eta}} V(H, \mu)\,\varphi(\mu, P)\,d\sigma\,d\tau,$$

$\Sigma_{y,\eta}$ étant la portion de Σ comprise entre les plans caractéristiques

de cote y et $\eta\,(y \geqq \eta)$, μ un point de Σ de cote τ, σ l'arc de la courbe Γ_τ; φ sera donné par la formule

$$U(\mu, P) = -\varphi(\mu, P) + \frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma_{y,\tau}} V(\mu, m)\,\varphi(m, P)\,ds\,dt,$$

m étant un point de $\Sigma_{y,\eta}$ de cote t, et s l'arc de la courbe Γ_t [1].

On démontrerait, comme dans le plan, la formule [form. (13), § 4*]

$$G(\Pi, P) = g\,U(\Pi, P) \qquad (0 \leqq g \leqq 1).$$

Envisageons maintenant $\dfrac{\partial G}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2)$ et pour cela $\dfrac{\partial H}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma_{y,\eta}} V(\Pi, \mu)\,\frac{\partial\varphi(\mu, P)}{\partial x_i}\,d\sigma\,d\tau,$$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ étant donné par l'équation

$$\frac{\partial U(\mu, P)}{\partial x_i} = -\frac{\partial\varphi(\mu, P)}{\partial x_i} + \frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma_{y,\tau}} V(\mu, m)\,\frac{\partial\varphi(m, P)}{\partial x_i}\,d\xi\,dt.$$

Ce que nous nous proposons ici, c'est d'étudier des intégrales de la forme

$$I = \int\int\int_{V_y} \frac{\partial H}{\partial x_i} f(\Pi)\,d\Omega_\Pi = \int\int\int_{V_y} f(\Pi)\,d\Omega_\Pi \int\int_{\Sigma_{y,\eta}} \frac{V(\Pi, \mu)}{4\pi}\,\frac{\partial\varphi(\mu, P)}{\partial x_i}\,d\sigma\,d\tau.$$

Des transformations d'intégrales basées sur la formule de Dirichlet permettent de voir aisément que

$$I = \frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma_{y,0}} \frac{\partial U(\mu, P)}{\partial x_i}\,\Phi(\mu)\,d\sigma\,d\tau,$$

$\Phi(\mu)$ étant la solution de l'équation intégrale

$$\int\int\int_{V_\tau} V(\Pi, \mu) f(\Pi)\,d\Omega_\Pi = -\Phi(\mu) + \frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma_{\tau,0}} V(\mu, m)\,\Phi(m)\,ds\,dt.$$

Il résulte des propriétés d'accroissement du premier membre de cette équation que la fonction Ψ possède un accroissement d'ordre

---

[1] Le signe — dans cette formule tient à ce que, dans $V(\Pi, \mu)$, le rayon vecteur *va de* μ *à* Π.

non nul par rapport à σ et, par suite, l'*intégrale* I *a un sens*, d'après ce que nous avons vu plus haut.

Si f satisfait à la limitation $|f| < F y^\gamma$, on établit sans peine la formule

$$|I| < (L) B\left(\frac{1}{2}, \gamma + 1\right) F y^{\gamma + \frac{1}{2}}.$$

En rapprochant ce résultat des formules (3) et (4), on voit donc que l'on peut écrire

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left| \iiint_{V_y} G(\Pi, P) f(\Pi)\, d\Omega_\Pi \right| \\ \text{et} \\ \left| \iiint_{V_y} \frac{\partial G}{\partial x_i} f\, d\Omega_\Pi \right| < (L) B\left(\frac{1}{2}, \gamma + 1\right) F y^{\gamma + \frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

40. Nous aurons également besoin dans la suite des intégrales

$$\iiint_{V_y} \frac{\partial G}{\partial \xi_i} f(\Pi)\, d\Omega_\Pi.$$

Posons

$$I' = \iiint_{V_y} \frac{\partial H}{\partial \xi_i} f(\Pi)\, d\Omega_\Pi.$$

Cette fois, nous envisageons H comme *solution de* $\delta z = 0$ en x_1, x_2, y :

$$(6) \qquad \frac{\partial H}{\partial \xi_i} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_{y,\eta}} V(\mu, P)\, \psi(\mu, \Pi)\, d\sigma\, d\tau,$$

ψ satisfaisant à l'équation

$$(7) \qquad \frac{\partial U(\Pi, \mu)}{\partial \xi_i} = \psi(\mu, \Pi) + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_{\eta,\tau}} V(m, \mu)\, \psi_i(m, \Pi)\, ds\, dt.$$

Or, si nous remplaçons $\frac{\partial H}{\partial \xi_i}$ par sa valeur (6) dans I', il vient après transformation

$$(8) \qquad \begin{aligned} I' &= \iint_{\Sigma_{y,0}} V(\mu, P)\, d\sigma\, d\tau \iiint_{V_\tau} \psi(\mu, \Pi) f(\Pi)\, d\Omega_\Pi \\ &= \iint_{\Sigma_{y,0}} V(\mu, P)\, \Psi(\mu)\, d\Omega_\Pi. \end{aligned}$$

Si nous faisons subir aux deux membres de l'équation (7) l'opération

$$\iiint_{V_\tau} f(\mathrm{II})\, d\Omega_{\mathrm{II}},$$

nous constatons que la fonction $\Psi(\mu)$ définie par la formule (8) vérifie l'équation intégrale

$$\iiint_{V_\tau} \frac{\partial \mathrm{U}(\mathrm{II}, \mu)}{\partial x_i} f(\mathrm{II})\, d\Omega_{\mathrm{II}} = \Psi(\mu) + \iint_{\Sigma_{\tau,0}} \mathrm{V}(m, \mu)\, \Psi(m)\, ds\, dt.$$

Or, cette équation se résout sans difficulté. Si

$$|f(\mathrm{II})| < \mathrm{F}\eta^\gamma,$$

le premier membre admet la limitation donnée par la formule (4) et, par suite, Ψ admet une limitation analogue; de plus, I' tend vers une valeur bien déterminée sur le bord, puisque nous l'avons exprimé par une intégrale $\mathfrak{J}$, et admet, quel que soit P, une limitation analogue à Ψ, d'après la formule (2). Il résulte de là que

$$(9) \qquad \left| \iiint_{V_y} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_i} f(\mathrm{II})\, d\mathrm{II} \right| < (\mathrm{L})\mathrm{FB}\left(\frac{1}{2}, \gamma + 1\right) y^{\gamma + \frac{1}{2}}.$$

Quand le point P vient sur Σ, $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial \xi}$ tend vers zéro, si II est à l'intérieur de (S). Or, on peut tracer à l'intérieur de (S) une surface voisine (S′) telle que l'intégrale I′, étendue au volume compris entre (S) et (S′), soit aussi petite qu'on le veut. On déduit de là que *l'intégrale* (I) *elle-même tend vers zéro quand* P *vient sur* Σ.

41. Problèmes aux limites relatifs aux équations générales du type parabolique elliptique. — Envisageons l'équation

$$\mathrm{A}_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2\mathrm{B} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\, \partial x_2} + \mathrm{A}_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$
$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 - \mathrm{B}^2 > 0, \qquad b < 0.$$

Il résulte de la théorie des équations elliptiques que l'on peut, par un changement de variables, rendre A_1 et A_2 égaux à $-b$ et B nul.

On obtiendra ainsi l'équation

$$(\mathcal{E}) \qquad \delta z = a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + cz + f.$$

L'*unicité* d'une solution prenant des valeurs données sur une surface (S) se démontre sans difficulté par le même procédé que dans le plan.

Cette solution vérifie l'équation suivante :

$$(e) \quad z(x_1, x_2, y) = -\frac{1}{4\pi} \int\int\int_{V_y} \left(a_1 \frac{\partial z}{\partial \xi_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial \xi_2} + cz \right) G \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\eta + \zeta(x_1, x_2, y),$$

la parenthèse étant fonction de (ξ_1, ξ_2, η), et ζ étant la solution de $\delta z = f$ prenant sur (S) les valeurs données.

Supposons que la fonction donnée sur (S) admette sur chaque courbe Γ une *dérivée par rapport à σ*, pourvue d'un accroissement *d'ordre non nul*, qu'elle possède *par rapport à y* un accroissement *d'ordre supérieur à* $\frac{1}{2}$ et qu'elle soit *dérivable dans* S_0 : alors les dérivées $\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x_2}$ existent au bord.

Il en résulte alors, d'après les formules (5), que la méthode des approximations successives nous donnera z, $\frac{\partial z}{\partial x_1}$, $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ au moyen de séries *absolument et uniformément convergentes*, vérifiant l'équation (e). On passe de là à l'équation $(\mathcal{E})$ par la même méthode que dans le plan.

Cette résolution du problème aux limites proposé, par le moyen d'une équation intégro-différentielle, permet de traiter le même problème pour l'équation $\delta z = f\left(x_1, x_2, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)$, f étant *lipschitzienne* en z, $\frac{\partial z}{\partial x_1}$, $\frac{\partial z}{\partial x_2}$: la détermination de la hauteur du domaine dans lequel on peut opérer se fait, comme dans le plan, au moyen de formules toutes semblables. Le calcul de la solution est aussi analogue. Nous n'insisterons donc pas sur ce point.

42. Méthode spéciale a l'équation linéaire. — On peut aussi, comme dans le plan, transformer l'équation (e) en équation inté-

grale

$$(e') \quad z(x_1, x_2, y) = \frac{1}{4\pi} \int\int\int_{V_y} \left(\frac{\partial a_1 G}{\partial \xi_1} + \frac{\partial a_2 G}{\partial \xi_2} - cG \right) z(\xi_1, \xi_2, \eta)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta + \zeta.$$

Quand la chose est possible, c'est-à-dire *quand a_1 et a_2 admettent une dérivée par rapport à x_1 et à x_2 respectivement*, c'est sous cette forme qu'il convient de traiter le problème, car il n'exige *sur les données* d'autre hypothèse que celle *de la continuité* et il ne nécessite que l'étude de $\frac{\partial G}{\partial \xi_i}$, qui se fait très simplement, comme nous l'avons vu dans le paragraphe **40**. La formule (9) fournit immédiatement une série de comparaison pour calculer z et l'analyse de cette équation est dès lors entièrement analogue à celle de l'équation (e') dans le plan. Ici les conditions sont donc : $\frac{\partial a_1}{\partial x_1}$ *et* $\frac{\partial a_2}{\partial x_2}$ *existent* [et, par suite, a_1 et a_2 satisfont aux conditions (A)], *c et f satisfaisant aux conditions* (A), *les coefficients et les données sont continus.*

Citons également, sans qu'il soit besoin d'insister, les généralisations relatives *aux séries de solutions* et au cas où S_0 *se réduit à un point*, puis à celui dans lequel Σ admet, en certains points, ou bien le long de certaines courbes Γ, un *plan tangent horizontal*. Les mêmes résultats que dans le plan subsistent avec de simples modifications de langage, qu'il est inutile de reproduire ici.

CHAPITRE III.

SUR LA NATURE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DU TYPE PARABOLIQUE.

Si nous envisageons l'équation de la chaleur

$$(1) \qquad \delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

toute solution *régulière* dans une région $\mathcal{R}$ est une *fonction analytique de x* dans cette région : c'est-à-dire que, si $P(x_0, y)$ est un point de $\mathcal{R}$, $z(x, y)$ sera développable suivant une série entière en $(x - x_0)$ et, par suite, sera holomorphe dans un cercle du plan de la variable complexe x, ayant pour centre le point $(x_0, 0)$.

Cette propriété a été étendue par M. Levi aux solutions régulières de l'équation $\delta z = f(x, y)$, quand f est elle-même une fonction analytique de x dans la région $\mathcal{R}$.

Si nous revenons à la solution z de $\delta z = 0$, nous voyons qu'on pourra déterminer deux nombres M et ρ tels que, pour toutes les valeurs de y appartenant à un intervalle (α, β), on puisse écrire

$$(2) \qquad \left|\frac{\partial^n z}{\partial x_0^n}\right| < \frac{M n!}{\rho^n},$$

et, comme l'équation (1) entraîne $\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^{2n}}$, on aura donc, pour toutes les valeurs y de l'intervalle (α, β), en posant $\rho^2 = R$,

$$\left|\frac{\partial^n z(x_0, y)}{\partial y^n}\right| < \frac{M(2n)!}{R^n}.$$

La limitation ainsi trouvée a conduit M. Holmgren à envisager une classe de fonctions $\mathcal{H}$ de la variable y satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elles sont *indéfiniment dérivables* dans l'intervalle (α, β);

2° Leurs dérivées satisfont à la *limitation* $\left|\frac{d^n \mathcal{H}}{dy^n}\right| < \frac{M(2n)!}{R^n}$, M et R étant indépendants de y.

Nous désignerons une telle fonction sous le nom de *fonction* $\mathcal{H}$ (ou *d'espèce* $\mathcal{H}$) ou encore *fonction* $\mathcal{H}_R$, lorsque nous voudrons spécifier le nombre R qui figure dans l'inégalité caractéristique.

Nous pouvons donc dire que *toute solution de* $\delta z = 0$, *régulière dans* $\mathcal{R}$, *est une fonction analytique de* x *et une fonction* $\mathcal{H}$ *de* y.

Ce sont les résultats précédents que nous proposons de généraliser et de compléter dans le Chapitre actuel.

I. — L'analyticité par rapport à x.

Pour démontrer qu'une fonction est analytique on peut, soit l'étudier *dans le champ complexe*, soit démontrer *dans le champ réel* des inégalités de la forme (2). C'est la première méthode que nous allons employer tout d'abord.

45. Analyticité des intégrales $\mathfrak{J}_0$, $\mathfrak{J}$, $\mathcal{K}$. — Les intégrales $\mathfrak{J}_0$, $\mathfrak{J}$, $\mathcal{K}$ sont *des fonctions analytiques de* x dans toute région ne contenant pas la courbe $x = X(y)$ ou le segment A_1A_2 (¹). Si donc nous appliquons la formule fondamentale (α) à un contour (C) rectangulaire situé dans la région $\mathcal{R}$, où la solution z de $\delta z = 0$ est régulière, nous déduisons de là l'analyticité de z par rapport à x.

Portons notre attention sur le domaine du plan de la variable complexe x, dans lequel les intégrales (prises le long de Oy),

$$\mathfrak{J}_0=\int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\, e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}\varphi(\eta)\,d\eta, \qquad \mathfrak{J}=\int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}\varphi(\eta)\,d\eta,$$

sont holomorphes (²). Si nous posons $x = x_1 + ix_2$, $\mathfrak{J}_0$ devient

$$\mathfrak{J}_0(x_1, x_2; y)=\int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\, e^{-\frac{x_1^2-x_2^2+2ix_1x_2}{4(y-\eta)}}\varphi(\eta)\,d\eta,$$

ce qui nous montre que $\mathfrak{J}_0$ sera holomorphe *dans les deux angles formés par les bissectrices* OR, OR′ des angles des axes Ox_1 et Ox_2, et contenant Ox_1 (*fig.* 9), car on a alors $x_1^2 > x_2^2$.

Le rayon de convergence de $\mathfrak{J}_0$ autour d'un point $(x_0, 0)$ du plan de x sera donc $\frac{|x_0|}{\sqrt{2}}$. La même conclusion s'applique à $\mathfrak{J}$.

Quant à $\mathcal{K}$, c'est évidemment une fonction entière de x : la formule (α) nous montre donc que la fonction z est, en chaque point P de S une fonction analytique par rapport à x, le rayon de convergence étant égal à $\frac{d}{\sqrt{2}}$, si *d est la plus courte distance de* P *aux côtés verticaux du rectangle* (³).

(¹) *Voir* Goursat, p. 304 sqq.

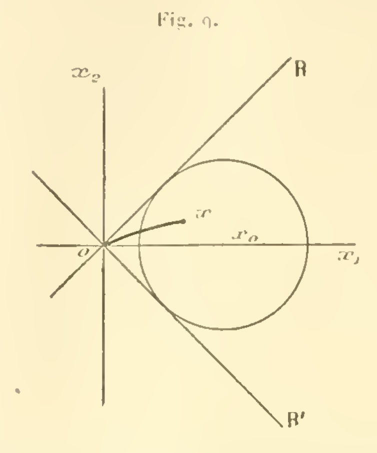
(²) Ce que nous allons dire s'appliquerait aussi aux intégrales (q entier > 0)

$$\int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\, e^{-\frac{x^q}{y-\eta}}\varphi(\eta)\,d\eta \quad \text{et} \quad \int_0^y \frac{x^{q-1}}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}}\, e^{-\frac{x^q}{y-\eta}}\varphi(\eta)\,d\eta.$$

(³) Lorsque le contour n'est pas rectangulaire, les intégrales $\mathfrak{J}_0$ et $\mathfrak{J}$ sont relatives à des arcs de courbe $x = X(y)$ et le rayon de convergence est $\frac{|x - X(y)|}{\sqrt{2}}$: le domaine où z est holomorphe est alors limité par l'enveloppe des cercles de centre $(x, 0)$ et de rayon $\frac{|x - X(y)|}{\sqrt{2}}$: c'est un carré qui varie avec y.

Nous avons vu que, quand x est réel et tend vers zéro, l'intégrale $\mathfrak{I}$ tend vers $\pm 2\sqrt{\pi}\,\varphi(y)$, suivant que x est positif ou négatif. Voyons si cette propriété *subsiste quand x est complexe* : supposons, par

Fig. 9.



exemple, que x tende vers zéro en restant dans l'angle ROR' : nous pouvons écrire

$$\mathfrak{I}(x, y) = \varphi(y)\int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}\, d\eta$$
$$+\int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}\,[\varphi(\eta)-\varphi(y)]\, d\eta.$$

Le changement de variable $x = 2s\sqrt{y-\eta}$ transforme la première intégrale en

$$4\varphi(y)\int_{\frac{x}{2\sqrt{y}}}^{\infty} e^{-s^2}\, ds,$$

prise suivant un chemin dont la direction asymptotique est celle qui correspond à l'argument de x. Si donc x tend vers zéro suivant un chemin situé dans l'angle ROR' ([1]) la valeur de cette intégrale tendra comme on le sait vers $2\sqrt{\pi}\,\varphi(y)$.

Si le chemin de (x) n'est pas tangent aux bissectrices, dans la seconde

---

([1]) Ce chemin peut, d'ailleurs, être tangent à OR ou OR' ou même coïncider avec ces deux droites; mais dans le texte nous le supposons non tangent. On peut montrer que $\mathfrak{I}(x, y)$ est continue (vers la droite) en tout point de ROR'.

intégrale, on a $x_1^2 - x_2^2 > \lambda^2 |x|^2$, λ étant un nombre fixe, et, par suite,

$$\left| x e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \right| < |x| e^{-\frac{\lambda^2 |x|^2}{4(y-\eta)}}.$$

L'intégrale admet donc, comme limitation,

$$\int_0^y \frac{|x|}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\lambda^2 |x|^2}{4(y-\eta)}} |\varphi(\eta) - \varphi(y)| \, d\eta,$$

et ceci tend vers zéro quand $|x|$ tend vers zéro, φ étant continue, puisque c'est une intégrale du type $\mathfrak{I}$ dans le domaine réel. En définitive, dans les conditions où nous nous sommes placés, *la formule de discontinuité des intégrales $\mathfrak{I}$ est encore valable;* si $\varphi(0) = 0$, $\mathfrak{I}(x, y)$ tend vers zéro avec x et y.

On démontrerait de même, sans difficulté, que l'intégrale

$$\mathcal{K}(x, y) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} \psi(\xi) \, d\xi,$$

tend vers $2\sqrt{\pi}\psi(x_0)$ lorsque y tend vers zéro et que x tend vers un point x_0 *intérieur* à (a_1, a_2), par *valeurs complexes* $x_2 + ix_2$, telles que $\frac{x_2^2}{y}$ tende vers zéro.

Les propriétés précédentes s'appliquent à une solution de $\delta z = f$, qui est une somme d'intégrales $\mathfrak{I}_0$ et $\mathfrak{I}$.

44. Analyticité de l'intégrale Z. — L'analyticité de Z [formule (23), § 8], *quand f est analytique en x*, démontre celle des solutions régulières de $\delta z = f$. Cette propriété a été établie par M. Levi (p. 239) : nous inspirant du même point de vue, nous allons, tout d'abord, donner une démonstration plus simple basée sur les propriétés des intégrales multiples de fonctions de plusieurs variables complexes.

Nous supposons le contour (C) rectangulaire, car c'est un contour de ce genre que nous envisagerons toujours dans la suite, mais le raisonnement que nous allons faire n'exige nullement cette hypothèse. Soit CABD ce contour (nous modifions ici nos notations antérieures).

L'intégrale $(0 < \varepsilon < y)$

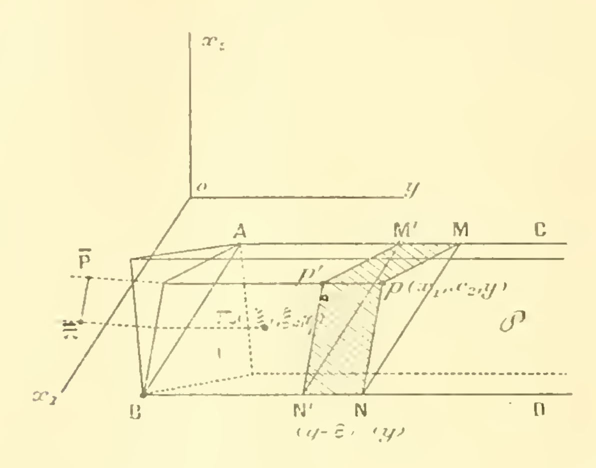
$$-2\sqrt{\pi} Z_\varepsilon = \iint_{S_{y-\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = \iint_{S_{y-\varepsilon}} \mathrm{U} f \, d\xi \, d\eta$$

est une fonction analytique de x, pour des valeurs données de y et ε. Puisque U et f sont analytiques en ξ, cette intégrale conservera la même valeur dans le domaine complexe à trois dimensions x_1, x_2, y, si on l'étend à une surface Σ passant par le contour AB N'M'. Nous pouvons, en particulier, choisir une surface passant par le point $p(x_1, x_2, y)$: soit $\pi(\xi_1, \xi_2, \eta)$ un point quelconque de Σ. Or, nous avons

$$\left| e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} \right| = e^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}{4(y-\eta)}}.$$

L'exposant de e dans cette formule sera donc négatif si la pente

Fig. 10.



de la droite $\overline{\text{P}}\overline{\pi}$, projection de $p\pi$ sur le plan de la variable x, est comprise entre -1 et $+1$ (*fig.* 10). Supposons cette condition vérifiée (au moins pour η voisin de y).

Remarquons que tout ceci n'exige nullement que f soit *analytique sur le contour* (C) : il suffit que f satisfasse aux conditions de Cauchy *à l'intérieur de* Σ et soit *continue sur* Σ *et vers l'intérieur de* Σ : au reste, pour l'objet qui nous occupe, il nous suffit de remarquer que f peut simplement être continue sur (C).

Traçons Σ *intérieurement* au domaine $\mathfrak{D}$, commun au domaine d'analyticité de f et au prisme $\mathfrak{P}$ formé par les quatre plans menés par AB, CD, et inclinés à 45° sur le plan $x_1 O y$, ce prisme étant limité dans un sens par la section droite passant par AB : la surface Σ pourra être

constituée, par exemple, par un prisme (ou un cylindre) intérieur à $\mathfrak{D}$, ayant comme arêtes AB et CD, et comme base les sections droites AB, M'N'. L'intégrale envisagée ne contiendra pas de termes relatifs à ces deux sections droites, car les éléments $d\xi_1\, d\eta$ et $d\eta\, d\xi_2$ y figurent seuls. De plus, d'après la façon même dont nous avons choisi Σ, on a

$$|x_2 - \xi_2| > \lambda\,|x_1 - \xi_1| \qquad \text{et} \qquad |d\eta\, d\xi_2| < \mu\,|d\xi_1\, d\eta|,$$

λ et μ étant des nombres fixes, avec $0 < \lambda < 1$ ([1]). Il résulte de là que

$$\left|e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}\right| < e^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2}{4(y-\eta)}(1-\lambda^2)},$$

et que le module de l'intégrale $\int\!\!\int \mathrm{U} f\, d\xi\, d\eta$, *étendue dans le domaine complexe* à la surface ombrée, est *à un facteur constant près inférieur à l'intégrale*

$$\mathrm{F}\int\!\!\int \mathrm{U}(\xi_1, \eta; x_1, y)\, d\xi_1\, d\eta,$$

étendue au rectangle M'N'NM, F étant le maximum de $|f|$ dans $\mathfrak{D}$: l'intégrale de surface a donc un sens et tend vers zéro avec ε, et cela uniformément, quelle que soit la position de p à l'intérieur du domaine $\mathfrak{D}$ ([2]).

Ceci prouve que, lorsque ε tend vers zéro, les fonctions Z_ε, qui sont analytiques en x, tendent vers une fonction limite Z, qui est elle-même analytique en x à l'intérieur de $\mathfrak{D}$, et il suffit, pour cela, que f soit *fonction analytique de x à l'intérieur de $\mathfrak{D}$ et continue sur* (C).

([1]) Dans le cas où Σ est un prisme, on a $d\eta\, d\xi_2 = \mu\, d\xi_1\, d\eta$, μ étant fixe.

([2]) Si le contour (C) est quelconque on trouve, au lieu d'un prisme ou d'un cylindre, la surface engendrée par des droites à 45°, parallèles au plan $x_1 O x_2$ et s'appuyant sur (C). Si les points du plan vertical AB, non situés sur la droite AB, n'appartiennent pas au domaine d'analyticité de f, il faudra limiter le prisme, passant par p, par une section oblique contenant AB. Au lieu de ce prisme, on peut aussi prendre pour surface Σ le cône de sommet p et de base MABN. En effet, les intégrales étendues aux triangles pAM et pBN ont été envisagées dans le texte reste donc celle qui est relative à pAB. Or elle prête aux mêmes remarques que les deux autres, si p reste à droite du plan vertical AB, car, dans le plan pAB, le module de l'exponentielle est égal à $e^{m^2(y-\eta)-\frac{(x_1-\xi_1)^2}{4(y-\eta)}}$, $2m$ étant la pente du plan pAB.

La même démonstration prouverait l'*analyticité de* $\frac{\partial Z}{\partial x}$.

Il résulte de là que toute *solution* z *de* $\delta z = f$ *prenant sur* (C) *des valeurs continues et dérivables est, ainsi que* $\frac{\partial z}{\partial x}$, *analytique en* x *à l'intérieur de* ω : en effet, cette solution et sa dérivée peuvent être représentées par des intégrales des types $\mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{K}$, Z, $\frac{\partial Z}{\partial x}$. De plus, z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sont, dans le domaine ω, continus aux points du contour (C) [1].

45. Analyticité des solutions de l'équation linéaire. — Soit z une solution de l'équation

$$\delta z = a\frac{\partial z}{\partial x} + cz + f,$$

régulière dans une région $\mathfrak{R}$ où les coefficients a, c, f sont des fonctions *analytique de* x.

Si nous appliquons la formule fondamentale à cette solution et au contour rectangulaire MABN situé dans $\mathfrak{R}$, nous voyons que z est la solution d'une équation de la forme

$$z(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_y}\left[a(\xi,\eta)\frac{\partial z}{\partial \xi} + c(\xi,\eta)z\right]U(\xi,\eta;x,y)\,d\xi\,d\eta + \bar{z}(x,y),$$

$\bar{z}$ étant la solution de $\delta z = f$ prenant sur le contour une valeur égale à la différence des valeurs de z et de l'intégrale double : $\bar{z}$ et $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ sont donc continus sur le contour [2] et analytiques en x à l'intérieur de ω.

Supposant $\bar{z}$ connu, nous pouvons calculer z par la méthode des approximations successives qui nous donnera pour z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ une série de comparaison entière en $\sqrt{y}$. *Ce calcul est valable dans le domaine complexe*, puisque, d'après le paragraphe précédent, les intégrales doubles dans le domaine complexe sont comparables aux intégrales étendues

---

[1] ω étant choisi tel que $x^{\frac{2}{3}}$ soit infiniment petit par rapport à $y - y_1$, quand p tend vers AB, d'ordonnée y_1 (à cause des intégrales $\mathfrak{K}$) : ceci aura lieu si la pente de pAB reste finie.

[2] L'intégrale double prend, en effet, sur le contour, une succession de valeurs dérivable puisque $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial c}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, existent dans $\mathfrak{R}$.

aux domaines réels S_y. Il suffira de *multiplier* la série majorante du domaine réel par un *facteur convenable* pour avoir une majoration valable dans le domaine $\mathfrak{D}$ et sur (C), et chaque terme z_n de la série ainsi formée est *analytique dans* $\mathfrak{D}$ *et continue sur* (C), $\mathfrak{D}$ étant un domaine dont la frontière contient (C), qui est commun à $\mathfrak{T}$ et au domaine d'analyticité des coefficients a, c, f, et choisi tel que la pente de pAB reste finie (*cf.* notes du § 44). Nous obtenons donc une série *uniformément convergente dans* $\mathfrak{D}$ *et sur* (C) et dont la somme définit une fonction analytique de x à l'intérieur de $\mathfrak{D}$ qui coïncide avec la solution z quand x est réel.

Cette conclusion s'étend évidemment à l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

quand b garde un signe constant et est analytique en x dans $\mathfrak{R}$, puisque le changement de variable qui ramène cette équation à l'équation ($\mathcal{E}$) est analytique en x.

Nous obtenons ainsi ce THÉORÈME : *Quand les coefficients de l'équation linéaire* (E) *sont des fonctions continues analytiques par rapport à* x *dans une région* $\mathfrak{R}$, *toute solution régulière dans cette région est également analytique en* x.

46. ÉQUATIONS NON LINÉAIRES. — Faisons tout d'abord une *remarque capitale*. Toutes les *formules de limitation* que nous avons données dans le premier Chapitre et dans la Note relative au *contour rectangulaire* sont aussi *exactes dans le domaine complexe*. Ceci résulte des remarques que nous avons faites sur la limitation du facteur exponentiel qui figure dans les intégrales simples ou doubles que nous avons rencontrées jusqu'ici : ces intégrales sont, dans le domaine complexe, comparables aux intégrales analogues prises dans le domaine réel. De plus, la formule des accroissements finis est valable pour deux points quelconques intérieurs à $\mathfrak{D}$ ou sur (C).

Cela posé, envisageons l'équation

$$\delta z = f(x, y, z, p)$$

dans une région $\mathfrak{R}$ du plan où f est une fonction *analytique de* x, z, p, quand $|z|$ et $|p|$ restent inférieurs à N. Soit z une solution régulière

dans $\mathcal{R}$ et prenons un contour (C) rectangulaire intérieur à $\mathcal{R}$: z est la solution de l'équation

$$z = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_y} f\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) U\, d\xi\, d\eta + \bar{z},$$

$\bar{z}$ étant défini comme dans le paragraphe précédent. La résolution de cette équation par approximations successives nous donnera donc une suite de fonctions z_n, p_n, de modules inférieurs à N, si la hauteur du rectangle est assez petite. La limitation de ces fonctions et de leurs différences successives dans le domaine complexe ne différera des limitations établies dans le domaine réel que par l'introduction d'un *facteur constant*.

Il résulte de là que nous obtiendrons z comme limite d'une suite *uniformément convergente* de fonctions analytiques et que, par suite, z sera fonction analytique de x.

Soit maintenant l'équation

$$r = f(x, y, z, p, q) \qquad (f'_q > 0),$$

f étant *continue en y et analytique en x, z, p, q*, toujours dans les mêmes conditions que précédemment. Si nous employons la méthode suivie dans le paragraphe **30** pour calculer la solution au moyen de ses valeurs sur le contour rectangulaire (C), il nous faut faire des hypothèses où intervient y. La méthode indiquée au paragraphe **33** suppose au contraire des conditions relatives aux dérivées par rapport à x, qui sont ici évidemment réalisées d'après l'analyticité de f; mais il subsiste encore la condition que, pour un accroissement de y, f'_q admette un accroissement d'ordre non nul.

Il est aisé de voir que, dans le cas actuel, nous pouvons faire *tomber cette hypothèse :* en effet, au lieu de faire le changement de variable (56) (§ **29**), posons $\bar{y} = \int \varphi(y)dy$, avec

$$\varphi(y) = \frac{1}{f'_q[\alpha, y, z(\alpha, y), p(\alpha, y), q(\alpha, y)]},$$

α désignant l'abscisse du point A : nous pouvons faire ici ce changement de variables parce que nous connaissons *d'avance* les valeurs de la solution et de ses dérivées.

Nous obtenons alors, en posant $\frac{\partial z}{\partial y} = \overline{q} = \frac{q}{\varphi}$,

$$r - \overline{q} = f(x, y, z, p, q) - \overline{q} = \psi(x, \overline{y}, z, p, \overline{q}),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \overline{q}} = \varphi \frac{\partial f}{\partial q} - 1 = \frac{f'_q(x, y, z, p, q) - f'_q[\alpha, y, z(\alpha, y), p(\alpha, y), q(\alpha, y)]}{f'_q(\alpha \ldots)},$$

et l'on déduit de l'analyticité de f que, $\mathfrak{M}$ et m étant le maximum et le minimum de $f'_q(\alpha \ldots)$, on a

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial \overline{q}}\right| < \frac{F_2}{m}[|x - \alpha| + |z - z(\alpha, y)| + |p - p(\alpha, y)| + \mathfrak{M}|q - q(\alpha, y)|] \leqq \Psi'.$$

Or, il résulte des formules (71) que, de même que dans le paragraphe **30** nous avons pu prendre la hauteur h assez petite pour assurer la convergence des approximations grâce à la limitation de Ψ', de même ici nous pourrons prendre la largeur du rectangle assez faible pour réaliser le même objet.

Les calculs sont entièrement semblables à ceux qui ont été faits dans le paragraphe **30** : il suffira de prendre comme première approximation une fonction analytique de x telle que z_0, p_0, q_0 coïncident avec z, p, q sur AB, ce qui est toujours possible; *x jouera alors le rôle que jouait y, et* AC *le rôle que jouait* AB (*fig.* 10).

Toutes les formules de limitation s'appliquant dans le domaine complexe, nous déterminerons encore ici la fonction z comme limite d'une suite *uniformément convergente* de fonctions analytiques, sans hypothèse (autre que celle de la continuité) concernant la nature de f relativement à y.

Les résultats de ce paragraphe peuvent se résumer dans la PROPOSITION SUIVANTE : *Toute solution de l'équation $r = f(x, y, z, p, q)$ régulière dans une région $\mathcal{R}$ du plan est une fonction analytique de x, si f est, dans la région $\mathcal{R}$ et pour les valeurs qu'y prennent z, p, q, une fonction analytique de x, z, p, q, continue en y, la dérivée f'_q gardant un signe constant.*

En effet, si z_A, p_A, q_A sont les valeurs de z, p, q en un point $A(x_0, y_0)$, f est holomorphe en x, z, p, q, dans un certain domaine défini par $|x - x_0|$, $|z - z_A|$, $|p - p_A|$, $|q - q_A| < \rho$, et l'on pourra prendre un contour rectangulaire assez petit pour que, en posant

$$z = z_A + p_A(x - x_0) + q_A(y - y_0) + \zeta.$$

la détermination de ζ soit possible à l'intérieur du contour, puisque alors les valeurs prises par ζ (et ses dérivées) sur le contour peuvent être rendues aussi petites qu'on veut.

La solution ainsi formée coïncidera avec la proposée d'après l'équation (54) du paragraphe **29**, en remarquant que dans cette équation, $\frac{\partial f}{\partial z'}$, $\frac{\partial f}{\partial p'}$, $\frac{\partial f}{\partial q'}$ ont une limitation indépendante du choix du contour ([1]).

47. Seconde méthode pour démontrer l'analyticité. — Considérons l'intégrale $-2\sqrt{\pi}Z = \iint_{S_y} Uf\,d\xi\,d\eta$, f étant une fonction *continue, analytique par rapport à x, à l'intérieur de* S. Soit un contour rectangulaire (C′) situé à l'intérieur de S : la partie de l'intégrale étendue à l'aire extérieure à (C′) est évidemment une fonction analytique de x en tout point intérieur à (C′). Proposons-nous de montrer que l'autre partie $Z' = \iint_{S'_y}$ est analytique.

Pour cela, remarquons qu'on peut écrire en tout point de S′ bord compris,

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right| < \frac{F n!}{R^n}, \tag{3}$$

F et R étant constants. Dès lors, si nous envisageons la formule

$$-\frac{\partial Z'}{\partial x} = \int_{(C'_y)} Uf\,d\eta - \iint_{S'_y} U\frac{\partial f}{\partial \xi}\,d\xi\,d\eta \tag{4}$$

obtenue comme au paragraphe **8** en remarquant que $\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial \xi}$, nous pourrons la dériver et appliquer la même remarque à l'intégrale double ainsi obtenue, et ainsi de suite indéfiniment. Nous trouvons

---

([1]) Il est à remarquer que dans la démonstration de l'analyticité relative à $\delta z = f(x, y, z, p)$ nous avons résolu une équation fonctionnelle, ne contenant pas la fonction de Green, par des approximations dont les termes successifs ne prennent pas sur le bord des valeurs données. Au contraire, dans le cas de l'équation $r = f(x, y, z, p, q)$, il faut opérer, comme il a été dit dans le cas réel, avec les modifications indiquées dans le présent paragraphe. Naturellement $\frac{\partial z}{\partial y}$ sera également analytique en x.

ainsi

$$\frac{\partial^n Z'}{\partial x^n} = -\int_{(C'_y)} \left(\frac{\partial^{n-1} U}{\partial x^{n-1}} f + \frac{\partial^{n-2} U}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \ldots + U \frac{\partial^{n-1} f}{\partial \xi^{n-1}} \right) d\eta + \int\int_{S'_y} U \frac{\partial^n f}{\partial \xi^n} d\xi \, d\eta.$$

Cette formule montre tout d'abord que, si f est *indéfiniment dérivable* par rapport à x, à l'intérieur de S, il en est de même de Z. Utilisons maintenant l'inégalité (3) et remarquons que, d'une manière générale,

$$\left| \int_{(C'_y)} \frac{\partial^n U}{\partial x^n} \varphi(\eta) \, d\eta \right| < \frac{M n!}{r^n} \qquad \left(r < \frac{d}{\sqrt{2}} \right)$$

(*voir* § **45**), M étant le maximum de $\int_{(C'_y)} U \varphi \, d\eta$ sur le cercle de rayon r situé dans le plan de la variable x. Or,

$$\left| \int_{(C'_y)} U \varphi \, d\eta \right| < \Phi \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = 2\Phi\sqrt{y}, \qquad M = 2\Phi\sqrt{y},$$

Φ étant le module maximum de φ. Si donc ρ est le plus petit des nombres R et r, on a

$$\frac{\partial^n Z'}{\partial x^n} < \frac{2F\sqrt{y}}{\rho^{n-1}} [(n-1)! + 1!(n-2)! + \ldots + (n-1)!] + 2\sqrt{\pi} y \frac{F n!}{\rho^n};$$

chaque terme du crochet est inférieur à $(n-1)!$ On peut donc écrire

$$\frac{\partial^n Z'}{\partial x^n} < \lambda \sqrt{y} \frac{F n!}{\rho^n},$$

ce qui démontre l'analyticité de Z' et par suite de Z dans toute région intérieure à S' et par conséquent à S.

On déduirait de là une seconde méthode pour démontrer l'analyticité des solutions de l'équation linéaire. Comme nous utiliserons un procédé *tout à fait semblable* dans le paragraphe **55**, nous nous bornerons pour le moment à signaler cette démonstration.

II. — L'analyticité par rapport à y.

48. Analyticité des intégrales $\mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{K}$. — Envisageons l'intégrale

$$\mathfrak{I}_0(x, y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \varphi(\eta) \, d\eta.$$

Ce n'est pas, en général, une fonction analytique de y, puisque, comme solution de $\delta\mathfrak{z} = 0$, $\mathfrak{z}_0$ est une fonction $\mathcal{H}$. Supposons que $\varphi(\eta)$ soit une *fonction analytique de* η à l'intérieur d'un intervalle $(0, \beta)$ contenant la valeur y et que cette fonction soit *continue* pour $y = 0$. Soit

$$\mathfrak{z}_0^{(\varepsilon)}(x, y) = \int_0^{y-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \varphi(\eta)\, d\eta.$$

Si nous donnons à y une valeur complexe $y_1 + i y_2$, cette intégrale est évidemment dans le plan de la variable y une fonction analytique de y, *à l'intérieur* de toute région connexe située à droite du plan d'équation $y_1 = \varepsilon$ et faisant partie du domaine D d'analyticité de φ. Si ce domaine contient la droite joignant l'origine au point (y_1, y_2), nous pourrons prendre l'intégrale le long de cette droite, la détermination du radical étant celle qui coïncide avec le radical arithmétique quand $y - \eta$ prend une valeur réelle positive.

Formons alors $\mathfrak{z}_0^{(\varepsilon)} - \mathfrak{z}_0^{(\varepsilon')}$: en remarquant que $\left|\sqrt{y-\eta}\right| > \sqrt{y_1 - \eta_1}$, on a

$$\left|\mathfrak{z}_0^{(\varepsilon)} - \mathfrak{z}_0^{(\varepsilon')}\right| < \Phi \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{d\eta_1}{\sqrt{y_1 - \eta_1}},$$

et ceci tend vers zéro uniformément quand ε et ε' tendent vers zéro. Par suite, $\mathfrak{z}(x, y)$ *est une fonction analytique de* y dans toute région à droite de Oy_2 (une coupure partant de O suffirait d'ailleurs), faisant partie de D et pouvant contenir O sur sa frontière, et cela quel que soit x.

La même démonstration s'appliquerait à $\mathfrak{z}(x, y)$ en supposant x et $y \neq 0$, car on aurait alors (¹)

$$\left|\mathfrak{z}_0^{(\varepsilon)} - \mathfrak{z}_0^{(\varepsilon')}\right| < \Phi \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{x}{(y_1 - \eta_1)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2 \cos^2 \omega}{4(y_1 - \eta_1)}} d\eta_1, \qquad \omega = y_1 \widehat{O} \overline{P} \quad (\textit{fig. } 11).$$

Mais il convient de voir si $\mathfrak{z}(x, y)$ *a une limite quand* x *tend vers zéro*. Pour cela, nous allons donner une *seconde démonstration* de l'analyticité de $\mathfrak{z}$. Soit

$$\mathfrak{z}(x, y) = \int_0^y \mathrm{V}(0, \eta; x, y)\, \varphi(\eta)\, d\eta,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} = \int_0^y \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} \varphi\, d\eta = -\int_0^y \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \eta} \varphi(\eta)\, d\eta = \frac{x}{y^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \varphi(y) + \int_0^y \mathrm{V} \varphi'(\eta)\, d\eta.$$

(¹) Cette inégalité montre que, si y tend vers zéro suivant un chemin non tangent à Oy_2 et si $\varphi(0) = 0$, $\mathfrak{z}$ tend vers zéro, quel que soit x.

d'où, en posant $\theta = \frac{x}{y^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$,

$$\frac{\partial^n \mathfrak{z}}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1} \theta}{\partial y^{n-1}} \varphi(y) + \frac{\partial^{n-2} \theta}{\partial y^{n-2}} \frac{d\varphi}{dy} + \ldots + \theta \frac{d^{n-1} \varphi}{dy^{n-1}} + \int_0^{\mathfrak{z}} V \frac{d^n \varphi}{d\eta^n} d\eta.$$

Supposons φ analytique à l'origine (¹) de façon que dans l'intervalle Oy, on puisse écrire

$$\left| \frac{d^n \varphi}{d\eta^n} \right| < \frac{\Phi n!}{r^n},$$

θ est analytique en y, sauf pour $y = 0$ qui est un point singulier : donc

$$\left| \frac{d^n \theta}{dy^n} \right| < x \frac{M n!}{|\lambda y^n|}.$$

λ étant aussi voisin de *un* qu'on veut. D'après le même raisonnement que dans le paragraphe **47**, on conclurait de là que $\mathfrak{z}$ est analytique dans une région connexe ne contenant pas l'origine à son intérieur.

Soit $(y_0, 0)$ un point de cette région *situé sur* Ox; y étant complexe, on a

$$\mathfrak{z}(x, y) = \mathfrak{z}(x, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y_0} + \frac{(y - y_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial y_0^2} + \ldots.$$

Quand x tend vers zéro, $\frac{\partial^n \mathfrak{z}}{\partial y_0^n}$ tend vers $2\sqrt{\pi} \frac{\partial^n \varphi}{\partial y_0^n}$ et par suite $\frac{\mathfrak{z}}{2\sqrt{\pi}}$ tend vers

$$\varphi(y_0) + (y - y_0) \frac{d\varphi}{dy_0} + \frac{(y - y_0)^2}{2!} \frac{d^2 \varphi}{dy_0^2} + \ldots = \varphi(y).$$

La *formule de discontinuité* est donc établie dans ce cas.

Quant aux intégrales

$$\mathcal{K} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} \psi(\xi)\, d\xi,$$

ce sont évidemment des fonctions *analytiques de* y admettant l'origine comme *point singulier*. Voyons si la *formule de Poisson* s'applique quand y tend vers zéro par valeurs complexes, avec la détermination positive du radical, et que x tend vers x_0. D'après le

---

(¹) Sinon on isolerait l'origine en partageant l'intégrale en deux parties.

raisonnement classique, il suffit d'étudier la limite de

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} d\xi = 2\int_{\frac{x_0-x-\varepsilon}{2\sqrt{y}}}^{\frac{x_0-x+\varepsilon}{2\sqrt{y}}} e^{-s^2}\, ds.$$

Si la partie réelle de y est *positive*, on voit facilement que les limites de l'intégrale s'éloignent indéfiniment dans deux directions opposées faisant avec Ox un angle inférieur à 45°. Par suite, la limite est $2\sqrt{\pi}$. D'où la *formule de Poisson*.

49. Analyticité de l'intégrale Z. — Quand $f(x, y)$ est *analytique en y*, dans une région $\mathcal{R}$ contenant le contour rectangulaire (C), l'*analyticité de Z par rapport à y* en tout point de S s'établirait aisément par le même procédé qu'au paragraphe **47** en utilisant la formule [*voir* formule (26), § **10**]

$$2\sqrt{\pi}\frac{\partial Z}{\partial y} = -\int_{(C_y)} U f\, d\xi - \iint_{S_y} U \frac{\partial f}{\partial \eta} d\xi\, d\eta.$$

La démonstration basée sur l'emploi du *domaine complexe* est également très simple et nous donnera, pour les démonstrations relatives aux équations $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$, et $\mathcal{E}_2$, une marche analogue à celle que nous avons suivie dans la section précédente (voir *fig.* 11).

Si nous envisageons, comme dans le paragraphe **44**, le contour rectangulaire MABN, α et β étant les abscisses de A et B, l'intégrale Z peut être prolongée analytiquement de la façon suivante. Considérons la fonction (ε' dépend de ε et sera défini plus loin)

$$-2\sqrt{\pi}\, Z_\varepsilon = \iint_{S_{y-\varepsilon'}} U f\, d\xi\, d\eta.$$

Nous pouvons l'écrire

$$(5) \qquad -2\sqrt{\pi}\, Z_\varepsilon = \int_0^{y-\varepsilon'} h(\eta;\, x, y)\, d\eta,$$

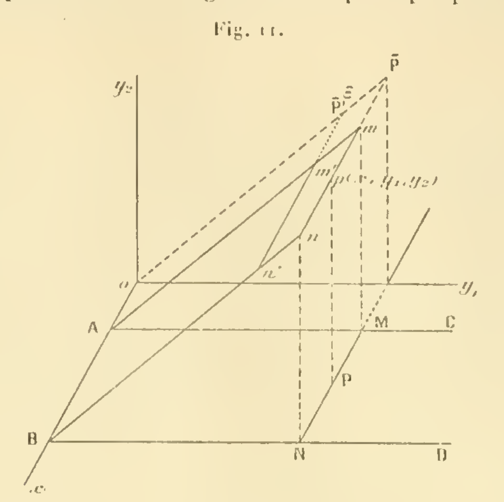
$$h(\eta;\, x, y) = \int_\alpha^\beta U(\xi, \eta;\, x, y) f(\xi, \eta)\, d\xi.$$

Supposons que f soit une fonction *continue en tout point de* AB, *analytique en* η, à l'intérieur d'un cylindre $\mathfrak{S}$ admettant AB comme

génératrice et limité par les sections droites contenant AC, BD (f étant analytique à l'intérieur de ces sections).

Dans ces conditions, $h(\eta; x, y)$ est une fonction analytique de y à droite du plan des xy_2 et une fonction analytique de η dans la portion de $\mathfrak{S}$, bases comprises, située à gauche du plan perpendiculaire à Oy_1

Fig. 11.



mené par p : cette fonction est continue quand y et η tendent vers zéro ou que η tend vers y. Nous pouvons alors faire l'intégration (5), en supposant que y soit complexe, $y - \varepsilon'$ étant le point $\overline{P}'$ situé sur $O\overline{P}$ à la distance ε de $\overline{P}$, ε restant fixe quand y varie.

Cela posé, il n'y a plus aucune difficulté à voir que, quand ε tend vers zéro, la fonction Z_ε *tend uniformément vers une fonction limite* pour tous les points $p(x, y_1, y_2)$ situés à l'intérieur de la portion ω, du domaine d'analyticité de f, qui est à droite de xOy_2. Il suffit pour cela de remarquer que

$$-2\sqrt{\pi} Z_\varepsilon = \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad \eta = \eta_1 + i\eta_2,$$

Σ_ε étant la surface $m'ABn'$. Or, on peut écrire

$$\left|\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\right| < \frac{1}{\sqrt{y_1-\eta_1}}, \qquad \left|e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}\right| < e^{-\frac{\lambda^2(x-\xi)^2}{y_1-\eta_1}}.$$

λ étant un nombre fixe quand la pente du plan pAB reste inférieure à une certaine limite : Z_ε est donc comparable à une intégrale étendue à

la projection de Σ_ε. On en déduit aisément qu'on obtient une fonction analytique limite qui coïncide avec Z quand y est réel

Même démonstration pour $\frac{\partial Z}{\partial x}$.

De plus, il résulte de ce que nous venons de voir que les limitations Z et $\frac{\partial Z}{\partial x}$ ne diffèrent de celles du *domaine réel* que par un *facteur constant*.

50. Analyticité des solutions des équations. — Soit une solution de $\delta z = f$, *régulière dans une région* $\mathcal{R}$ et se réduisant à une *fonction analytique de* y sur les côtés *parallèles à* Oy d'un rectangle situé dans $\mathcal{R}$: z sera une fonction analytique de y à l'intérieur de ce rectangle. En effet, nous pourrons déterminer z par la somme d'une intégrale $\mathcal{H}$, de deux intégrales $\mathcal{J}$ et d'une fonction Z. Les intégrales $\mathcal{J}$ porteront sur des fonctions $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$ déterminées par les équations ($x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_0$ étant les équations des côtés du rectangle) :

$$\mathrm{F}_1(\eta) = \varphi_1(\eta) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{y_0}^{\eta} \frac{x_2 - x_1}{(\eta - s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x_1 - x_2)^2}{4(\eta - s)}} \varphi_2(s)\, ds,$$

$$\mathrm{F}_2(\eta) = \varphi_2(\eta) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{y_0}^{\eta} \frac{x_2 - x_1}{(\eta - s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x_1 - x_2)^2}{4(\eta - s)}} \varphi_2(s)\, ds.$$

La résolution de ces équations dans le domaine complexe s'effectue comme dans le domaine réel. F_1 et F étant *analytiques en* η, *nulles et continues pour* $\eta = y_0$, φ_1 et φ_2 jouiront de cette même propriété. z est dans l'espace (x, y_1, y_2) une fonction *analytique de* y dans le domaine formé par la portion du domaine d'analyticité de f contenue dans le prisme ayant pour section droite le rectangle : elle est continue sur AB et analytique dans les plans verticaux AC, BD.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ jouit de la même propriété parce que, en vertu de la régularité de z sur le contour, $\frac{\partial z}{\partial x}$ peut se mettre sous la même forme que z avec des intégrales $\mathcal{J}$ portant sur des fonctions *nulles* pour $y = y_0$.

De là découle sans difficulté, grâce aux limitations de Z et $\frac{\partial Z}{\partial x}$, la démonstration des théorèmes analogues à ceux que nous avons établis dans la première section.

L'étude des équations

$$(\mathcal{E}) \qquad \delta z = ap + cz + f,$$

$$(\mathcal{E}_1) \qquad \delta z = f(x, y, z, p)$$

se fait aisément.

En ce qui concerne l'équation

$$r = f(x, y, z, p, q) \qquad (f'_q > 0),$$

il faudra naturellement employer la méthode du paragraphe **30**, en supposant que q et r admettent sur AB un accroissement d'ordre non nul par rapport à x.

Nous obtenons ainsi les THÉORÈMES SUIVANTS :

Étant donnée une région $\mathcal{R}$ du plan, contenant un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes, soit z une fonction continue, ainsi que ses dérivées premières; supposons que z prenne, sur les côtés du rectangle parallèles à Oy, une succession de valeurs analytiques en y. Dans ces conditions, z et ses deux dérivées seront des fonctions analytiques de y à l'intérieur du rectangle dans les deux cas suivants :

1° *Si dans la région $\mathcal{R}$, z est solution de l'équation ($\mathcal{E}$), et si les coefficients de cette équation sont à l'intérieur de $\mathcal{R}$ des fonctions continues analytiques en y ;*

2° *Si dans la région $\mathcal{R}$, z est solution des équations ($\mathcal{E}_1$) ou ($\mathcal{E}_2$), f étant continue en x et analytique en y, z, p, q, pour les valeurs prises par z et ses deux dérivées, la dérivée f'_q gardant un signe constant.*

De plus, dans le cas de l'équation ($\mathcal{E}_2$), on suppose que r et q admettent, par rapport à x, sur les côtés horizontaux du rectangle, des accroissements d'ordre non nul.

31. ANALYTICITÉ EN x ET y. — Les théorèmes précédents ne seraient plus vrais si les deux arcs C_1, C_2 du contour (C), au lieu d'être des segments parallèles à Oy, étaient des arcs analytiques. Cependant, dans ces conditions, la fonction Z est une fonction analytique de x et de y, si f jouit de cette propriété. On pourrait partir de là pour étudier

l'analyticité des solutions, relativement à l'ensemble des variables x, y. Mais il est facile d'utiliser les considérations précédentes. Transformons le contour (C) en un contour rectangulaire par le changement de variable (V) déjà plusieurs fois employé : $x' = \frac{l(x - X_1)}{X_2 - X_1}$. Toute fonction analytique de x et de y est analytique en x' et y et réciproquement. Soit $\mathfrak{F} = 0$ une des équations étudiées plus haut, *$\mathfrak{F}$ étant analytique en x, y, z, p, q*. Sur tout segment vertical à l'intérieur du contour (C') transformé de (C), toute solution z de $\mathfrak{F} = 0$, prenant sur C_1 et C_2 des valeurs analytiques, est, ainsi que $\frac{\partial z}{\partial x}$, une fonction analytique de y. Par conséquent, le problème de Cauchy est résoluble pour ce segment et nous donne une solution analytique en x et y, qui coïncide avec la proposée, car celle-ci est indéfiniment dérivable en x et y. Donc *z est analytique en x* et y.

En ce qui concerne l'équation $\delta z = 0$, toute solution analytique se réduit sur une caractéristique *à une fonction entière de x d'ordre* ≤ 2 (Lalesco, *Atti del Congresso Internazionale*, Roma 1908).

III. — Les fonctions $\mathcal{H}$.

La considération des fonctions $\mathcal{H}$ a fourni à M. Holmgren, dans ses études sur l'équation de la chaleur, plusieurs résultats fort intéressants et qui sont des cas particuliers de propositions plus générales, auxquelles nous allons arriver par une voie tout à fait différente.

32. Propriétés des fonctions $\mathcal{H}$. — Ces fonctions *se reproduisent par les opérations algébriques élémentaires : multiplication, division, élévation aux puissances*. Le produit de ces opérations effectué sur des fonctions $\mathcal{H}$ est également une fonction $\mathcal{H}$. Démontrons-le tout d'abord pour la *multiplication :* soient les fonctions f et g de y, telles que, dans l'intervalle (α, β), $\left|\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right|$ et $\left|\frac{\partial^n g}{\partial y^n}\right|$ soient inférieurs à $\frac{M(2n)!}{R^n}$. La formule de Leibniz nous donne alors

$$\left|\frac{\partial^n fg}{\partial y^n}\right| < \frac{M^2}{R^n}\{(2n)! + C_n^1 2![2(n-1)]! + \ldots + C_n^p (2p)![2(n-p)]! + \ldots + (2n)!\}.$$

Dans le crochet, on passe d'un terme au suivant en le multipliant

par $\frac{2p+1}{2(n-p)-1}$, quantité inférieure à 1, tant que $p < \frac{n-1}{2}$. Donc les termes décroissent, puis croissent; mais, comme ils sont deux à deux égaux, ils sont tous, sauf le premier et le dernier, inférieurs au second, qui est $n[2(n-1)]!$. Par conséquent, le crochet est inférieur à $2(2n)! + n(n-1)[2(n-1)]!$, lui-même inférieur à $K(2n)!$ $(K < 3)$. Donc

$$\left|\frac{\partial^n fg}{\partial y^n}\right| < \frac{M^2 K(2n)!}{R^n}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On démontrerait de même que $\frac{1}{f}$ est une fonction $\mathcal{H}$ $(f \neq 0)$, en posant $\varphi = \frac{1}{f}$, d'où $f\varphi = 1$, et calculant la limitation de $f^{(n)}$ par voie de récurrence au moyen de la même formule de Leibniz: il suffirait d'isoler $f\varphi^{(n)}$ dans le second membre. Enfin, si $\varphi = f^\alpha$, on dérivera $n-1$ fois la relation $\varphi' = \varphi \frac{f'}{f}$ $\left(\frac{f'}{f}\text{ est, en effet, fonction } \mathcal{H}\right)$.

Nous avons dit plus haut que les solutions régulières de l'équation $\delta z = 0$ étaient analytiques en x et fonctions $\mathcal{H}$ en y. D'une façon plus précise, on peut, en tout point d'une région où z est régulière, dériver n fois la relation $\frac{\partial^q z}{\partial y^q} = \frac{\partial^{2q} z}{\partial x^{2q}}$, ce qui donne

$$\left|\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \, \partial y^q}\right| < \frac{M(p+2q)!}{\rho^{p+2q}};$$

Or on sait que $(p+2q)!$ est comparable à $e^{p+2q} p!\, 2q!$ On peut donc écrire

$$\left|\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \, \partial y^q}\right| < M \frac{p!}{R_1^p} \frac{(2q)!}{R_2^q}, \tag{6}$$

Nous dirons d'une fonction, qui satisfait à une limitation de cette forme dans une région donnée, qu'elle est, *par rapport à l'ensemble* (x, y), analytique en x et d'espèce $\mathcal{H}$ en y. On définirait de même une fonction qui est *d'espèce* $\mathcal{H}$ *par rapport à l'ensemble* x, y.

Ce qui précède va nous conduire à cette conséquence que, si dans une fonction z analytique en x et d'espèce $\mathcal{H}$ en y, par rapport à l'ensemble, nous remplaçons x par une fonction $\mathcal{H}$ de y, le résultat est une *fonction* $\mathcal{H}$ *de la variable unique* y.

Pour cela, remarquons tout d'abord qu'il est facile de former une

fonction $F(y)$ dont toutes les dérivées pour une valeur donnée y_0 de y soient égales à $\frac{M(2n)!}{R^n}$: il suffit, par exemple, de prendre la fonction

$$F(y) = \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{y-y_0}} e^{-\frac{\xi^2}{4(y-y_0)}} \frac{d\xi}{1-\frac{\xi^2}{R}} \qquad (-\sqrt{R} < a_1 < 0 < a_2 < \sqrt{R}).$$

qui est la valeur, pour $x = 0$, d'une solution de $\delta z = 0$ se réduisant, pour $y = y_0$, $a_1 < x < a_2$, à la fonction $\frac{1}{1-\frac{x^2}{R}}$.

Les dérivées de F pour $y = y_0$ ont bien la valeur désirée; il est vrai que notre formule ne définit F (en apparence) que pour $y \geqq y_0$, mais ceci importe peu pour l'objet que nous avons en vue [1].

Cela posé, soit un point x_0, y_0 du plan pour lequel les inégalités (6) sont vérifiées, et dans z substituons à x la fonction $\varphi(y)$, d'espèce $\mathcal{H}$, telle que $x_0 = \varphi(y_0)$. Proposons-nous de calculer une limite supérieure des dérivées de la fonction $z[\varphi(y), y]$ pour $y = y_0$. Les dérivées partielles de z en ce point seront évidemment limitées par celles de la fonction

$$(7) \qquad \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{1-\frac{x-x_0}{R_1}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{y-y_0}} e^{-\frac{\xi^2}{4(y-y_0)}} \frac{d\xi}{1-\frac{\xi^2}{R_2}},$$

et comme les calculs de dérivation d'une fonction composée donnent pour chaque dérivée une *expression entière ne contenant que des signes* +, les dérivées de $z[\varphi(y), y]$ seront majorées par celles de la fonction de y obtenue en remplaçant x par $\varphi(y)$ dans (7). D'après ce que nous avons vu plus haut, cette fonction de y possède des dérivées de tous ordres vérifiant l'inégalité caractéristique des fonctions $\mathcal{H}$. Si y_0 varie dans un intervalle (i) et x_0 dans un intervalle tel que les valeurs correspondantes de φ appartiennent à (i), l'inégalité (6) étant toujours vérifiée, la limitation que nous avons obtenue sera indépendante de x_0,

---

[1] On peut dire que F *majore* f *pour* $y = y_0$. Si une fonction $f(x, y, \ldots)$ est d'espèce $\mathcal{H}$ par rapport à l'ensemble $x, y, \ldots$, on pourra la majorer pour $x = x_0$, $y = y_0$, ..., par le *produit* de plusieurs fonctions de x, de y, ..., analogues à F.

y_0 et, par suite, $z[\varphi(y), y]$ sera fonction $\mathcal{H}$ dans tout l'intervalle (i).

Définition. — Appelons *courbe* $\mathcal{H}$ tout arc de courbe représenté par une équation de la forme $x = X(y)$, X étant une *fonction* $\mathcal{H}$ dans un intervalle (α, β). Le résultat obtenu précédemment peut alors s'énoncer ainsi :

Sur une courbe $\mathcal{H}$ toute solution régulière de l'équation de la chaleur, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$, se réduit à une fonction $\mathcal{H}$ de y.

Ce résultat avait été démontré par M. Holmgren, dans le cas d'une courbe *analytique*, par des considérations entièrement différentes.

35. Étude des solutions de l'équation linéaire dont les coefficients sont fonctions $\mathcal{H}$. — Nous avons vu que, si les coefficients de l'équation

$$(\varepsilon) \qquad \delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + cz + f$$

sont des fonctions analytiques de x dans une région $\mathcal{R}$, toute solution régulière est également analytique en x. Il est tout naturel de se demander si, dans le cas où *les coefficients sont d'espèce* $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{R}$, les solutions *régulières* sont aussi de cette espèce.

Suivant toujours la marche habituelle dans ces questions, envisageons tout d'abord l'équation $\delta z = f$; si l'on peut trouver une solution régulière qui soit d'espèce $\mathcal{H}$ en même temps que f, le fait aura lieu pour toute autre solution régulière d'après ce qu'on a vu pour $\delta z = 0$.

Pour démontrer ceci, nous utiliserons tout d'abord la fonction Z,

$$Z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_1} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_1} U f\, dS.$$

Prenons ici comme contour (C) un contour *rectangulaire* de côtés parallèles aux axes $(x = x_1, x = x_2, y = y_1)$ et soit y_2 l'ordonnée du côté supérieur du rectangle supposé contenu dans $\mathcal{R}$. Nous obtenons par n dérivations successives la formule, dont nous avons déjà

parlé plus haut (§ 49).

$$(8)\qquad 2\sqrt{\pi}\,\frac{\partial^n Z}{\partial y^n} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^{n-1} U(\xi, y_1; x, y)}{\partial y^{n-1}} f(\xi, y_1) + \frac{\partial^{n-2} U}{\partial y^{n-2}}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + U\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}\right] d\xi + \int\int_{S_y} U\,\frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial \eta^n}\, d\xi\, d\eta.$$

Pour toute valeur de y intérieure à l'intervalle (y_1, y_2), on a dans la première intégrale

$$\left|\frac{\partial^p U}{\partial y^p}\right| < \frac{M_1 p!}{|\lambda(y - y_1)|^p} \qquad (0 < \lambda < 1),$$

d'où, en introduisant la limitation $\frac{M(2n)!}{R^n}$ des dérivées de f,

$$\left|\frac{\partial^n Z}{\partial y^n}\right| < \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{\pi}} MM_1 \left\{\frac{(n-1)!}{|\lambda(y - y_1)|^n} + \frac{(n-2)!\,2!}{R\,|\lambda(y - y_1)|^{n-1}} + \ldots + \frac{[2(n-1)]!}{R^n}\right\} + (y - y_1) M\,\frac{(2n)!}{R^n};$$

Or, il est clair qu'on pourra déterminer deux nombres M' et R' tels que cette expression soit inférieure à $\frac{M' 2n!}{R'^n}$ quand y appartient à un intervalle (y'_1, y_2), $y'_1 > y_1$. Z *est donc fonction* $\mathcal{H}$ *en tout point intérieur au rectangle* et il suffit de dériver Z par rapport à x pour se convaincre du même fait pour $\frac{\partial Z}{\partial x}$.

Abordons maintenant l'équation $(\mathcal{E})$, où nous supposons que *les coefficients* a, c, f *sont des fonctions* $\mathcal{H}_R$ dans la région $\mathcal{R}$ contenant le rectangle (ρ) envisagé plus haut.

Quand l'équation se réduit à $\delta z = 0$, nous avons vu que le rayon de convergence de la solution en un point $P(x, y)$ est égal à $\frac{d}{\sqrt{2}}$, d représentant la plus courte distance du point (x, y) aux côtés verticaux; z est donc une fonction $\mathcal{H}_{\lambda^2 d^2}$ $\left(0 < \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sur tout segment vertical intérieur à (ρ). A chaque dérivation par rapport à x, il s'introduit d en dénominateur dans la limitation des dérivées par

rapport à x, donc d^2 dans celles des dérivées par rapport à y, mais celles-ci deviennent aussi infinies sur le côté horizontal de (ρ) et nous avons vu plus haut que $(y-y_1)^n$ figurait au dénominateur dans la limitation de la dérivée d'ordre n par rapport à y.

Pour simplifier les choses, nous allons appeler *d la plus courte distance au contour envisagé tout entier;* on aura alors $y-y_1 > \alpha d^2$, α ne dépendant que de la hauteur du rectangle.

Nous sommes ainsi induits à supposer que les dérivées successives de z, solution de $(\mathcal{E})$, et de $\frac{\partial z}{\partial x}$, existent et satisfont à la limitation

$$\left|\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^n z}{\partial x\, \partial y^{n-1}}\right| < \frac{M(2n)!}{(\mu d)^{2n}}.$$

Nous allons donc montrer que *si ces inégalités ont lieu jusqu'à l'ordre n, elles sont vraies pour l'ordre $n+1$*, μ étant un nombre que nous déterminerons pour réaliser ce fait. Pour cela, remarquons que la fonction $z_n = \frac{\partial^n z}{\partial y^n}$, satisfait à l'équation

$$(\mathcal{E}_n) \qquad \delta z_n = a\frac{\partial z_n}{\partial x} + c z_n + f_n,$$

f_n ne contenant que des dérivées d'ordre inférieur à n.

1° *$\frac{\partial z_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ existent :* si, en effet, (ρ_n) est un contour rectangulaire intérieur à (ρ) et contenant (x, y) (*fig.* 12), z_n sera la solution de l'équation $(\mathcal{E}_n)$ prenant sur (ρ_n) des valeurs connues et, par suite, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ existent [1] au point intérieur (x, y);

2° Calculons la *limitation* de ces deux dérivées. Nous avons

$$f_n = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(a\frac{\partial z}{\partial x} + cz\right) - a\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x\, \partial y^n} - c\frac{\partial^n z}{\partial y^n} + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}.$$

On peut toujours supposer qu'on a choisi le contour (ρ) ou le nombre μ de telle sorte qu'on ait toujours $R < \mu^2 d^2$, et que par suite a, c, f soient des fonctions $\mathcal{H}_{\mu^2 d^2}$. La formule de Leibniz montre

---

[1] Nous n'avons démontré cela, dans le second Chapitre, que si $\frac{\partial a}{\partial x}$ existe, en supposant la simple continuité des données.

alors (*cf.* § 52) que

$$|f_n| < \frac{KAM(2n)!}{(\mu d)^{2(n-1)}}, \qquad \left|\frac{\partial f_n}{\partial y}\right| < \frac{KAM[2(n+1)]!}{(\mu d)^{2n}},$$

A étant la constante relative à a, c, f.

Or, si d'une manière générale, dans un domaine limité par un contour rectangulaire, une solution u de l'équation

$$\delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + cu + f$$

est inférieure en valeur absolue à $[U]$, avec

$$|a|, \quad |c|, \quad \left|\frac{\partial a}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial a}{\partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial c}{\partial y}\right| < A, \qquad f < F \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < F',$$

on peut écrire en tout point intérieur au contour, d' étant sa plus courte distance à ce contour,

$$(9) \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < L\left(\frac{A[U]+F}{d'^2} + F'\right),$$

L étant un coefficient numérique *indépendant des coefficients et de la solution* [1].

Appliquons cela au cas actuel où le contour est (ρ_n) et supposons (ρ_n) choisi de telle sorte que $d' = \lambda_n d$ $(\lambda_n < 1)$, d étant la plus courte distance de $P(x, y)$ à (ρ), déjà envisagée plus haut. Il suffit pour cela de prendre pour (ρ_n) le contour formé par des parallèles aux côtés de ρ à la distance $(1-\lambda_n)d$.

Les limitations maxima de z_n, f_n, $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ étant atteintes *sur les côtés de* (ρ_n), nous aurons à appliquer la formule (9), avec $d' = \lambda_n d$ et

$$u = z_n, \qquad [U] = \frac{M(2n)!}{[\mu(1-\lambda_n)d]^{2n}},$$

$$F = \frac{KAM(2n)!}{[\mu(1-\lambda_n)d]^{2(n-1)}}, \qquad F' = \frac{KAM[2(n+1)]!}{[\mu(1-\lambda_n)d]^{2n}}.$$

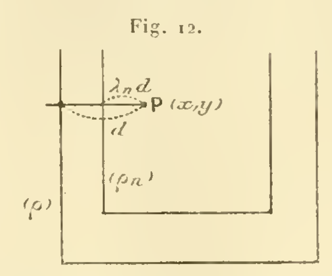
[1] Il va sans dire qu'ici nous avons donné une limitation commune sous la forme la plus simple que possible, qui est naturellement assez grossière, bien qu'exacte. C'est ainsi que $\frac{\partial u}{\partial x}$ devient infini sur le contour comme $\frac{1}{d}$, seulement (*voir* § 21, 23).

Donc

$$(10)\quad \left.\begin{array}{c}\left|\dfrac{\partial z_n}{\partial x}\right| \\ \text{et} \\ \left|\dfrac{\partial z_n}{\partial y}\right|\end{array}\right\} < \mathrm{L}\,\frac{\mathrm{A\,M}(2n)!}{[\mu(1-\lambda_n)d]^{2n}\lambda_n^2 d^2}\,[1+(2n+1)(2n+2)\mu^2 d^2(1-\lambda_n)^2+\lambda_n^2 d^2].$$

On pourra déterminer deux nombres β et γ, indépendants de n, de

Fig. 12.



telle sorte que le crochet soit inférieur à $\beta+\gamma n^2\lambda_n^2$ en tout point intérieur à (ρ) ou sur (ρ). Choisissons alors pour λ_n la valeur $\dfrac{\alpha}{n}$. Il vient

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < \mathrm{L}\,\frac{\mathrm{A\,M}[2(n+1)]!}{(\mu d)^{2(n+1)}}\;\frac{4n^2}{(2n+1)(2n+2)}\;\frac{\mu^2(\beta+\alpha^2\gamma)}{4\alpha^2\left(1-\dfrac{\alpha}{n}\right)^{2n}}.$$

Or la seconde fraction est <1, et

$$\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-2n} < e^{2\alpha};$$

si donc on a choisi α et μ de telle façon que

$$\mathrm{AL}\,\frac{\mu^2}{4\alpha^2}e^{2\alpha}(\beta+\alpha^2\gamma) < 1 \quad (^1),$$

on aura les limitations suivantes, qui sont précisément celles que nous voulions établir :

$$\left|\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x\,\partial y^n}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1}}\right| < \frac{\mathrm{M}[2(n+1)]!}{(\mu d)^{2(n+1)}}.$$

---

(1) On pourra, par exemple, choisir α de telle sorte que μ soit le plus grand possible; une fois μ déterminé, le choix de M en résultera à cause des limitations des premières dérivées.

Nous avons supposé $b=-1$. Dans le cas où b est une *fonction* $\mathcal{H}$ *de signe constant*, nous serions conduits aux mêmes résultats, car z_n satisfait alors à l'équation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}+b\frac{\partial z_n}{\partial y}=a\frac{\partial z_n}{\partial x}+\left(c-\frac{\partial b}{\partial y}\right)z_n+f''_n,$$

f''_n ne contenant encore que des dérivées d'ordre inférieur à n. Cette équation se ramène à la forme normale par un changement de variable, ce qui permet d'obtenir pour les dérivées de z_n des inégalités tout à fait analogues aux inégalités (10). Et ainsi, nous pouvons énoncer le THÉORÈME SUIVANT :

Lorsque les coefficients de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz+f=0$$

sont par rapport à y des fonctions $\mathcal{H}$ dans une région $\mathcal{R}$ du plan, toute solution régulière dans cette région est elle-même d'espèce $\mathcal{H}$ en y, ainsi que sa dérivée par rapport à x [1].

34. APPLICATIONS DU THÉORÈME PRÉCÉDENT. — Soit $\varphi(y)$ une *fonction* $\mathcal{H}$ *de* y et $y=\psi(t)$ une *fonction* $\mathcal{H}$ *de* t. Nous allons montrer que $\varphi[\psi(t)]$ est elle-même *d'espèce* $\mathcal{H}$ *en* t. Soit y_0 une valeur de y et $y_0=\psi(t_0)$: d'après ce que nous avons vu au paragraphe **32**, la propriété sera établie si nous la démontrons pour $\Phi(y)$ et $\Psi(t)$, Φ et Ψ étant des fonctions majorant φ et ψ pour $y=y_0$, $t=t_0$. Or soit $z(x,y)$ une solution de $\delta z=0$, se réduisant à $\Phi(y)$ sur Oy, régulière dans un domaine traversé par Oy (*cf.* z_0, § **33**); si nous faisons le changement de variable $y=\Psi(t)$, z vérifiera l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{\Psi'(t)}\frac{\partial z}{\partial t}$, $\Psi'(t)$ étant positif au voisinage de $t=t_0$ et, par suite, z se réduira, pour $x=0$ et t voisin de t_0, à une fonction $\mathcal{H}$ de t : or celle-ci est $\Phi[\Psi(t)]$.

---

[1] A la vérité, notre démonstration suppose l'existence de $\frac{\partial a}{\partial x}$. On pourrait, d'ailleurs, faire tomber cette hypothèse. Elle suppose aussi réalisées, pour la fonction b, les conditions qui permettent d'effectuer le changement de variable. On aurait un théorème analogue pour *l'analyticité en x et l'espèce Henry*.

Donc *une fonction* $\mathcal{H}$ *de fonction* $\mathcal{H}$ *est elle-même d'espèce* $\mathcal{H}$ et plus généralement une fonction $\mathcal{H}$ de $u, v, \ldots$, *composée de fonctions* $\mathcal{H}$ de x, est elle-même *d'espèce* $\mathcal{H}$ *en* x (¹).

Appliquons ceci aux résultats du paragraphe précédent. Une solution régulière de l'équation ($\mathcal{E}$) ne se réduit pas, en général, à une fonction $\mathcal{H}$ de y sur une courbe $x = X(y)$. Cependant, ce fait a lieu si X est d'espèce $\mathcal{H}$ et si, par le changement de variable $x = x' + X(y)$, les coefficients deviennent des fonctions $\mathcal{H}$ de y au voisinage de $x' = 0$. *Ceci est réalisé en particulier si ces coefficients sont d'espèce* $\mathcal{H}$ *par rapport à l'ensemble* (x, y). Ainsi donc, dans ces conditions, *toute solution régulière se réduit sur une courbe d'espèce* $\mathcal{H}$, $x = X(y)$, *à une fonction de* $\mathcal{H}$ *de* y.

IV. — Le problème de Cauchy et le problème du prolongement.

Le *problème de Cauchy* (z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ donnés sur une courbe) pour une équation du type parabolique n'est pas en général résoluble. Dans le cas de l'équation de la chaleur, M. Holmgren a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème soit possible lorsque la courbe portant les données est analytique. Nous allons nous placer ici à un point de vue un peu différent.

53. Problème de Cauchy pour l'équation $\delta z = f$. — Remarquons que, d'une façon générale, lorsque la courbe portant les données est représentée par une équation de la forme $x = X(y)$, X étant *indéfiniment dérivable*, s'il existe une solution *régulière* de $\delta z = f$ d'un certain côté de la courbe, elle ne peut être qu'*unique*. En effet, s'il en existait deux, leur différence serait une solution régulière, s'annulant sur la courbe ainsi que sa dérivée par rapport à x. Par conséquent, toutes les équations qui permettent d'effectuer le calcul des dérivées en un point de la courbe donneraient zéro comme résultat. Or, nous avons vu que quand ces dérivées existaient en un point d'un contour (C), elles étaient les limites effectives des dérivées de la solution en un point tendant vers (C). Donc la solution est *identiquement nulle*.

(¹) Ceci généralise les résultats du paragraphe **52**.

Dans ce qui suit, nous nous occupons simplement du cas où l'on se donne sur une courbe $\mathcal{H}$ des valeurs de z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ qui soient des fonctions $\mathcal{H}$ et nous supposons que les coefficients deviennent des fonctions $\mathcal{H}$, par le changement de variables $x' = x - \lambda(y)$, ce qui aura lieu, en particulier, *s'ils sont d'espèce $\mathcal{H}$ par rapport à l'ensemble (x, y)*.

Nous aurons donc en définitive à résoudre le problème *pour l'axe des y* en supposant *les coefficients d'espèce $\mathcal{H}$ en y*, ainsi que les *fonctions données*

$$z(0, y) = \varphi(y), \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(0, y) = \psi(y). \tag{11}$$

Proposons-nous dans ces conditions de déterminer la solution, pour l'équation $\delta z = f$.

Il suffira d'ajouter à la solution bien connue z_0 du problème pour $\delta z = 0$ (¹), la solution de $\delta z = f$, *s'annulant sur Oy ainsi que sa dérivée par rapport à x.*

Or cette solution est

$$Z_0(x, y) = \int_0^x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p} d\xi. \tag{12}$$

En effet, si f est une fonction $\mathcal{H}_R$ dans un intervalle (y_1, y_2), la série que nous venons d'écrire sera convergente à l'intérieur de l'intervalle $(-\sqrt{R}, +\sqrt{R})$ et par suite Z_0 sera déterminée à l'intérieur d'un rectangle ayant pour axe Oy et pour dimensions $2\sqrt{R}$ et $y_2 - y_1$ (²). Or une vérification immédiate montre que Z_0 s'annule sur Oy ainsi que sa dérivée par rapport à x.

Cette fonction Z_0 *est elle-même d'espèce $\mathcal{H}$*, ce qui constitue une *seconde démonstration* du fait que les solutions régulières $\delta z = f$ sont fonctions $\mathcal{H}$.

(¹) Cette solution est

$$z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n \varphi}{dy^n} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{d^n \psi}{dy^n}.$$

(²) En supposant que f soit fonction $\mathcal{H}$ pour $|x| < \sqrt{R}$, sinon le domaine serait réduit.

On a en effet ([1])

$$\frac{\partial^n Z_0}{\partial y^n} = \int_0^x \sum_p \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^{n+p} f(\xi, y)}{\partial y^{n+p}} d\xi.$$

Donc

$$\left|\frac{\partial^n Z_0}{\partial y^n}\right| < \text{M} \int_0^x \sum_p \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{[2(n+p)]!}{\text{R}^{n+p}} d\xi$$

$$< \text{M} \sum_p \frac{x^{2p+2}}{(2p)!} \frac{[2(n+p)]!}{\text{R}^{n+p}}.$$

Remplaçons $[2(n+p)]!$ par $\int_0^\infty e^{-t} t^{2(n+p)} dt$: l'expression devient

$$\frac{\text{M}x^2}{\text{R}^n} \int_0^\infty e^{-t\left(\frac{e^{\frac{tx}{\sqrt{\text{R}}}} + e^{-\frac{tx}{\sqrt{\text{R}}}}}{2}\right)} t^{2n} dt.$$

Mais

$$\int_0^\infty e^{-\left(1-\frac{x}{\sqrt{\text{R}}}\right)t} t^{2n} dt = \frac{(2n)!}{\left(1-\frac{x}{\sqrt{\text{R}}}\right)^{2n+1}}.$$

Il vient donc en définitive

$$\left|\frac{\partial^n Z_0}{\partial y^n}\right| < \frac{\text{M}(2n)!}{2\text{R}^n} \left[\frac{x^2}{\left(1+\frac{x}{\sqrt{\text{R}}}\right)^{2n+1}} + \frac{x^2}{\left(1-\frac{x}{\sqrt{\text{R}}}\right)^{2n+1}}\right],$$

ce qui montre bien que Z_0 sera d'espèce $\mathcal{H}$ dans tout intervalle strictement intérieur à $(-\sqrt{\text{R}}, +\sqrt{\text{R}})$. Évidemment, il en est de même pour $\frac{\partial Z_0}{\partial x}$ qui est donnée par la formule

$$\frac{\partial Z_0}{\partial x} = \int_0^x \sum_p \frac{(x-\xi)^{2p}}{(2p)!} \frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p} \partial\xi.$$

56. Problème de Cauchy pour l'équation linéaire. — Envisageons

---

([1]) Par la notation $\sum\limits_p$ nous entendons la sommation effectuée pour toutes les valeurs de p de zéro à ∞.

maintenant l'équation

$$(\mathcal{E}) \qquad \delta z = a\frac{\partial z}{\partial x} + cz + f.$$

dont les coefficients sont d'espèce $\mathcal{H}_R$ dans une région contenant un segment de Oy, sur lequel les données sont les fonctions d'espèce $\mathcal{H}_R$, $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ [formule (11)]. Le changement d'inconnue

$$u(x, y) = z(x, y) - \varphi(y) - xf(y)$$

nous ramène au même problème pour une équation de même forme avec des données nulles sur Oy.

Soit donc u, solution de $(\mathcal{E})$, nulle sur Oy, ainsi que sa dérivée : la formule (12) nous montre que u est *solution de l'équation*

$$(13) \quad u(x, y) = \int_0^x \sum_p \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \times \frac{\partial^p}{\partial y^p}\left[a(\xi, y)\frac{\partial u(\xi, y)}{\partial \xi} + c(\xi, y)\,u(\xi, y) + f(\xi, y)\right] d\xi.$$

Nous allons résoudre cette équation par *approximations successives*.

Si $\dfrac{\partial a}{\partial x}$ existe et est d'espèce $\mathcal{H}_R$ nous pouvons par un changement d'inconnue [formule (40), § **17**] rendre le *coefficient a nul*, c et f restant des fonctions $\mathcal{H}$. Supposons-nous donc placés dans ce cas; nous formerons alors la chaîne d'opérations suivantes :

$$u_0 = \int_0^x \sum_p \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p} d\xi,$$

$$u_1 = \int_0^x \sum \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^p c u_0}{\partial y^p} d\xi.$$

....

Envisageons le premier terme

$$u_1(x, y) = \int_0^x \sum_p \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} d\xi \int_0^\xi \sum_q \frac{(\xi - s)^{2q+1}}{(2q+1)!} \frac{\partial^p}{\partial y^p}\left[c\frac{\partial^q f(s, y)}{\partial y^q}\right] ds.$$

Un terme de u_1 peut s'écrire, par un changement dans l'ordre d'in-

tégration,

$$\int_0^x \frac{\partial^p}{\partial y^p}\left(c\frac{\partial^q f}{\partial y^q}\right) ds \int_s^x \frac{(x-\xi)^{2p+1}(\xi-s)^{2q+1}}{(2p+1)!\,(2q+1)!}\, d\xi$$

(c et f fonctions de s, y). La deuxième intégrale est égale à

$$\frac{(x-s)^{2(p+q)+3}}{(2p+1)!\,(2q+1)!}\int_0^1 t^{2p+1}(1-t)^{2q+1}\,dt$$
$$=\frac{(x-s)^{2(p+q)+3}}{(2p+1)!\,(2q+1)!}\,\mathrm{B}[2(p+1),\,2(q+1)]=\frac{(x-s)^{2(p+q)+3}}{[2(p+q)+3]!}.$$

Donc, en changeant le nom de la variable d'intégration,

$$u_1=\int_0^x \sum_p \sum_q \frac{(x-\xi)^{2(p+q)+3}}{[2(p+q)+3]!}\,\frac{\partial^p}{\partial y^p}\left(c\frac{\partial^q f}{\partial y^q}\right) d\xi.$$

Supposons que, dans les résultats des opérations de dérivation, nous ayons remplacé partout les dérivées par leurs *bornes supérieures :* le résultat ainsi obtenu sera une série σ à termes positifs. Si nous considérons la fonction $\overline{u}_1$ obtenue en remplaçant $\frac{\partial^p}{\partial y^p}c(\xi,y)\frac{\partial^q f(\xi,y)}{\partial y^q}$ dans l'expression de u_1 par $\frac{\partial^{p+q}cf}{\partial y^{p+q}}$, et si nous effectuons ensuite la majoration, nous obtenons la série σ plus une autre série σ' à termes tous positifs et le module de u_1 sera donc *certainement inférieur* à $\sigma+\sigma'$. Réunissons maintenant dans $\overline{u}_1$ les $r+1$ termes tels que $p+q=r$: nous voyons alors que les séries majorantes relatives à u_1 et à ses dérivées en y seront limitées par celles qui sont relatives à la fonction

$$\mathrm{U}_1=\frac{x}{2}\int_0^x \sum_r \frac{(x-\xi)^{2r+2}}{(2r+2)!}\,\frac{\partial^r cf}{\partial y^r}\,d\xi.$$

Cela fait, dans l'équation suivante

$$u_2=\int_0^x \sum_r \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!}\,\frac{\partial^p c u_1}{\partial y^p}\,d\xi.$$

substituons U_1 à la place de u_1, puis effectuons les mêmes opérations que plus haut en remplaçant $\frac{\partial^p}{\partial y^p}\left(c\frac{\partial^q cf}{\partial y^q}\right)$ par $\frac{\partial^{p+q}c^2 f}{\partial y^{p+q}}$ et ainsi de suite : nous obtenons ainsi des fonctions U_n, dont les fonctions majorantes

auront toujours une valeur supérieure à celles qui majoreraient les u_n. Or (*voir* § 32)

$$U_n = \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^x \sum_r \frac{(x-\xi)^{2r+n+1}}{(2r+n+1)!} \frac{\partial^r c^n f}{\partial y^r} d\xi.$$

$$\left|\frac{1}{2^n} \frac{\partial^r c^n f}{\partial y^r}\right| < K^n C^n F \frac{(2r)!}{R^r}.$$

D'où

$$|U_n| < K^n C^n F \sum_r \frac{|x|^{2r+n+2}}{(2r+n+2)!} \frac{(2r)!}{R^r} < F \frac{(KCx^2)^n}{(n+2)!} \sum_r \frac{x^{2r+2}}{R^r},$$

ce qui est le terme général d'une série convergente pour $|x| < \sqrt{R}$.

De même

$$\frac{\partial^m U_n}{\partial y^m} = \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^x \sum_r \frac{(x-\xi)^{2r+n+1}}{(2r+n+1)!} \frac{\partial^{r+m} c^n f}{\partial y^{m+r}} d\xi.$$

$$\left|\frac{\partial^m U_n}{\partial y^m}\right| < F \frac{(KCx^2)^n}{(n+2)!} \sum_r \frac{x^{2r+2}}{(2r)!} \frac{[2(r+m)]!}{R^{r+m}},$$

série étudiée antérieurement (§ 35). On trouve ainsi

$$\left|\frac{\partial^m U_n}{\partial y^n}\right| < \frac{F(KC)^n x^{2n+2}}{(n+2)!} \frac{(2m)!}{R'^m}$$

pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle strictement intérieur à $(-\sqrt{R}, +\sqrt{R})$. Il résulte de là que *la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ satisfait à l'équation* ($\mathcal{E}$) (où $a = 0$), car cette série et toutes les séries dérivées en y sont des séries entières en x. On a d'ailleurs [1]

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^m U_n}{\partial y^m}\right| < F \frac{(2m)!}{R'^m} x^2 e^{KCx^2}.$$

Nous avons supposé $a = 0$. S'il n'était pas possible de ramener l'équation primitive à ce cas particulier, on verrait aisément que le raisonnement qui vient d'être donné *fournit également la solution par approximations successives* [2].

---

[1] Il serait possible de former une limitation plus étroite.

[2] La solution, si elle est d'espèce $\mathcal{H}$, ne peut être qu'unique, car, si $f = 0$, l'équation ($\mathcal{E}$) ne peut admettre que la solution identiquement nulle comme on le verrait aisément par le procédé de l'itération.

Proposons-nous maintenant le *problème de Cauchy pour un arc de courbe* Γ *d'espèce* $\mathcal{H}$ $[x = X(y)]$ et supposons que les coefficients deviennent, après le changement de variable $x = x' + X(y)$, des fonctions $\mathcal{H}_R$ dans la région $\mathcal{R}$ définie par $|x'| < h$, $\alpha < y < \beta$. Dans ces conditions si les données et la fonction X sont d'espèce $\mathcal{H}_R$ on obtiendra la solution du problème de Cauchy dans le domaine $\alpha < y < \beta$, $|x - X(y)| < l$, l étant le plus petit des nombres h et $\sqrt{R}$.

La condition relative aux coefficients sera réalisée en particulier *s'ils sont des fonctions* $\mathcal{H}$ *par rapport à l'ensemble des variables* x, y dans une région $\mathcal{R}$ contenant Γ.

37. Le problème du prolongement. — La solution que nous venons de trouver est définie *de part et d'autre* de la courbe Γ. Si, au contraire, on se propose de déterminer la solution au moyen de ses valeurs sur un contour (C) situé dans $\mathcal{R}$, la solution ne sera, en général, définie qu'*à l'intérieur* de ce contour. Proposons-nous de chercher à quelles conditions une solution déterminée dans une région intérieure à $\mathcal{R}$, limitée par un certain contour, est *prolongeable* au delà d'une portion Γ de ce contour ne comprenant aucun segment de caractéristique. Nous dirons avec M. Holmgren que la solution z envisagée est *prolongeable au delà de* Γ, s'il existe, au delà de Γ, une solution régulière z' de l'équation, telle que cette solution et ses dérivées premières se raccordent avec z et ses dérivées le long de Γ, c'est-à-dire que l'*ensemble de* z *et de* z' *constitue une solution régulière unique dans un domaine contenant à son intérieur la courbe* Γ.

M. Holmgren a étudié le *prolongement des solutions de l'équation de la chaleur* en supposant la courbe Γ *analytique*. Nous allons utiliser les résultats établis plus haut pour traiter le problème dans le cas de l'équation ($\mathcal{E}$) en supposant tout d'abord que Γ est un *segment* AB *parallèle à* Oy situé dans la région $\mathcal{R}$ *où les coefficients de l'équation* ($\mathcal{E}$) *sont d'espèce* $\mathcal{H}$ *en* y.

La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une solution régulière de l'équation ($\mathcal{E}$), *définie d'un certain côté de* AB, *soit prolongeable au delà de* AB, *est que les valeurs qu'elle prend sur un*

segment quelconque strictement intérieur à AB *constituent une fonction* $\mathcal{H}$ *de* y :

1° La condition est évidemment *nécessaire* d'après ce que nous avons vu plus haut; 2° la condition est *suffisante*. Soit en effet (ρ) un contour (C) rectangulaire situé dans $\mathcal{R}$ et ayant un côté appliqué sur AB, suivant A′B, le point A′ pouvant être aussi voisin qu'on le veut du point A (A peut être en effet sur le contour de $\mathcal{R}$). z étant une fonction $\mathcal{H}$ sur A′B, nous pouvons appliquer le même raisonnement qu'au paragraphe **55**, mais en prenant des contours successifs (ρ_n) *ayant tous un côté sur* A′B, leurs autres côtés étant parallèles : d désignera alors la distance à ces autres côtés et le raisonnement suivi donnera une limitation valable même sur les points de A′B ([1]). Ceci prouve que $\frac{\partial z}{\partial x}$ *est aussi une fonction* $\mathcal{H}$ *dans tout intervalle intérieur à* AB. Pour un tel intervalle, on peut alors résoudre le problème de Cauchy qui définit une solution *régulière unique d'espèce* $\mathcal{H}$ *de part et d'autre de* AB, coïncidant avec la proposée d'un certain côté.

Au cas où AB est un arc d'espèce $\mathcal{H}$ et d'équation $x = X(y)$ le théorème est encore vrai en supposant que les coefficients deviennent des fonctions $\mathcal{H}$ au voisinage de $x' = 0$ après le changement de variable $x = x' + X(y)$. Donc *l'énoncé donné plus haut s'applique à un arc* AB *d'espèce* $\mathcal{H}$ *et à une équation où les coefficients sont fonctions* $\mathcal{H}$ *en* x, y.

58. Étude des problèmes précédents lorsque les coefficients sont analytiques par rapport à y. — Les considérations précédentes montrent le rapport étroit qui existe entre la nature des coefficients d'une équation aux dérivées partielles et les solutions régulières de celles-ci. Il suffit que les coefficients soient *analytiques en* x *ou d'espèce* $\mathcal{H}$ en y pour que *toute solution régulière* soit elle-même de cette nature. Mais

---

([1]) Avec une petite différence cependant, car la limitation de $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ *sur l'axe des* y devra intervenir dans la limitation de $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, mais comme elle est *connue d'avance*, ceci ne change pas sensiblement le raisonnement; il suffit d'ajouter au second membre de (10) un terme qui est de même forme que les autres.

les liens ne sont pas aussi étroits pour chaque espèce de fonctions et pour chaque variable. Ainsi nous avons vu que l'*analyticité des coefficients* en y n'entraînait celle des solutions que *sous certaines conditions*. Étant donné un contour rectangulaire formé par deux segments de caractéristiques et deux segments parallèles à Oy, si z prend sur chacun de ces segments une succession de valeurs analytiques, z sera une fonction analytique de y à *l'intérieur du contour*. Sera-t-elle *prolongeable* au delà des deux arcs ? En d'autres termes, les résultats démontrés plus haut seront-ils également valables en remplaçant le mot *fonction* $\mathcal{H}$ par le mot *fonction analytique* ?

La question qui se pose tout d'abord est de voir si, dans le cas de l'équation $\delta z = f$, f étant analytique en y, la solution du *problème de Cauchy*, lorsqu'on donne z et $\frac{\partial z}{\partial x}$, fonctions *analytiques de* y, sur un segment de Oy est elle-même *analytique en* y.

Or nous obtenons cette solution en ajoutant à Z_0 la solution z_0 du problème de Cauchy pour $\delta z = 0$, laquelle est bien analytique en y. En est-il de même pour Z_0 ? Si, sur un segment de Oy, nous avons

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right| < \frac{M n!}{R^n},$$

un calcul analogue à celui qui a été fait dans le cas des fonctions $\mathcal{H}$ (§ 55) nous montre que

$$\left|\frac{\partial^n Z_0}{\partial y^n}\right| < \frac{M}{R^n}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!}\,\frac{(n+p)!}{R^p} < \frac{M x^2}{R^n}\,n!\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{2p}p!}{(2p+2)!}.$$

D'où l'on déduit immédiatement l'*analyticité*. Mais nous pouvons opérer autrement en écrivant

$$\sum_p \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!}\,\frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p} = \sum_p \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{p!}\,\frac{p!}{(2p+1)!}\,\frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p}.$$

Si, dans le plan de la variable complexe t, nous envisageons l'intégrale

$$J_p = \int_{-\infty-ih}^{+\infty+ih} e^{-t^2}\, t^{-2p}\, dt.$$

une intégration par parties montre que

$$J_p = -\frac{2}{2p-1} J_{p-1} \qquad (J_0 = \sqrt{\pi}).$$

Donc

$$J_{p+1} = (-1)^{p+1} \frac{2^{2p+1} p!}{(2p+1)!} \sqrt{\pi}, \qquad \frac{p!}{(2p+1)!} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{4}\right)^p \int e^{-t^2} t^{-2p+1} dt.$$

Il résulte de là que la série envisagée peut se représenter par

$$-\frac{(x-\xi)}{2\sqrt{\pi}} \int \sum_{p=0}^{\infty} \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t^2}\right]^p \frac{1}{p!} \frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p} e^{-t^2} \frac{dt}{t^2}$$

$$= -\frac{(x-\xi)}{2\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} f\left[\xi, y - \frac{(x-\xi)^2}{4t^2}\right] \frac{dt}{t^2},$$

puisque f est analytique (développement de Taylor). Donc

$$(13) \qquad Z_0 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^x (x-\xi)\, d\xi \int_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} f\left[\xi, y - \frac{(x-\xi)^2}{4t^2}\right] \frac{dt}{t^2}.$$

On démontrerait de même que

$$\frac{\partial Z_0}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x d\xi \int_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} e^{-t^2} f\left[\xi, y - \frac{(x-\xi)^2}{4t^2}\right] dt.$$

Voyons comment doit être choisi h. Nous supposons que, dans la région $\mathcal{R}$, f est, autour de chaque point, holomorphe dans un cercle dont le rayon minimum est R. Il faudra donc que

$$\left|\frac{(x-\xi)^2}{4t^2}\right| < R, \qquad t > \frac{|x-\xi|}{2\sqrt{R}},$$

ce qui a lieu si $h > \frac{|x|}{2\sqrt{R}}$. On prendra *$h$ supérieur à la valeur maxima de* $\frac{|x|}{2\sqrt{R}}$ dans la région envisagée. Dans ces conditions, il est manifeste que z sera une fonction analytique de y dans cette région.

Plus généralement, si, en posant $y = y_1 + iy_2$, $f(x, y)$ est une fonction analytique de y, quand le point (x, y_1, y_2) varie dans un certain domaine $\mathcal{D}$, qui se réduit à $\mathcal{R}$ pour $y_2 = 0$, Z_0 et $\frac{\partial Z_0}{\partial x}$ sont analytiques

dans le même domaine. Dans l'intégrale qui représente Z_0, il faudra prendre $h > \frac{|x|}{2\sqrt{d}}$, d désignant la plus courte distance du point p (x, y_1, y_2) à la frontière de la section du domaine par le plan passant par p et parallèle à $y_2 O y_1$. Dans ces conditions, si dans le domaine $\mathcal{D}$ on a $|f| < F|x|^p$, on en déduit

$$|Z_0| < \frac{F|x|^{p+2}}{(p+1)(p+2)}, \qquad \left|\frac{\partial Z_0}{\partial x}\right| < \frac{F|x|^{p+1}}{p+1}.$$

Nous pouvons maintenant résoudre le *même problème de Cauchy* (données nulles sur Oy) pour l'équation

$$\delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + cu + f,$$

dont les coefficients sont analytiques en y dans $\mathcal{D}$. Nous formerons la suite d'approximations

$$(14) \qquad \delta u_0 = 0, \qquad \delta u_1 = a\frac{\partial u_0}{\partial x} + cu_0, \qquad \ldots,$$

$u_0, u_1, \ldots$ seront, ainsi que $\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \ldots$, des fonctions analytiques de y dans $\mathcal{D}$, et l'on aura (en supposant x positif)

$$|u_0| < \frac{Fx^2}{2}, \qquad \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| < Fx.$$

On en déduit

$$\left|a\frac{\partial u_0}{\partial x} + cu_0\right| < F\left(Ax + \frac{Cx^2}{2}\right) < MFx.$$

D'où

$$|u_1| < \frac{MFx^3}{3!}, \qquad \left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right| < \frac{MFx^2}{2!},$$

$$\left|a\frac{\partial u_2}{\partial x} + cu_1\right| < MF\left(\frac{Ax^2}{2!} + \frac{Cx^3}{3!}\right) < \frac{M^2Fx^2}{2!},$$

$$|u_2| < \frac{M^2Fx^4}{4!}, \qquad \left|\frac{\partial u_2}{\partial x}\right| < \frac{M^2Fx^3}{3!}$$

et ainsi de suite. On obtiendra ainsi deux séries *absolument et uniformément convergentes* de fonctions analytiques de y dans toute région intérieure à $\mathcal{D}$ et qui, par suite, représente *deux fonctions analytiques*

de y dans la même région [1]. On aura d'ailleurs, pour $x > 0$,

$$|u| < F(e^{Mx} - 1 - Mx), \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < F(e^{Mx} - 1).$$

39. Sur différents problèmes de prolongement. — Ceci établi, revenons à la question que nous nous étions posée. Si une solution de l'équation ($\mathcal{E}$), à coefficients analytiques en y dans le domaine complexe $\mathfrak{D}$, est *analytique en y* sur les côtés verticaux d'un rectangle contenu dans la région réelle $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{D}$, elle est *prolongeable* à droite et à gauche; c'est-à-dire qu'elle constitue une fonction analytique de y dans un domaine faisant partie de $\mathfrak{D}$ et contenant le rectangle. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que $\frac{\partial z}{\partial x}$ se réduit pour chacun des arcs à une fonction analytique de y [2]. Mais *il ne suffit pas que z soit analytique sur un seul côté du rectangle* pour qu'elle puisse être prolongée au delà suivant une fonction analytique. Elle est prolongée suivant une fonction $\mathcal{H}$ dont toutes les dérivées se raccordent avec celles de la solution sur l'arc de courbe, mais ce prolongement ne sera pas nécessairement analytique.

Dans le cas où le contour (C) n'est plus rectangulaire, mais où C_1 et C_2 sont analytiques, les résultats précédents sont encore vrais si le changement de variable $x' = \frac{l(x - X_1)}{X_2 - X_1}$ transforme les coefficients en fonctions analytiques de y, quand x' appartient à un intervalle contenant l'intervalle $(0, l)$.

Si l'on suppose maintenant que les coefficients soient des fonctions analytiques de x et de y, les formules (13) et (14) nous montrent que la solution du *problème de Cauchy avec des données analytiques* (et pour un arc analytique que nous transformerons en un segment

---

[1] Il va sans dire que si $\frac{\partial a}{\partial x}$ existe, il convient de faire le changement d'inconnue qui annule a.

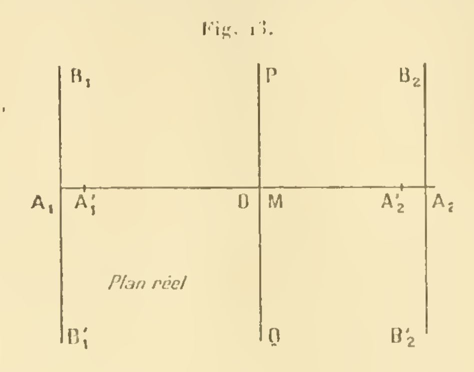
[2] On le voit en répétant avec très peu de modifications le raisonnement qui a été fait dans le cas des fonctions $\mathcal{H}$. On prendra alors des contours successifs formés par les côtés verticaux du rectangle et les parallèles au côté horizontal. A chaque dérivation, il s'introduit à la fois la distance d à ce côté, au premier degré, et le nombre n (et non plus n^2) : ces deux faits sont connexes.

Ceci résulte aussi de ce qui a été vu dans la deuxième Partie de ce Chapitre.

de Oy) sera elle même analytique, ce que nous savions déjà par le *théorème classique*.

Si z est donné par ses valeurs sur un contour (C), ces valeurs étant analytiques en y sur C_1 et C_2, la solution du problème de Cauchy sera possible pour tout segment parallèle à Oy et intérieur à (C) ([1]), puisque $\frac{\partial z}{\partial x}$ sera fonction analytique de y sur ce segment; elle sera possible aussi pour un arc analytique intérieur à C et *même pour* C_1 *et* C_2. La résolution du problème de Cauchy nous donne alors une fonction *analytique* de x et y, *coïncidant avec la solution proposée*. Donc

Fig. 13.



le *prolongement est possible*, relativement à l'ensemble des variables x, y, à *l'intérieur d'une bande* comprise entre les deux caractéristiques qui comprennent les deux arcs C_1 et C_2 du contour (C).

Le prolongement est-il possible également au-dessous du segment A_1A_2 de caractéristique? Pour cela, il est tout d'abord *nécessaire* que la valeur prise sur celui-ci soit une *fonction analytique de x*. Rechercher les conditions suffisantes serait un problème assez difficile. Bornons-nous, par exemple, au cas de l'équation de la chaleur $\delta z = 0$, avec un contour rectangulaire.

Si, sur un segment $A'_1 A'_2$ intérieur à $A_1 A_2$ (*fig.* 13), la valeur de z est une *fonction analytique de x*, nous pourrons *d'une infinité de façons*

([1]) Nous avons déjà vu ceci dans le paragraphe **51** même pour les équations non linéaires. Le résultat relatif au prolongement est également vrai pour les équations non linéaires.

prolonger la solution au-dessous de $A'_1 A'_2$, suivant une fonction analytique de x, mais non de y, si les valeurs de z sur AC et BD sont quelconques. Si, en effet, nous prenons un point M sur $A_1 A_2$, nous connaissons en M les valeurs de $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ et $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x \partial y^n}$ quel que soit n : z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sont sur l'arc PM des fonctions $\mathfrak{R}$, même au point M, et nous pouvons, d'une infinité de façons, les prolonger au delà de M, de façon à obtenir une fonction $\mathfrak{R}$ sur un segment PQ (*voir* paragraphe suivant). Alors la solution du problème de Cauchy relatif à ces données et au segment PQ nous donnera une fonction qui coïncide avec la solution au-dessus de $A_1 A_2$ et sur $A_1 A_2$ lui-même, et qui sera analytique en x.

Le cas où l'on veut avoir un prolongement *analytique en x et y* a été traité par M. Lalesco. La valeur de la solution sur toute caractéristique doit être une *fonction entière d'ordre* $\leqq$ 2 et sa connaissance suffit à déterminer la solution de part et d'autre de la caractéristique.

60. Un problème relatif a la physique mathématique. — Quelle doit-être la nature de la donnée sur $A_1 A_2$ pour que z puisse être prolongeable *au-dessous de* $A_1 A_2$, de façon à prendre des valeurs déterminées *sur les prolongements* $A_1 B'_1$ et $A_2 B'_2$ de $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$? En d'autres termes, si l'on se reporte à la *signification physique* du problème : étant donnée la portion d'un milieu indéfini limitée par deux plans parallèles et dans laquelle on étudie la distribution de la température supposée uniforme dans chaque tranche parallèle à ces plans, connaissant la température initiale en chaque point et la température des deux plans frontières à chaque instant, quelles doivent être ces données pour que l'état du corps puisse être considéré comme résultant d'un *état antérieur à l'instant initial?* C'est le problème que s'est posé M. Appell, dans le cas d'un milieu *indéfini dans tous les sens*.

L'étude de l'analyticité va nous donner ici une condition nécessaire : envisageons le plan de la variable complexe x (*fig.* 14) et marquons sur l'axe réel le segment $\overline{A}_1 \overline{A}_2 = A_1 A_2$; les valeurs prises par z sur $\overline{A}_1 \overline{A}_2$ doivent définir *une fonction* $\Phi(x)$ *analytique dans le carré de diagonale* $\overline{A}_1 \overline{A}_2$, *continue sur le contour du carré*. Ceci résulte de ce que nous avons dit dans le paragraphe **45** (en note).

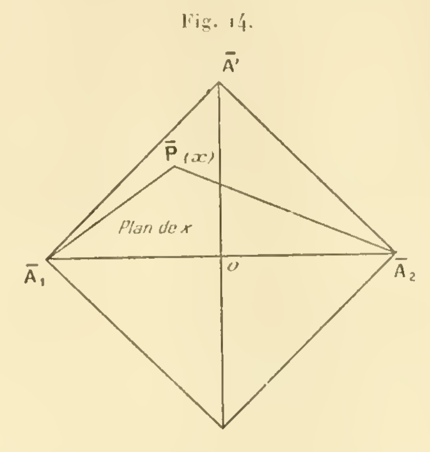
Cette condition est aussi suffisante. Pour le voir, remarquons tout

d'abord que si $\Phi(x)$ est une fonction analytique de x satisfaisant à la condition que nous venons de donner, l'intégrale

$$\mathcal{H}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} \Phi(\xi)\, d\xi,$$

x_1 et x_2 étant les abscisses de $\overline{A}_1$ et $\overline{A}_2$, est une fonction analytique de x dont la valeur peut être calculée en prenant pour chemin d'intégration la ligne brisée $\overline{A}_1 \overline{P} \overline{A}_2$: quand y tend vers zéro et x vers x_0, x_0 étant un point intérieur au carré ou sur son contour, l'intégrale tend vers $\Phi(x_0)$ (nous pouvons supposer Φ nul en $\overline{A}_1$ et $\overline{A}_2$).

Fig. 14.



Cela posé, soit O le milieu de $A_1 A_2$, que nous supposons à l'origine (*fig.* 13) : effectuons le prolongement, au-dessous de $A_1 A_2$, de la fonction $z(0, y)$. Pour cela posons

$$\Phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$
$$\Phi(ix) = a_0 + i a_1 x - a_2 x^2 + \ldots = \varphi(x^2) + i x \psi(x^2).$$

La dérivée $\dfrac{\partial^n z(0, y)}{\partial y^n}$, pour $y = 0$, est égale à $(2n)!\, a_{2n}$: pour avoir une fonction de y, définie pour $y < 0$, et dont la dérivée $n^{\text{ième}}$, pour $y = 0$, soit égale à a_{2n}, formons une solution z' de l'équation $\dfrac{\partial^2 z'}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial z'}{\partial y}$ prenant sur $A_1 A_2$ la valeur $\varphi(x^2)$ et sur $A_1 B'_1$, $A_2 B'_2$ des valeurs $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$.

On aura, au point O, $\dfrac{\partial^n z'}{\partial y^n} = (-1)^n \dfrac{\partial^{2n} z'}{\partial x^{2n}} = (2n)!\, a_{2n}$. Par conséquent,

$z'(0, y)$ constitue un prolongement de $z(0, y)$. Nous constituerons de même, avec la dérivée par rapport à x d'une solution z'' prenant sur A_1A_2 la valeur $x\psi(x^2)$, un prolongement de $\frac{\partial z}{\partial x}(0, y)$. Soient $f(y)$ et $g(y)$ les fonctions ainsi calculées.

Remarquons que φ a une valeur bien déterminée aux points A_1 et A_2 : en effet, dans le plan de la variable complexe x, $\Phi(ix)$ est la valeur de Φ au point obtenu en faisant tourner le point d'abscisse x de 90° autour du point O. Donc $\varphi(x_2^2) + ix_2\psi(x_2^2) = \Phi(\overline{A}')$, $\overline{A}'$ étant sur le contour du carré. Or, nous avons supposé Φ continue sur le contour du carré. φ est donc continue en A_1 et A_2 et nous devrons choisir χ_1 et χ_2 se raccordant avec φ en ces points. Même raisonnement pour ψ.

Formons maintenant la solution z_1 du problème de Cauchy relatif à l'équation $\delta z = 0$, au segment POQ (*fig.* 13) et aux données $f(y)$ et $g(y)$: cette solution prend évidemment la valeur $\Phi(x)$ sur A_1A_2; elle est définie à l'intérieur du contour $B_1A_1A_2B_2$ et sur les côtés $A_1B'_1A_2B'_2$ eux-mêmes. En effet, en un point de OQ, on a

$$\frac{\partial^{2n} z_1}{\partial x^{2n}} = (-1)^n \frac{\partial^{2n} z'}{\partial x^{2n}}, \qquad \frac{\partial^{2n+1} z_1}{\partial x^{2n+1}} = (-1)^n \frac{\partial^{2n+1} z''}{\partial x^{2n+1}},$$

et par suite, x étant réel, on peut écrire

$$z_1(x, y) = \text{partie réelle de } [z'(ix, y) - iz''(ix, y)\, dx].$$

Or, cette fonction est définie et continue même pour $x = x_1$ et $x = x_2$ (ici $x_1 = -x_2$) puisqu'on obtient pour ces valeurs de x le point $\overline{A}'$ et son symétrique, de sorte que $z'(ix_2, y)$ et $z''(ix_2, y)$, par exemple, sont les valeurs de z' et z'' au point $\overline{A}'$. Quand y tend vers zéro, d'après ce que nous avons dit plus haut, $z'(ix_2, y)$ tend vers $\varphi(\overline{A}') = \varphi(-x_2^2)$, quantité réelle, car, si nous avons représenté z' par des fonctions $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{K}$, la fonction $\mathfrak{K}$ seule intervient ici. Donc pour $x = x_2$ et $y = 0$, la partie réelle de $z'(ix, y)$ est $\varphi(-x_2^2)$; de même $z''(ix, y)$ prend la valeur $ix_2\psi(-x_2^2)$ et, par suite en A_2, z_1 prend la valeur

$$\varphi(-x_2^2) + x_2\psi(-x_2^2) = \Phi(x_2).$$

Nous trouvons donc bien ainsi une fonction prenant la valeur $\Phi(x)$

sur A_1A_2 et des valeurs continues sur $A_1B'_1$, $A_2B'_2$, se raccordant avec Φ en A_1 et A_2.

V. — Sur un théorème d'existence.

61. Impossibilité d'un certain problème relatif aux solutions analytiques. — Nous allons envisager maintenant le problème du prolongement analytique dans le cas où l'on se donne les valeurs de la solution sur *deux arcs de courbes analytiques sécants*. Si nous nous bornons à l'équation de la chaleur $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, le problème sera donc le suivant : *peut-on obtenir une solution de cette équation analytique autour d'un point du plan et prenant des valeurs données sur deux arcs de courbes analytiques passant par ce point?* Cette question a été envisagée dernièrement par M. Levi, qui a trouvé quelques cas d'exception, mais qui n'a pu décider si le problème était possible en général. Nous allons montrer que, *en général, le problème est impossible*.

Bornons-nous à un exemple simple, en supposant que les deux courbes soient l'axe Oy et la bissectrice OR de xOy et que la solution doive être nulle sur Oy. On peut toujours supposer cette dernière hypothèse réalisée, car, si la donnée est $\varphi_1(y)$ sur Oy, il suffit d'envisager la solution $z - \zeta$, ζ étant une solution analytique prenant la valeur φ_1 sur Oy. Soit donc $\varphi(y)$ la valeur sur OR avec la condition $\varphi(0) = 0$. Si la solution cherchée existe, elle doit se réduire sur Ox à une fonction impaire entière $\psi(x)$. On aura

$$z(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} \psi(\xi)\, d\xi.$$

Écrivons que, sur OR, z prend la valeur $\varphi(y)$. Il vient

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4y}} \psi(\xi)\, d\xi = \varphi(y);$$

ψ étant une fonction impaire, le changement de la variable ξ en $-\xi$ montre que

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(y+\xi)^2}{4y}} \psi(\xi)\, d\xi = \varphi(y).$$

φ est donc la demi-somme des deux intégrales, et la fonction ψ satisfait à l'équation

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{-\frac{y}{4}}\,e^{-\frac{\xi^2}{4y}}\operatorname{sh}\frac{\xi}{2}\,\psi(\xi)\,d\xi=\varphi(y).$$

Posons

$$\operatorname{sh}\frac{\xi}{2}\,\psi(\xi)=\xi^2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\,\xi^{2n},$$

$$e^{\frac{y}{4}}\,\varphi(y)=y\sum a_n\,y^n,$$

puis faisons le changement de variable $\xi=2t\sqrt{y}$. Il vient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\sum\alpha_n\,2^{2(n+1)}\,t^{2(n+1)}\,y^n\,dt=\sum a_n\,y^n.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,t^{2(n+1)}\,dt=\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}1.3\ldots(2n+1)\,\alpha_n\,2^{n+1}\,y^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,y^n,$$

par suite

$$\alpha_n=\frac{a_n}{2^{n+1}\,1.3\ldots(2n+1)}.$$

Or nous avons posé

$$\psi(x)=\frac{x^2}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}\sum\alpha_n\,x^{2n},$$

et $\psi(x)$ doit être une fonction entière d'ordre $\leqq 2$. Par conséquent, *il est nécessaire que la fonction*

$$\frac{x^2}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\,x^{2n}}{2^n\,1.3\ldots(2n+1)},$$

soit une fonction entière d'ordre $\leqq 2$. Il est clair que *ceci n'aura pas lieu en général*, car $\operatorname{sh}\frac{x}{2}$ admet pour zéros les points $x=2K\pi i$, et il faudrait tout d'abord que la série Σ admette ces zéros.

Donnons d'ailleurs un exemple simple de l'impossibilité du pro-

blème. Prenons $f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$. Alors nos formules nous montrent que $\varphi(y) = 2ye^{-\frac{y}{4}}$. Nous avons ainsi une solution unique, nulle sur Oy et égale sur OR à une fonction analytique. Elle se réduit sur Ox à $f(x)$ non entière; donc *elle n'est pas prolongeable au-dessous de Ox.*

62. CAS OU LES ARCS DE COURBE NE SONT PAS SÉCANTS. — Qu'arriverait-il si les arcs de courbe portant les données *n'étaient pas sécants?* Soient A_1B_1, A_2B_2 ces arcs, compris entre les caractéristiques A_1A_2, B_1B_2. Nous avons vu que si, en envisageant un contour (C) formé par un segment de caractéristique et deux arcs analytiques, on se donnait la valeur de z (celle-ci étant analytique sur les deux arcs analytiques), la solution était analytique en x et y et existait dans toute la bande limitée par les caractéristiques extrêmes. Par conséquent, dans le cas actuel, si nous nous donnons une *fonction arbitraire* représentant la valeur de z sur A_1A_2, la solution, prenant les valeurs données sur le contour (C) formé par $B_1A_1A_2B_2$, répondra à la question : sur toute caractéristique coupant A_1B_1, elle se réduit à une *fonction entière d'ordre* $\leqq 2$.

Il est intéressant de voir comment ce problème peut être rattaché à la théorie des équations fonctionnelles. Supposons que A_1B_1 et A_2B_2 soient des segments parallèles à Oy ($x = 0$ et $x = h$) et soit a_1a_2 un segment de caractéristique ($y = y_0$) qui les coupe. La détermination de z revient à celle de la fonction entière $\psi(x)$ à laquelle z doit se réduire pour $y = y_0$. Supposons-nous placés dans le cas où les données sont zéro sur A_1B_1 et $\varphi(y)$ sur A_2B_2. $\psi(x)$ sera impaire et, au point a_2, nous devrons avoir

$$\left(\frac{d^{2n}\psi}{dx^{2n}}\right)_{x=h} = \left(\frac{d^n\varphi}{dy^n}\right)_{y=y_0}.$$

Donc ψ satisfait à la relation

$$\psi(h+x) + \psi(h-x) = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}\frac{d^n\varphi}{dy_0^n} = \omega(x^2),$$

on en déduit aisément que $\psi(x)$ est une *fonction impaire, solution*

de l'équation fonctionnelle

$$(15) \qquad \psi(x+2h)-\psi(x)=g(x), \qquad g(x)=\omega[(x+h)^2].$$

L'équation (15) est une équation envisagée par Abel. Si $\Psi(x)$ est une solution quelconque de cette équation, on vérifie sans peine, d'après la forme de g, que $\dfrac{\Psi(x)-\Psi(-x)}{2}$ est une solution impaire.

Ceci nous montre que l'équation (15) admet une infinité de solutions d'ordre ≤ 2. Il est clair qu'elle ne peut pas admettre de solution d'ordre inférieur à celui de g.

Si nous avions pris comme données $\varphi_1(y)$ et $\varphi_2(y)$, nous aurions obtenu

$$\psi(x)+\psi(-x)=f(x^2),$$
$$\psi(h+x)+\psi(h-x)=g(x^2),$$

f et g étant des fonctions entières d'ordre ≤ 2. Ce système admet pour ψ une *infinité de solutions*, parmi lesquelles il y en a *une infinité qui sont des fonctions entières d'ordre* ≤ 2. Si f et g sont d'ordre $2-\alpha$, ψ ne peut être d'un ordre inférieur.

NOTE SUR LE CONTOUR RECTANGULAIRE.

Cette Note a pour objet d'établir, dans le cas du contour rectangulaire, les résultats qui figurent dans les paragraphes 4', 5', 6', 7', 15 (*cf.* aussi § 54).

Lorsqu'on fait l'étude des solutions de l'équation $\delta z = f$, toutes les questions concernant l'existence des dérivées au bord et la limitation de leurs accroissements sont, en effet, particulièrement simples à traiter dans le cas d'un contour rectangulaire. Une simple transformation de coordonnées, qui ne change pas la forme de l'équation, nous permet toujours de prendre, comme équations des côtés du contour, $y = 0$, $x = 0$, $x = a$, soit Ox, Oy, AB : les données respectives sont $\Phi(x)$, $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$.

Envisageons tout d'abord l'équation $\delta z = 0$ et, comme au paragraphe 5, formons la fonction $\bar{z}$ prenant sur Ox la valeur $\Phi(x)$, puis posons $z = \bar{z} + z_1$, avec

$$(1) \qquad z_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \varphi_1(\eta)\, d\eta + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{a-x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4(y-\eta)}} \varphi_2(\eta)\, d\eta,$$

φ_1 et φ_2 étant les solutions du système

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi_1(\eta) - \bar{z}(0, \eta) \equiv F_1(\eta) = \varphi_1(\eta) + \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^\eta \frac{a}{(\eta - s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4(\eta-s)}} \varphi_2(s)\, ds & [F_1(0) = 0], \\ \Phi_2(\eta) - \bar{z}(a, \eta) \equiv F_2(\eta) = \varphi_2(\eta) + \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^\eta \frac{a}{(\eta - s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4(\eta-s)}} \varphi_1(s)\, ds & [F_2(0) = 0]. \end{cases}$$

Le grand avantage de ces deux équations est que les deux intégrales sont indéfiniment dérivables par rapport à y, si φ_1 et φ_2 sont continues. Par conséquent, *si* $F_i(y)$, $(i = 1, 2)$, *admet par rapport à* y *un accroissement d'ordre* γ, c'est-à-dire si l'on a

$$|F_i(y) - F_i(\eta)| < (L)|y - \eta|^\gamma,$$

il en sera de même de φ_i. De plus $\varphi_i(0) = 0$ et $|\varphi_i(y)| < (L) y^\gamma$.

Proposons-nous, par exemple, de calculer $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}$. Nous mettrons $\frac{\partial H}{\partial x}$ sous la forme (*cf.* § 4)

$$(1') \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{y} \frac{\xi}{(s-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\xi^2}{4(s-\eta)}} \bar{\varphi}_1(s; x, y)\, ds + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{y} \frac{a-\xi}{(s-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\xi^2}{4(s-\eta)}} \bar{\varphi}_2(s; x, y)\, ds.$$

$\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ étant données par les deux équations

$$-\frac{x e^{-\frac{x^2}{4(y-s)}}}{2(y-s)^{\frac{3}{2}}} = \bar{\varphi}_1(s; x, y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s}^{y} \frac{a}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4(t-s)}} \bar{\varphi}_2(t; x, y)\, dt,$$

$$\frac{(a-x) e^{-\frac{(a-x)^2}{4(y-s)}}}{2(y-s)^{\frac{3}{2}}} = \bar{\varphi}_2(s; x, y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s}^{y} \frac{a}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4(t-s)}} \bar{\varphi}_1(t; x, y)\, dt.$$

Posons alors

$$(2') \qquad \bar{\varphi}_1 = -\frac{x e^{-\frac{x^2}{4(y-s)}}}{2(y-s)^{\frac{3}{2}}} + \psi_1, \qquad \bar{\varphi}_2 = \frac{(a-x) e^{-\frac{(a-x)^2}{4(y-s)}}}{2(y-s)^{\frac{3}{2}}} + \psi_2.$$

Les équations en $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ deviennent alors des équations en ψ_1 et ψ_2 avec les mêmes noyaux; dans la première, par exemple, le terme connu sera

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s}^{y} \frac{a}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4(t-s)}} \frac{a-x}{2(y-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(a-x)^2}{4(y-t)}} dt,$$

et ceci est une fonction continue de s, x, y pour $s < y$ et $x < a$, et qui, pour $x = a$, a une limite qui est continue en y et s. Donc, ce terme est partout [1] continu pour $0 \leq s \leq y$. De même pour la deuxième équation. Par suite, ψ_1 et ψ_2 seront partout continues et l'on pourra écrire, g_1 étant *partout continue*,

$$(1'') \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{2} V[\xi, \eta; x, y] - h_0(\xi, \eta; x, y) - g_1(\xi, \eta; x, y).$$

---

[1] Quand nous emploierons dans cette Note le mot *partout*, nous entendrons par là : dans le rectangle, contour compris. D'autre part, la lettre γ (ou γ') désignera toujours un nombre compris entre *zéro* et *un*, sinon il peut s'introduire pour la valeur *un* des termes logarithmiques, comme au paragraphe **13**.

h_0 étant le terme obtenu en remplaçant, dans l'expression (1′) de $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ respectivement par les deux premiers termes des formules (2′) [*cf.* § 4, formules (9) et (11)].

Passons maintenant à l'*étude des accroissements :* commençons par étudier les accroissements de z par rapport à x.

Si l'on a $(h > 0)$

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| < (L)h^{\alpha},$$

la fonction $\bar{z}(x+h, y) - \bar{z}(x, y)$, solution de $\delta z = 0$, nulle à l'infini et dont le module est $< (L)h^{\alpha}$ sur Ox, admettra partout cette limitation (§ 18).

Quant à z_1, pour l'étudier il *nous suffit d'envisager la première intégrale* $\mathfrak{J}$ de la formule (1), l'autre étant analogue. Or, si l'on a

$$(i) \qquad |\mathfrak{J}(h, y) - \mathfrak{J}(+0, y)| < (L)h^{\gamma},$$

la fonction $\mathfrak{J}(x+h, y) - \mathfrak{J}(x, y)$, solution de $\delta z = 0$, admettra partout cette limitation, puisqu'elle l'admet sur Oy et est nulle sur Ox et à l'infini. Cela posé :

1° *Si* $|\Delta F_i| < (L)\Delta y^{\frac{\gamma}{2}}$, *on a* $|z_1(x+h, y) - z_1(x, y)| < (L)h^{\gamma}$. — En effet, $\Delta\varphi_i$ satisfait à la même inégalité que ΔF_i. Écrivons alors

$$\mathfrak{J} = \frac{\varphi_1(y)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} d\eta + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y x \frac{\varphi_1(\eta) - \varphi_1(y)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} d\eta.$$

Si nous appelons $\mathfrak{J}_1$ et $\mathfrak{J}_2$ ces deux intégrales, nous avons aisément

$$|\mathfrak{J}_1(h, y) - \mathfrak{J}_1(+0, y)| = \frac{|\varphi_1(y)|}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{h^2}{4y}} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds, \qquad \left[s = \frac{x^2}{4(y-\eta)}\right].$$

Or $|\varphi_1(y)| < (L)y^{\frac{\gamma}{2}}$. Si donc nous posons $h^2 = 4\lambda y$, le second membre sera inférieur à $(L)h^{\gamma}\lambda^{-\frac{\gamma}{2}} \int_0^{\lambda} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds$. Le terme en λ reste toujours fini et l'expression envisagée est donc $< (L)h^{\gamma}$.

D'autre part $\mathfrak{J}_2(0, y) = 0$ et $|\mathfrak{J}_2(h, y)| < (L)h^{\gamma}$, comme on le voit par le même changement de variable. D'après ce que nous avons dit

plus haut, l'accroissement de $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}$ est donc d'ordre γ, l'inégalité (i) étant vérifiée : d'où l'accroissement de z_1.

2° *Si* $|\Delta F_i| < (L)\Delta y^{\frac{\gamma+1}{2}}$, $\dfrac{\partial z_1}{\partial x}$ *existe partout.* — On a, en effet, d'après la formule (7) du paragraphe 2,

$$\frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial x} = -\frac{\varphi_1(y)}{\sqrt{\pi y}}\, e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

et ceci tend vers zéro avec y. Si l'on calcule $\dfrac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial x}$, on constate immédiatement que cette intégrale est continue et tend aussi vers zéro avec y. $\dfrac{\partial z_1}{\partial x}$ est donc continue au bord ([1]).

3° *Si* F'_i *existe (avec* $F'_i(0) = 0$*) et si* $|\Delta F'_i| < (L)\Delta y^{\frac{\gamma}{2}}$, $\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$ *et* $\dfrac{\partial z_1}{\partial y}$ *existent partout et* $\left|\dfrac{\partial z_1}{\partial y}(x+h, y) - \dfrac{\partial z_1}{\partial y}(x, y)\right| < (L)h^\gamma$. — En effet, d'après (2), φ'_i existe et $\varphi'_i(0) = 0$; donc, $\mathfrak{z}$ étant le premier terme de z_1,

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\partial V}{\partial \eta}(0, \eta; x, y)\,\varphi_1(\eta)\,d\eta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}\,\varphi'_1(\eta)\,d\eta,$$

et l'on est ramené au 1°.

Envisageons maintenant les accroissements Δ *par rapport à* y.

4° *Si* $|\Delta F_i| < (L)\Delta y^\gamma$, *on a* $|\Delta z_1| < (L)\Delta y^\gamma$. — En effet, $|\varphi_i(y)| < (L)y^\gamma$ et, d'après la formule de limitation (6), § 2, des intégrales $\mathfrak{z}$, $|z_1(0, k)| < (L)k^\gamma$. La fonction $z_1(x, y+k) - z_1(x, y)$, solution de $\delta z = 0$, se réduit sur Ox à $z_1(0, k)$ et sur les côtés verticaux à $F_i(y+k) - F_i(y)$. Elle a donc partout la limitation $(L)k^\gamma$.

([1]) On déduit aisément de là les formules de la deuxième Note du paragraphe 5* : en effet, avec les notations de cette Note, on a alors $|\Delta\varphi_1| < (L)\Delta y^{\frac{1+\gamma}{2}}$, d'où la limitation de $\dfrac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial x}$. Si $\Phi(x)$ est simplement continue, on pose $\varphi_i = \psi_i + \chi_i$, les fonctions ψ_i et χ_i étant les solutions des équations (2) dans lesquelles on prend pour premier membre $\Phi_i(\eta)$, puis $-\bar{z}(0, \eta)$ [et $-\bar{z}(a, \eta)$]. Alors $\psi_i(0) \neq 0$ et il s'introduit $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$ dans la limitation des intégrales $\dfrac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}$ portant sur ψ_i. De plus $\dfrac{d\bar{z}(0, \eta)}{d\eta}$ est de la forme $\dfrac{\bar{\zeta}}{\eta}$: dans les intégrales $\mathfrak{z}$ portant sur χ_i, on décomposera l'intervalle d'intégration en deux intervalles égaux $\left(0, \dfrac{y}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{y}{2}, y\right)$; dans le premier on dérivera le noyau, dans le deuxième on appliquera la formule (7) (§ 2), et l'on aura ainsi $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\zeta}{\sqrt{y}}$ (ζ continue partout).

5° *Si* F'_i *existe* $[F'_i(0)=0]$ *et si* $|\Delta F'_i| < (L)\Delta y^{\gamma}$, $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ *existe partout et* $\left|\Delta \frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < (L)\Delta y^{\gamma}$. — Même démonstration, en considérant $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ comme solution de $\delta z = 0$.

6° *Si* $|\Delta F'_i| < (L)\Delta y^{\frac{\gamma}{2}}$, *on a* $\left|\Delta \frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < (L)\Delta y^{\frac{\gamma+1}{2}}$, *et enfin si* $|\Delta F'_i| < (L)\Delta y^{\frac{1+\gamma'}{2}}$, $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y}$ *existe partout.* — En effet, on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \varphi'_1(\eta)\, d\eta.$$

Cette intégrale est une solution de $\delta z = 0$, nulle sur Ox et à l'infini, et se réduisant sur Oy à la fonction $-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\varphi'_1(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\, d\eta$, laquelle admet un accroissement d'ordre $\frac{1}{2}$, si l'on ne fait aucune hypothèse sur φ'_1, et d'ordre $\frac{\gamma+1}{2}$, si l'accroissement de φ'_1 est d'ordre $\frac{\gamma}{2}$. Il est inutile de reproduire ce calcul facile. Quant à $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial y}$, il suffit, pour constater son existence partout dans le cas indiqué, de reproduire sur $\frac{\partial z}{\partial y}$ (*voir* 3°) la décomposition du 1° et le raisonnement du 2°.

Nous pouvons donc, en nous rappelant ce qui a été fait sur $\bar{z}$ relativement à y [1] (§ 7), énoncer les résultats suivants, qui servent à l'étude de l'équation $r = f(x, y, z, p, q)$:

Si Φ'_i, Φ', Φ'' existent, avec $|\Delta\Phi'_i| < (L)\Delta y^{\frac{\gamma}{2}}$ et $|\Delta\Phi''| < (L)\Delta x^{\gamma}$, on a, par rapport à x,

$$(3)\qquad |\Delta z| < (L)\Delta x, \qquad \left|\Delta\frac{\partial z}{\partial x}\right| < (L)\Delta x, \qquad \left|\Delta\frac{\partial z}{\partial y}\right| < (L)\Delta x^{\gamma},$$

et par rapport à y

$$|\Delta z| < (L)\Delta y, \qquad \left|\Delta\frac{\partial z}{\partial x}\right| < (L)\Delta y^{\frac{\gamma+1}{2}}, \qquad \left|\Delta\frac{\partial z}{\partial y}\right| < (L)\Delta y^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Si $|\Delta\Phi'_i| < (L)\Delta y^{\frac{\gamma'+1}{2}}$ et si Φ''' existe, avec $|\Delta\Phi'''| < (L)\Delta x^{\gamma'}$, on a

$$|\Delta z| < (L)\Delta y, \qquad \left|\Delta\frac{\partial z}{\partial x}\right| < (L)\Delta y, \qquad \left|\Delta\frac{\partial z}{\partial y}\right| < (L)\Delta y^{\frac{1+\gamma'}{2}}.$$

---

[1] L'accroissement de F_i dépend en effet de celui de Φ_i et de celui de $\bar{z}$, puisque $F_1(y) = \Phi_1(y) - \bar{z}(0, y)$, $F_2(y) = \Phi_2(y) - \bar{z}(a, y)$.

Ces deux derniers cas peuvent se réunir dans les formules

$$(3') \qquad |\Delta z| < (L)\,\Delta y, \qquad \left|\Delta \frac{\partial z}{\partial x}\right| < (L)\,\Delta y^{\gamma+\beta}, \qquad \left|\Delta \frac{\partial z}{\partial y}\right| < (L)\,\Delta y^{\gamma}.$$

β étant le plus petit des nombres $\frac{1}{2}$ et $1-\gamma$.

Passons maintenant à l'étude de l'équation $\delta z = f$. Si f satisfait à la condition (33), paragraphe **15**, il résulte du paragraphe **14** et des formules (3′) que les inégalités (34), paragraphe **15**, sont vérifiées avec $\gamma = \gamma'$. Envisageons maintenant le cas qui se présente au paragraphe **55**, à savoir

$$f(x,0)=0, \qquad |f(x,y)| < \mathrm{K}\,y^{\frac{\gamma}{2}}, \qquad |f(x+h,y)-f(x,y)| < \mathrm{K}\,h^{\gamma}.$$

Nous avons alors, U étant toujours la solution fondamentale (*voir* § **10**),

$$(4) \qquad \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} = -f(x,y) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{\mathrm{S}_y} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}[f(\xi,\eta)-f(x,\eta)]\,d\mathrm{S}$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{y} \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} f(x,\eta)\,d\eta + \ldots,$$

le terme non écrit étant une intégrale analogue à la précédente. Si nous voulons avoir la solution Z_0 de $\delta z = f$, nulle sur le contour, solution partout *régulière* puisque $f(x,0)=0$, nous ajouterons à Z la solution z_0 de $\delta z = 0$, nulle sur $\mathrm{O}x$ et prenant sur les côtés verticaux $\mathrm{O}y$ et AB la même valeur que $-\mathrm{Z}$. Donc, d'après la formule précédente, $\frac{\partial z_0}{\partial y}$ se réduit sur $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, AB, à zéro, $-\frac{1}{2}f(0,y)$, $-\frac{1}{2}f(a,y)$: par suite, $\frac{\partial z_0}{\partial y}$ sera donnée par les équations (1) et (2), dans lesquelles on a posé

$$\mathrm{F}_1(\eta) = -\frac{1}{2}f(0,\eta), \qquad \mathrm{F}_2(\eta) = -\frac{1}{2}f(a,\eta).$$

$\varphi_1(\eta)$ peut donc s'écrire

$$\varphi_1(\eta) = -\frac{1}{2}f(0,\eta) + \frac{1}{2}\psi_1(\eta),$$

ψ_1 étant une fonction continue, qui, ainsi que sa dérivée, est limitée par $(\mathrm{L})\mathrm{K}\,\eta^{\frac{\gamma}{2}}$. Nous avons pour φ_2 des conclusions analogues. Donc, pour avoir $\frac{\partial \mathrm{Z}_0}{\partial y}$, il suffit de remplacer dans la formule (4) les intégrales

simples par

$$(5)\qquad \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \{[f(x,\eta)-f(0,\eta)]+\psi_1(\eta)\}\, d\eta,$$

et une autre analogue. On voit alors que $\frac{\partial Z_0}{\partial y}$ contient des intégrales simples limitées en fonction de $Ky^{\frac{\Upsilon}{2}}$. Quant à l'intégrale double, elle admet une limitation analogue, car elle se compose d'intégrales $I_{\Upsilon,\frac{3}{2}}$ et $I_{\Upsilon+2,\frac{5}{2}}$ [*voir* § **8**, formules (24')].

Voyons maintenant les accroissements par rapport à x : nous aurions à faire la décomposition de l'aire d'intégration, qui est figurée dans la figure 6bis du paragraphe **15**, avec une analyse analogue à celle du paragraphe **14**. La partie de l'accroissement de $\frac{\partial Z_0}{\partial y}$, qui est relative à l'accroissement de $f(x,y)$ dans l'intégrale double, se détruit avec le terme correspondant des intégrales simples, comme dans le paragraphe **14**. Il ne reste donc que les accroissements résultant de l'accroissement de U : ils sont $<(L)Kh^{\Upsilon}$, en ce qui concerne l'intégrale double. Quant à l'intégrale (5), elle se décompose en deux parties : celle qui contient ψ_1 admet une dérivée contenant K en facteur, et l'accroissement de l'autre se traite par une méthode analogue à celle qu'on a suivie au paragraphe **14** pour l'intégrale (32''); il est donc inférieur à $(L)K\Delta x^{\Upsilon}$. Donc

$$|\Delta Z_0|<(L)K\,\Delta x,\qquad \left|\Delta\frac{\partial Z_0}{\partial x}\right|<(L)K\,\Delta x,\qquad \left|\Delta\frac{\partial Z_0}{\partial y}\right|<(L)K\,\Delta x^{\Upsilon},$$

$$|Z_0|<(L)Ky^{\frac{\Upsilon}{2}+1},\qquad \left|\frac{\partial Z_0}{\partial x}\right|<(L)Ky^{\frac{\Upsilon+1}{2}},\qquad \left|\frac{\partial Z_0}{\partial y}\right|<(L)Ky^{\frac{\Upsilon}{2}}.$$

Ce sont les formules qui nous ont servi dans le paragraphe **55** [formules (71) et (72)] et qui interviennent à la seconde approximation [première formule (60)], la première approximation donnant évidemment lieu aux inégalités (3) ou (3'), puisque c'est une équation de la forme $\delta z=\varphi(x)$, dont la solution se forme comme il a été dit à la fin du paragraphe **7**.

Les Chapitres IV et V paraîtront en 1914.

ERRATA ET REMARQUES.

Pages.

305, ligne 2 de la note, *au lieu de :* t. 151, *lire :* t. 152.

306, ligne 4 et note (⁵). *au lieu de :* Schaefli *et* Lauricell, *lire :* Schlaefli *et* Lauricella.

307, ligne 3 de la note, *au lieu de :* relatif, *lire :* relatifs. Au sujet des *solutions régulières*, dont il est question dans la ligne 9, il convient de supposer également la continuité de toutes les dérivées d'indices inférieurs ou égaux à ceux des dérivées figurant dans l'équation. Les solutions régulières d'une équation de second ordre seront donc continues ainsi que leurs dérivées premières et celles des dérivées secondes que contient l'équation : en particulier, pour les solutions régulières de l'équation de la chaleur $\delta z = 0$, il suffit de dire que z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont continues.

309, ligne 7, *ajouter* à la condition (Γ) l'hypothèse $0 < \alpha \leq 1$.

312, formule (E), *ajouter :* $= 0$.

313, ligne 6, *au lieu de :* $p = 1$, *lire :* $p = 0$; formules $(\overline{\mathfrak{C}})$ et $(\overline{\mathfrak{C}'})$, *au lieu de :* $+ a\frac{\partial z}{\partial x} = cz$, *lire :* $= a\frac{\partial z}{\partial x} + cz$. Ligne 16, *ajouter : voir* Lévi, *Annali di Mat.* 1912.

314, ligne 19, *au lieu de :* contour, *lire :* contour (C) ouvert.

317, ligne 1, *au lieu de :* § 3, *lire :* § 2. Ligne 4, $\varphi(\eta)$ désigne une fonction continue.

319, lignes 6 et 10, *au lieu de :* $x - X(y)$, *lire :* $|x - X(y)|$.

320, ligne 8, *au lieu de :* si φ admet, *lire :* si φ et X admettent.

321, ligne 25, *au lieu de :* à la condition que P ne vienne pas, *lire :* P ne venant pas.

322 ligne 15, *au lieu de :* relative, *lire :* relatives. Note (³), *ajouter* $d\eta$ dans l'intégrale.

323, le second membre de la formule (Γ) est $K|y-\eta|^{\frac{1+\alpha}{2}}$; ligne 3, *au lieu de :* satisfaire, *lire :* faire.

325, ligne 11, *au lieu de :* $X[\xi, \eta; X_1(s), s]$, *lire :* $V[\xi, \eta; X_1(s), s]$; ligne 6 en remontant, *au lieu de :* $\frac{\partial}{\partial x}V[X(\eta), y; x, y]$, *lire :* $\frac{\partial}{\partial x}V[X(\eta), \eta; x, y]$.

327, lignes 9, 13, 21, *au lieu de :* ψ ; $|\psi|$; $\frac{\Psi_1}{y_1 - y}$, *lire :* $|\psi|$; $|\psi_1|$; $\frac{\Psi_1}{y - y_1}$.

331, lignes 7, 22, *au lieu de :* $\overline{\Phi}_0(\xi)$; C_i, *lire :* $\Phi_0(\xi)$; C_1 ; formules (14′), *au lieu de :* ζ, *lire :* ζ_1, puis ζ'_1.

332, ligne 15, *au lieu de :* U_{ij}, *lire :* $\overline{U}_{ij}$; *remplacer*, dans les formules de la note, y par $y - y_1$.

333, ligne 3, *au lieu de :* ce qui exigera, *lire :* et pour cela supposons. Ligne 13, *mettre un point* après (x', y').

334, lignes 5, 11, *au lieu de :* $\frac{y-\eta}{1}$; U_{ij}, *lire :* $\frac{1}{y-\eta}$; $\overline{U}_{ij}$.

335, ligne 6, *au lieu de :* $\psi''(x)$, *lire :* $\Phi''(x)$.

336, formule (19) *remplacer* le premier signe $-$ par $+$: ligne 16, *au lieu de :* (17), $F_i(y_1) = 0$, *lire :* (19), $F'_i(y_1) = 0$.

338, formule (21′), l'exposant de k est $\frac{3}{2}$.

339, avant-dernière ligne, *au lieu de :* φ, *lire : cf.* Ligne 14, l'hypothèse que X soit dérivable n'est nullement nécessaire pour que le premier terme admette un accroissement d'ordre non nul : la condition (Γ) suffirait.

340, lignes 5, 15, *au lieu de :* $\Delta\mathfrak{D}$; $\mathfrak{D}(x, k)$, *lire :* $|\Delta\mathfrak{D}|$; $|\mathfrak{D}(x, k)|$; lignes 21 et 24, *remplacer*, dans les trois formules, $h^{\frac{\gamma}{2}}$; h^{γ}; h, par : $|h|^{\frac{\gamma}{2}}$; $|h|^{\gamma}$; $|h|$.

343, formules (24) et (24'), *remplacer* $<$ par $\leqq$ et *au lieu de :* I_{pq}, Z, *lire :* $|I_{pq}|$, $|Z|$. De même p. 344, formules (24") et p. 346, ligne 6, *au lieu de :* $\frac{\partial Z}{\partial x}$; φ, *lire :* $\left|\frac{\partial Z}{\partial x}\right|$; $|\varphi|$.

348, ligne 8, nous n'explicitons pas la démonstration relative à l'intégrale en question; mais il est à remarquer qu'elle est particulièrement aisée au cas où les intégrales curvilignes envisagées plus haut sont uniformément convergentes quand Q tend *vers la caractéristique passant par* P (et non plus seulement vers P lui-même) : *cf.* fin du § **9**.

349, dernière ligne, *au lieu de :* $x+\varepsilon$, *lire :* $x+2\varepsilon$.

356, lignes 2, 3, 4, *au lieu de :* $k\mu$; φ; α, *lire :* $2\sqrt{\pi}\,k\mu$; $|\varphi|$; 2α.

351, ligne 15, le premier membre de la deuxième formule est $|f(\xi, \eta_1)-f(x, \eta_1)|$; ligne 2 de la note, *au lieu de :* y, *lire :* φ.

354, formule (28) *remplacer* le premier signe $-$ par $+$.

355, ligne 5, le premier terme du second membre est $\Phi'_i(0)$; 356, ligne 18, *remplacer* 4 par 2.

360, ligne 13, *au lieu de :* ∂Z, *lire :* δZ. Ligne 19 et ligne 6 de la page suivante, *après :* intégrale simple *et* intégrale double, *ajouter :* de la formule (31).

363, lignes 1, 3 de la note (¹), *au lieu de :* ce terme ... peut-être; cette intégrale, *lire :* ces termes ... qui peut être; ces intégrales.

365, ligne 3, *au lieu de :* $-2s$, *lire :* $-3s$.

366, ligne 5, *au lieu de :* $(y-y')^{\frac{5}{2}}$, *lire :* $(y-\eta_1)^{\frac{5}{2}}$.

367, ligne 13, *au lieu de :* $\delta' z$, *lire :* $\delta' Z$; et p. 368, lignes 19-22, *remplacer* Φ'' par $H\Phi''$.

371, ligne 10, *au lieu de :* u, *lire :* a. P. 372, ligne 4, *introduire* $-$ entre les deux dérivées de a.

373, ligne 20, *au lieu de :* (E), *lire :* (E'). P. 377, note, fin de la ligne 3, *lire :* $a^{\lambda}+b^{\lambda}$.

383, dernière formule, *au lieu de :* $\frac{\nu'_{21}}{\sqrt{y}}$, *lire :* $\frac{\nu'_{21}}{y}$.

386, ligne 17 et page 387, lignes 1 et 2, *au lieu de :* Γ, *lire :* $\mathfrak{S}$.

387, lignes 15 sqq. l'utilisation du domaine S' peut être avantageuse, mais non indispensable.

388, lignes 2, 5, 21, *au lieu de :* ($\mathcal{E}$), *lire :* ($\mathcal{E}'$); ligne 22, *au lieu de :* $S_{y-\epsilon}$, *lire :* $S_{y_0-\epsilon}$.

390, ligne 6 en remontant, *au lieu de :* φ, *lire :* $|\varphi|$.

394, ligne 7, on suppose $\beta \geqq \frac{1}{2}$, sinon le second terme de la première inégalité est Ly.

396, lignes 11 et 22, on peut *remplacer* $\mathfrak{M}$ par $\sqrt{m}$. Formule (57), *remplacer* $-$ par $+$.

398, lignes 11-12, le premier membre est $\Delta\psi_n$ et, dans le second, *intervertir* les indices (1) et (2) dans les termes en Δp et Δq.

400, ligne 3, seconde formule, *au lieu de :* K_n, *lire :* K_{n-1}; ligne 8, *au lieu de :* inégalités (62') et (66), *lire :* formules (62) et (65). P. 401, ligne 2, le dernier terme est h^{γ}.

404, ligne 12, *au lieu de :* $f(\overline{x}, \ldots)$, *lire :* $f(x, \ldots)$; ligne 14, *ajouter* -1 au second membre de la première formule et *remplacer* $\frac{1}{\mu}$ par $\frac{1}{\mu'}$ dans la seconde.

405, ligne 20, *au lieu de :* $n-1$, *lire :* n.

406, ligne 2, *supprimer* le facteur $\frac{l}{\lambda_2-\lambda_1}$; ligne 9, *au lieu de :* $|f'_q|$, *lire :* $|\Delta f'_q|$. Au sujet du § 35, *voir* Lévi *loc. cit.* p. 245.

408, lignes 22 sqq. on suppose que r_1 décroît avec y; sinon on choisirait la partie supérieure telle que la plus courte distance de P à Γ_{r_1} soit comprise entre $\frac{r_1}{2}$ et $\frac{3r_1}{2}$.

409, lignes 12 et 3 en remontant, *au lieu de :* Γ_y; première, *lire :* Σ_y; deuxième.

411, ligne 13, *au lieu de :* μ, *lire :* m; avant-dernière ligne, *ajouter :* $-\frac{\cos\alpha}{\rho}\frac{\partial l}{\partial n}$.

413, lignes 10 et dernière, *au lieu de :* $d\xi\,dt$ et Ψ, *lire :* $ds\,dt$ et Φ.

415, lignes 6, 14, 15, 19, *au lieu de :* $\frac{\partial U(H,\mu)}{\partial x_i}$; $\frac{\partial G}{\partial x_i}$; $\frac{\partial G}{\partial \xi}$; (I), *lire :* $\frac{\partial U(H,\mu)}{\partial \xi_i}$; $\frac{\partial G}{\partial \xi_i}$; $\frac{\partial G}{\partial \xi_i}$; (9).

419, note (²), dans la première intégrale *remplacer* $\frac{1}{q}$ par $1-\frac{1}{q}$ et, dans la seconde, *au lieu de :* x^{q-1}, *lire :* x.

420, dernière ligne de la note, *après :* continue, *lire :* sur ROR' et vers l'intérieur de ROR'.

421, ligne 13, *au lieu de :* $x_2 + ix_2$, *lire :* $x_1 + ix_2$.

424, ligne 11, et 425, ligne 4, *au lieu de : analytique;* continue, *lire : analytiques;* continu.

427, ligne 4, *supprimer :* $\mathfrak{M}$ et.... le maximum et....; ligne 6, *remplacer* q par $\bar{q}$ et $\mathfrak{M}$ par $\frac{1}{m}\cdot$ [P. 425, ligne 28, *après :* finis, *ajouter :* quand nous l'avons appliquée.]

429, lignes 8, 13 et 16, *au lieu de :* $\int U\varphi\, d\tau_1$; $\frac{\partial^n Z}{\partial x^n}$, *lire :* $\left|\int U\varphi\, d\tau_1\right|$; $\left|\frac{\partial^n Z}{\partial x^n}\right|$.

430, l. 16, l'intégr. est $\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau_1 \cos\omega}}$; l. 23, *lire :* $|\partial^{(i)} - \partial^{(i')}| < \Phi \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{x\sqrt{\cos\omega}}{\tau_1} e^{-\frac{x^2\cos^2\omega}{4\tau_1}} d\tau_1$;

l. 18, 28, *au lieu de :* ∂, $\varphi(y)$, *lire :* ∂_0, $\varphi(0)$; l. 19, *supprimer* la parenthèse.

431, l. 2, 8, 12, *au lieu de :* $\varphi(y)$; $|\lambda y^n|$: ox, *lire :* $\varphi(0)$; $|\lambda y|^n$; oy_1; l. 2 dériver φ pour $y=0$.

434, ligne 5, *avant :* Z, *ajouter :* de; l. 19, *au lieu de :* F, *lire :* F_2; 435, l. 6, *ajouter* ($\mathcal{C}_2$).

437, lignes 12, 16, *au lieu de :* φ; n, *lire :* 2φ; p.

438, avant-dernière ligne, *au lieu de :* φ, *lire :* y_0; l. 5, le numérateur de la fraction est M.

439, lignes 12-17-21, *après :* fonctions $\mathcal{H}$, *ajouter :* en y.

440, ligne 3, le dernier dénominateur est ∂y_1^{n-1}; ligne 9, *remplacer*, dans les exposants des dénominateurs, n par $n-1$.

442, lignes 8, 12, 18, *au lieu de :* f; *des coefficients;* φ, *lire :* $|f|$; *du coefficient* f; (φ). On peut, au lieu de la formule (9), donner comme autre limitation, plus précise, $\left(\frac{\lambda A + \mu}{d^2} + \frac{\nu C}{d}\right)[U] + \varpi F$, λ, μ, ν, ϖ ne dépendant que du contour, A, C, F étant respectivement les modules maxima de a, c, f et de leurs dérivées; dans le cas de l'équation (E), dont il est question à la fin de ce paragraphe, c'est une limitation de cette forme qu'il conviendrait d'employer, λ, μ, ν, ϖ dépendant alors également de b.

443, formule (10) le crochet est $[1 + k\mu^2 d^2(1-\lambda_n)^2 + k(2n+1)(2n+2)\lambda_n^2 d^2]$. Lignes 10 et 12, *multiplier* $e^{2\mu}$ par $1+\varepsilon$.

444, ligne 4, dans le second membre, *au lieu de :* $-\frac{\partial b}{\partial y}$, *lire :* $-n\frac{\partial b}{\partial y}$; dernière ligne de la note, *au lieu de : Henry*, *lire :* $\mathcal{H}$ *en* y (par rapport à l'ensemble x, y).

446, ligne 3, *après :* fonctions $\mathcal{H}$, *ajouter :* de y; l. 24, *avant :* $\delta z = f$, *ajouter :* de.

448, ligne 6, *au lieu de :* $-x f(y)$, *lire :* $-x\psi(y)$. P. 449, l'indice du dernier Σ est p.

450, ligne 6, *au lieu de :* $k^n C^n$, *lire :* $|kCx|^n$; ligne 12, *au lieu de :* oy^n, *lire :* oy^m; ligne 16, *après :* sont, *ajouter :* majorées par.

453, lignes 13-14, ponctuation mauvaise, *lire :* fonctions *analytiques de* y sur un segment de oy, est elle-même.... Dernière ligne, la limite inférieure de J_p est $-\infty - ih$.

454, form. (13), *multiplier* f par e^{-t^2}; ligne 15, *au lieu de :* t, *lire :* $|t|$.

455, form. (14) et dernière ligne, *au lieu de :* $\delta u_0 = 0$; représente, *lire :* $\delta u_0 = f$; représentent.

456, ligne 2, *au lieu de :* F ... F, *lire :* $\frac{F}{M^2}\cdots\frac{F}{M}$; lignes 11 et 15, *remplacer le mot :* arc, *par le mot :* côté vertical.

458, ligne 2, *au lieu de :* AC, BD, *lire :* A_1B_1, A_2B_2.

459, ligne 16, *au lieu de :* a_{2n}, *lire :* $(2n)!\, a_{2n}$. Dans l'intégrale $\mathcal{K}$ (ligne 5), Φ étant analytique dans le carré, on peut prendre un intervalle d'intégration (a_1, a_2) contenant (x_1, x_2), le chemin d'intégration coïncidant avec l'axe réel de a_1 à x_1 et de x_2 à a_2.

460, ligne 20, *supprimer* dx; ligne 28, *au lieu de :* partie réelle, *lire :* valeur.

462, ligne 3 en remontant, et 463, lignes 1-5, *au lieu de :* $2k\pi i$; $f(x)$, *lire :* $k\pi i$; $\psi(x)$.

TABLE DES MATIÈRES.

SIXIÈME SÉRIE. — TOME IX.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

FIN DU TOME IX DE LA SIXIÈME SÉRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
50113 Quai des Grands-Augustins, 55.

Journal de mathématiques
pures et appliquées

